

ВИРТУАЛЬНЫЕ КУБИТЫ — МНОГОУРОВНЕВОСТЬ ВМЕСТО МНОГОЧАСТИЧНОСТИ

*А. Р. Кессель, В. Л. Ермаков**

*Казанский физико-технический институт им. Е. К. Завойского
Казанского научного центра Российской академии наук
420029, Казань, Россия*

Поступила в редакцию 22 октября 1999 г.

На основе предложенного формализма виртуальных спинов изучается возможность применения многоуровневых квантовых систем с дискретным неэквидистантным спектром для физической реализации универсального набора квантовых вентилях, необходимого для построения произвольного алгоритма для квантового компьютера. Показано, что такой набор вентилях, включая двухкубитные, можно построить на одном ядре со спином $3/2$. Обосновано утверждение, что трехкубитные вентилях тоже могут быть реализованы на одной квантовой частице со спином $7/2$.

PACS: 03.67.Lx, 03.67.Hk, 03.65.Bz

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений в проблеме создания квантового компьютера, интенсивно обсуждающейся в настоящее время, является поиск новых физических систем, пригодных в качестве информационной среды для квантовых вычислений. Ядерный магнитный резонанс спина $1/2$ дает один из главных примеров физических систем такого рода [1]. Два возможных стационарных состояния спина $1/2$ естественным образом отображают один бит информации (в данном случае, квантовый бит или кубит). Таким образом, в используемой в настоящее время модели квантового компьютера одному кубиту соответствует одна частица. В данной работе рассматривается возможность использовать спины большие чем $1/2$, обладающие большим количеством стационарных состояний и соответствующих им в общем случае неэквидистантных уровней энергии. Краткое изложение этих результатов опубликовано в работе [2]. Такая физическая система предоставляет больше разнообразных возможностей для внешнего воздействия на квантовые процессы. В качестве конкретного примера будут рассматриваться ядра со спином $3/2$.

Спин I обладает $2I + 1$ уровнем энергии, которые могут быть неэквидистантными, эквидистантными и вырожденными. Подбирая подходящим образом частоту, поляризацию, длительность и форму радиочастотных импульсов, можно весьма разнообразными способами возбуждать спины, добиваясь необходимой эволюции и формы отклика. Например, в неэквидистантном трехуровневом спектре ядерного квадрупольного резонанса спина 1 возможно возбуждение трех резонансных переходов, осуществляемое тремя взаимно перпендикулярными радиочастотными полями, имеющими различные частоты. Еще большее разнообразие достигается при воздействии импульсными последовательностями, которые строятся как комбинации разнообразных импульсов и интервалов свободной эволюции спиновой системы.

Чтобы предложить новый физический объект в качестве информационной среды для квантового компьютера необходимо сделать следующее.

1. Дать физическое описание объекта и выделить среди допустимых стационарных состояний системы подмножество, которому ставятся в соответствие один или несколько информационных бит. Применительно к рассматриваемой в данной работе проблеме это потребует показать, что четыре подходящих состояния многоуровневого дискретного спек-

*E-mail: ermakov@sci.kcn.ru

тра возможно представить в виде прямого произведения гильбертовых пространств двух двухуровневых систем (двух кубитов).

2. Указать способы физического воздействия на систему, которые осуществляют переходы между ее стационарными состояниями, тем самым реализуя логические операции. Для реализации этого достаточно показать, что в этой системе возможно осуществить однобитную операцию поворота для каждого кубита, а также двухкубитную операцию «контролируемое отрицание» — CNOT, так как известно [9], что этих двух вентилях достаточно, чтобы построить алгоритм любой сложности.

3. Указать способы установления необходимого для расчетов исходного состояния $|0\rangle$ и считывания конечного состояния каждого кубита.

Рассмотрим последовательно реализацию этих требований на четырехуровневом ядре со спином $3/2$.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

2.1. Основной гамильтониан

Уровни энергии квадрупольного спина в градиенте электрического поля решетки и в постоянном магнитном поле определяются гамильтонианом

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_z + \mathbf{H}_Q, \quad (1)$$

где \mathbf{H}_z — гамильтониан взаимодействия с внешним постоянным магнитным полем, \mathbf{H}_Q — гамильтониан электрического квадрупольного взаимодействия. В частном случае, когда постоянное магнитное поле направлено параллельно главной оси градиента электрического кристаллического поля, эти операторы имеют форму [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_z &= -\hbar\omega_0 \mathbf{I}_z, \\ \mathbf{H}_Q &= \frac{1}{3}\hbar\omega_Q [3\mathbf{I}_z^2 - I(I+1) + \eta(\mathbf{I}_x^2 - \mathbf{I}_y^2)], \end{aligned} \quad (2)$$

где ω_Q — константа квадрупольного взаимодействия, ω_0 — зееманова частота, η — безразмерная величина ($|\eta| \leq 1$), описывающая отклонение градиента электрического поля от аксиальной симметрии. В случае спина $3/2$ собственные значения гамильтониана (1), (2) равны

$$\begin{aligned} \hbar\varepsilon_{\pm 3/2} &= \hbar\omega_Q(B_{\mp} \mp C), \\ \hbar\varepsilon_{\pm 1/2} &= \hbar\omega_Q(-B_{\pm} \pm C), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$B_{\pm} = \sqrt{(1 \pm 2C)^2 + \frac{\eta^2}{3}}, \quad C = \frac{\omega_0}{\omega_Q}.$$

Отметим, что частота чисто ($\omega_0 = 0$) квадрупольного резонанса равна

$$2\omega_Q \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{3}}.$$

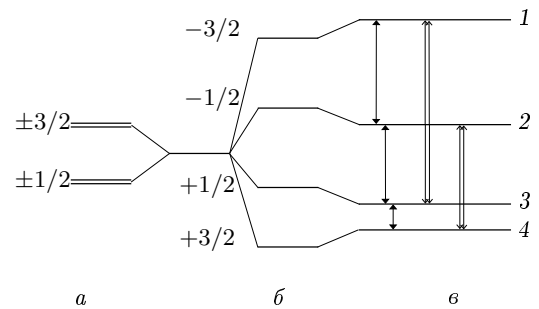
Уровням энергии (3) соответствуют собственные функции

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mp 3/2}\rangle &= \cos(\alpha_{\pm})|\chi_{\mp 3/2}\rangle + \sin(\alpha_{\pm})|\chi_{\pm 1/2}\rangle, \\ |\Psi_{\pm 1/2}\rangle &= \cos(\alpha_{\pm})|\chi_{\pm 1/2}\rangle - \sin(\alpha_{\pm})|\chi_{\mp 3/2}\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

где $|\chi_m\rangle$ — собственная функция оператора \mathbf{I}_z , отвечающая собственному значению m , и

$$\text{tg } \alpha_{\pm} = \frac{\sqrt{3}}{\eta} [B_{\pm} + (1 \pm 2C)].$$

Спиновые уровни энергии и резонансные переходы, необходимые для реализации квантовых логических операций, представлены на рисунке. Приведенные выше формулы (1)–(4) справедливы при любом значении отношения $R = \omega_0/\omega_Q$. Ниже для определенности подробно рассмотрим случай спектра магнитного резонанса, расщепленного квадрупольным взаимодействием ($\omega_0 > \omega_Q$), при условии, что ω_Q много больше ширины спиновых уровней. В этом случае спиновый спектр состоит из четырех хорошо разрешенных резонансных линий, причем $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \varepsilon_4$.



Уровни энергии спина $3/2$ в следующих случаях: а) внешнее магнитное поле равно нулю (чисто квадрупольный резонанс), уровни энергии дважды вырождены; б) квадрупольное взаимодействие отсутствует (внешнее поле определяет эквидистантную структуру спектра); в) квадрупольное взаимодействие много меньше внешнего поля. Показаны типы резонансных переходов: одинарными стрелками с $\Delta m = \pm 1$, двойными — переходы с $\Delta m = \pm 2$. Все указанные переходы могут возбуждаться специальными импульсными последовательностями

2.2. Гамильтониан взаимодействия с переменным полем

Считая релаксационные процессы пренебрежимо малыми, полный ядерный спиновый гамильтониан может быть представлен в форме

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{rf}, \quad (5)$$

где \mathbf{H}_{rf} — оператор взаимодействия с переменным полем. В случае, когда переменное магнитное поле направлено вдоль оси y , этот оператор равен

$$\mathbf{H}_{rf}^Y(t) = 2\hbar\gamma H_{rf} \mathbf{I}_y \cos(\Omega t), \quad (6)$$

где H_{rf} и Ω — амплитуда и частота переменного поля, γ — гиромагнитное отношение ядра.

В дальнейшем нам понадобятся выражения для операторов $\mathbf{H}_{rf}(t)$ в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{rf}^*(t) &\equiv \mathbf{D}^{-1}(t-t_0) \mathbf{H}_{rf}(t) \mathbf{D}(t-t_0), \\ \mathbf{D}(t-t_0) &= \exp[-i\mathbf{H}_0(t-t_0)/\hbar]. \end{aligned} \quad (7)$$

Форма оператора \mathbf{D} соответствует случаю, когда основной гамильтониан системы \mathbf{H}_0 не зависит от времени.

Для простоты записи и последующих вычислений будет использоваться представление спиновых операторов через проективные операторы \mathbf{P}_{mn} , которые являются матрицами размера 4×4 со всеми матричными элементами p_{kl} равными нулю, кроме одного $p_{mn} = 1$. Проективные операторы обладают простыми свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{kl} \mathbf{P}_{mn} &= \delta_{lm} \mathbf{P}_{kn}, \\ \mathbf{P}_{mn} &= \mathbf{P}_{nm}^+, \\ \mathbf{P}_{mn} |\Psi_k\rangle &= \delta_{nk} |\Psi_m\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Также для упрощения записи вместо индексов $-3/2, -1/2, +1/2, +3/2$ будут использоваться индексы 1, 2, 3, 4, соответственно. Компоненты спина следующим образом выражаются через проективные операторы:

$$\mathbf{I}_\alpha = \sum_{m,n} \langle \Psi_m | \mathbf{I}_\alpha | \Psi_n \rangle \mathbf{P}_{mn}.$$

В частности, основной гамильтониан в представлении проективных операторов имеет вид

$$\mathbf{H}_0 = \sum_m \hbar \varepsilon_m \mathbf{P}_{mm}, \quad (9)$$

а переход в представление взаимодействия будет определяться оператором

$$\mathbf{D}(t-t_0) = \sum_m \mathbf{P}_{mm} \exp[-i\varepsilon_m(t-t_0)]. \quad (10)$$

Когда частота внешнего переменного поля Ω совпадает с одной из спиновых собственных частот, например, с $\Omega_{mn} = |\varepsilon_m - \varepsilon_n|$, оператор взаимодействия с переменным магнитным полем (6) в представлении взаимодействия может быть представлен в виде

$$\mathbf{H}_{rf}^*(t) = \mathbf{H}_{rf,eff} + \sum_{kl} \mathbf{G}_{kl} \exp[i(\varepsilon_k - \varepsilon_l)t], \quad (11)$$

где \mathbf{G}_{kl} и $\mathbf{H}_{rf,eff}$ не зависят от времени, причем

$$|\mathbf{G}_{kl}| \sim |\mathbf{H}_{rf,eff}| \sim |\mathbf{H}_{rf}|.$$

Осциллирующие на собственных частотах $\Omega_{kl} \neq \Omega_{mn}$ слагаемые с амплитудами $\sim |\mathbf{G}_{kl}|$ оказывают пренебрежимо малое влияние на эволюцию спина по сравнению с постоянным слагаемым $|\mathbf{H}_{rf,eff}|$. Этот факт имеет место, ввиду того что в ЯМР-экспериментах длительность радиочастотных импульсов обычно значительно превосходит период колебаний $\sim \hbar/|\mathbf{H}_0|$ и в силу условия $\mathbf{H}_0 \gg \mathbf{H}_{rf}$. Таким образом, взаимодействие (6) эффективно возбуждает резонансные переходы только между теми спиновыми уровнями, для которых выполняется условие резонанса типа $\Omega = \Omega_{mn}$. Поэтому оператор (6) в представлении взаимодействия на временах, больших нескольких периодов собственных колебаний ($\Omega_{kl}t \gg 1$), редуцируется в эффективный оператор

$$\mathbf{H}_{rf,eff}^y = i\hbar\gamma H_{rf} |\langle \Psi_m | \mathbf{I}_y | \Psi_n \rangle| (\mathbf{P}_{nm} - \mathbf{P}_{mn}). \quad (12a)$$

В том случае, когда переменное поле направлено вдоль оси x , эффективный оператор взаимодействия равен

$$\mathbf{H}_{rf,eff}^x = \hbar\gamma H_{rf} |\langle \Psi_m | \mathbf{I}_x | \Psi_n \rangle| (\mathbf{P}_{nm} + \mathbf{P}_{mn}). \quad (12b)$$

В силу того что базис собственных функций (4) выбран действительным, матричные элементы оператора \mathbf{I}_y являются чисто мнимыми, а матричные элементы оператора \mathbf{I}_x — действительными. Кроме того, укажем, что хотя в базисе $|\chi\rangle$ операторы \mathbf{I}_x , \mathbf{I}_y обладают матричными элементами только с правилами отбора $m-n = \pm 1$, в базисе $|\Psi\rangle$ эти операторы имеют отличные от нуля матричные элементы с

$$m-n = \pm 1, \pm 2. \quad (13)$$

2.3. Эволюция спиновой системы под влиянием радиочастотных импульсов

Эволюция вектора состояния

$$|\Psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \quad (14)$$

физической системы может быть определена через унитарный оператор эволюции [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t, t_0) &= \mathbf{D}(t - t_0)\mathbf{V}(t, t_0), \\ \mathbf{V}(t, t_0) &= \mathbf{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathbf{H}_{rf}^*(t') dt' \right], \\ \mathbf{H}_{rf}^*(t) &= \mathbf{D}^{-1}(t - t_0)\mathbf{H}_{rf}(t)\mathbf{D}(t - t_0), \end{aligned} \quad (15)$$

где \mathbf{T} — хронологический оператор Дайсона, а оператор \mathbf{V} является оператором эволюции в представлении взаимодействия.

В условиях, когда быстроосциллирующими слагаемыми в $\mathbf{H}_{rf}^*(t)$ можно пренебречь, хронологическая экспонента превращается в обычную. Благодаря этому оператор $\mathbf{V}(t, t_0)$ сводится к

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_x(t, t_0) &\approx \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathbf{H}_{rf,eff}^x dt' \right] = \\ &= \exp \left[-i \frac{\varphi}{2} (\mathbf{P}_{nm} + \mathbf{P}_{mn}) \right] \equiv \mathbf{V}_x(\Omega_{mn}, \varphi_x), \\ \mathbf{V}_y(t, t_0) &\approx \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathbf{H}_{rf,eff}^y dt' \right] = \\ &= \exp \left[\frac{\varphi}{2} (\mathbf{P}_{nm} - \mathbf{P}_{mn}) \right] \equiv \mathbf{V}_y(\Omega_{mn}, \varphi_y), \end{aligned}$$

где

$$\varphi_\alpha = 2(t - t_0)\gamma H_{rf} |\langle \Psi_n | \mathbf{I}_\alpha | \Psi_m \rangle|, \quad \alpha = x, y, \quad \varepsilon_m > \varepsilon_n.$$

Посредством разложения экспоненты в ряд и применения правил перемножения (8) проективных операторов получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_x(\Omega_{mn}, \varphi_x) &= \mathbf{P}_{kk} + \mathbf{P}_{ll} + \\ &+ (\mathbf{P}_{nn} + \mathbf{P}_{mm}) \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) - \\ &- i(\mathbf{P}_{nm} + \mathbf{P}_{mn}) \sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right), \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_y(\Omega_{mn}, \varphi_y) &= \mathbf{P}_{kk} + \mathbf{P}_{ll} + \\ &+ (\mathbf{P}_{nn} + \mathbf{P}_{mm}) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) + \\ &+ (\mathbf{P}_{nm} - \mathbf{P}_{mn}) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right). \end{aligned} \quad (16b)$$

Здесь индексы $k, l \neq m, n$.

Кроме того, для построения квантовых логических элементов потребуется возбуждать спин на двух переходах одновременно. Ниже показывается, что для этого достаточно возбуждать переходы, не имеющие общих уровней энергии. В этом случае

оператор эволюции является произведением коммутирующих операторов эволюции для отдельных переходов. При двухчастотном возбуждении на частотах Ω_{12} и Ω_{34} непосредственные вычисления приводят к следующему выражению для оператора эволюции:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_y(\Omega_{12}, \varphi_y; \Omega_{34}, \varphi'_y) &= \\ &= (\mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{22}) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) + \\ &+ (\mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_{12}) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) + \\ &+ (\mathbf{P}_{33} + \mathbf{P}_{44}) \cos\left(\frac{\varphi'_y}{2}\right) + \\ &+ (\mathbf{P}_{43} - \mathbf{P}_{34}) \sin\left(\frac{\varphi'_y}{2}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

При двухчастотном облучении на частотах Ω_{13} и Ω_{24} оператор эволюции оказывается равным

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_y(\Omega_{13}, \varphi_y; \Omega_{24}, \varphi'_y) &= \\ &= (\mathbf{P}_{22} + \mathbf{P}_{44}) \cos\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) + \\ &+ (\mathbf{P}_{42} - \mathbf{P}_{24}) \sin\left(\frac{\varphi_y}{2}\right) + \\ &+ (\mathbf{P}_{33} + \mathbf{P}_{11}) \cos\left(\frac{\varphi'_y}{2}\right) + \\ &+ (\mathbf{P}_{31} - \mathbf{P}_{13}) \sin\left(\frac{\varphi'_y}{2}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

3. ФОРМАЛИЗМ ВИРТУАЛЬНЫХ СПИНОВ

В качестве базиса для конструирования квантовых логических элементов в принятой сейчас ЯМР-модели квантового компьютера [4–7] рассматриваются два реальных спина $R = 1/2$ и $S = 1/2$, связанных обменным взаимодействием. В формализме квантовой механики состояния такой системы и операции над ними записываются в абстрактном четырехмерном пространстве, являющемся прямым произведением $\Gamma_R \otimes \Gamma_S$ двумерных пространств собственных состояний реальных спинов R и S . В нашем случае для пояснения информационного аспекта предлагаемых логических операций удобно осуществить обратную процедуру: представить четырехмерное пространство Γ_I , соответствующее реальному спину $3/2$, как прямое произведение $\Gamma_R \otimes \Gamma_S$ двух абстрактных двумерных пространств состояний виртуальных спинов R и S . Тогда любой оператор \mathbf{P} в четырехмерном базисе может быть выражен в виде линейной комбинации прямых произведений $\mathbf{R} \otimes \mathbf{S}$ компонент векторных операторов спина, заданных в подпространствах Γ_R и Γ_S . Между бази-

сом $|\Psi_M\rangle$ пространства Γ_I и базисом $|\xi_m\rangle \otimes |\zeta_n\rangle$ прямого произведения $\Gamma_R \otimes \Gamma_S$ имеет место следующее изоморфное соответствие:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= |\xi_1\rangle \otimes |\zeta_1\rangle \equiv |11\rangle, & |\Psi_3\rangle &= |\xi_2\rangle \otimes |\zeta_1\rangle \equiv |01\rangle, \\ |\Psi_2\rangle &= |\xi_1\rangle \otimes |\zeta_2\rangle \equiv |10\rangle, & |\Psi_4\rangle &= |\xi_2\rangle \otimes |\zeta_2\rangle \equiv |00\rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

где для индексов $-1/2$ и $+1/2$ виртуальных спинов используются соответственно индексы 1 и 2. Здесь $|11\rangle$ и т.д. — обозначения, принятые в теории информации для представления состояния двух кубитов. Имеют место следующие полезные соотношения между проективными операторами в рассматриваемых пространствах, которые будут использоваться в расчетах:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{kl} \otimes \mathbf{S}_{mn} &= \mathbf{P}_{2k-2+m, 2l-2+n}, \\ \mathbf{R}_{kl} \mathbf{R}_{mn} \otimes \mathbf{1}_S &= \delta_{lm} \mathbf{R}_{kn} \otimes \mathbf{1}_S, \\ \mathbf{R}_{kl} \otimes \mathbf{1}_S |\xi_m\rangle |\zeta_n\rangle &= \delta_{lm} |\xi_k\rangle |\zeta_n\rangle, \\ \mathbf{1}_R \otimes \mathbf{S}_{kl} \mathbf{S}_{mn} &= \delta_{lm} \mathbf{1}_R \otimes \mathbf{S}_{kn}, \\ \mathbf{1}_R \otimes \mathbf{S}_{kl} |\xi_m\rangle |\zeta_n\rangle &= \delta_{ln} |\xi_m\rangle |\zeta_k\rangle, \\ (\mathbf{R}_{kl} \otimes \mathbf{S}_{ab})(\mathbf{R}_{mn} \otimes \mathbf{S}_{cd}) &= \delta_{lm} \delta_{bc} \mathbf{R}_{kn} \otimes \mathbf{S}_{ad}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь операторы \mathbf{R}_{mn} и \mathbf{S}_{mn} — проективные операторы двумерных пространств Γ_R и Γ_S , а $\mathbf{1}_R$ и $\mathbf{1}_S$ — операторные единицы в этом базисе. В частности, компоненты $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$ и $\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z$ виртуальных спинов следующим образом выражаются через проективные:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \frac{\mathbf{R}_{12} + \mathbf{R}_{21}}{2}, \\ \mathbf{R}_y &= \frac{i(\mathbf{R}_{12} - \mathbf{R}_{21})}{2}, \\ \mathbf{R}_z &= \frac{\mathbf{R}_{11} - \mathbf{R}_{22}}{2}, \\ \mathbf{S}_x &= \frac{\mathbf{S}_{12} + \mathbf{S}_{21}}{2}, \\ \mathbf{S}_y &= \frac{i(\mathbf{S}_{12} - \mathbf{S}_{21})}{2}, \\ \mathbf{S}_z &= \frac{\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{22}}{2}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в четырехмерном пространстве Γ_I два кубита могут быть введены другим образом: чтобы верхняя пара уровней составила один кубит, а нижняя — второй. В магнитном резонансе такое выделение двухуровневых подсистем широко используется под названием «формализм фиктивных (или эффективных) спинов $1/2$ ». В этом случае пространство Γ_I является прямой суммой $\Gamma_R \oplus \Gamma_S$ пространств фиктивных спинов. При та-

ком подходе реализация однобитных вентилях вращения не составит труда, однако возникают трудности при реализации двухкубитного вентиля CNOT. Кроме того, введенные выше виртуальные спины хорошо соответствуют представлениям, используемым в квантовой информатике.

4. ПРИГОТОВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Как известно, исходным состоянием для квантовых алгоритмов, выполняемых на абстрактном квантовом компьютере, является состояние $|00\rangle$.

При эмуляции абстрактных квантовых вычислительных машин в реальных экспериментах ЯМР нужно учитывать по крайней мере следующие особенности квантового компьютера на ЯМР. В ЯМР в качестве информационной среды используется макроскопическое число одинаковых квантовых процессоров — молекул, вычисления на которых ведутся одновременно, а выходной сигнал является суммой сигналов от всех молекул. Адекватным языком ЯМР-экспериментов является формализм матрицы плотности. Эквивалентом состояния $|00\rangle$ является матрица плотности вида $\sigma_{init} = \text{const } \mathbf{P}_{44}$.

В образце макроскопических размеров совокупность одинаковых ядер образует ансамбль, спиновые уровни которого в равновесии заселены согласно бальцмановской матрице плотности:

$$\begin{aligned} \rho_{eq} &= Z^{-1} \exp(-\beta \mathbf{H}), \\ Z &= \text{Sp} [\exp(-\beta \mathbf{H})], \\ \beta &= 1/kT. \end{aligned} \quad (21)$$

Эксперименты в ЯМР проводятся в основном при комнатной температуре, при которой модуль величины $\beta \mathbf{H}$, стоящей в показателе экспоненты, много меньше единицы ($\sim 10^{-5} - 10^{-6}$). В этих условиях исходной матрицей плотности для квантовых алгоритмов, выполняемых на ЯМР-компьютере, является

$$\begin{aligned} \rho_{eq} &= Z^{-1} \left[\mathbf{1}_I + \sum_m \lambda_m \mathbf{P}_{mm} \right], \\ \mathbf{1}_I &= \sum_m \mathbf{P}_{mm}, \\ \lambda_m &= \frac{\hbar \varepsilon_m}{kT}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\mathbf{1}_I$ — единичная матрица в пространстве Γ_I .

Прямое получение матрицы плотности ρ_{eq} в форме σ_{init} возможно посредством охлаждения спиновой системы до сверхнизких температур. Помимо

грандиозных технологических трудностей это неизбежно скажется на скорости всего цикла вычислений. Ниже будет показано, как в реальных экспериментах ЯМР можно получить матрицу плотности

$$\rho_{init} = \text{const} [\mathbf{1}_I + \text{const} \mathbf{P}_{44}] \quad (23)$$

в качестве входа для квантовых алгоритмов. В операторном смысле матрица плотности ρ_{init} отличается от σ_{init} слагаемым, пропорциональным матрице $\mathbf{1}_I$, которая не меняется под влиянием унитарных преобразований и не дает вклада в наблюдаемый сигнал. Поэтому любые импульсные последовательности, в том числе осуществляющие логические операции, не влияют на матрицу $\mathbf{1}_I$, и поэтому при описании эволюции начальные матрицы плотности ρ_{init} и σ_{init} дают одинаковые результаты.

Для получения ρ_{init} целесообразно использовать процедуру пространственного [5] или временного [6] динамического (с помощью дополнительного импульсного воздействия на спины) сведения матрицы плотности ρ_{eq} к форме ρ_{init} . Рассмотрим процедуру временного сведения матрицы плотности ρ_{eq} к ρ_{init} применительно к многокубитному спину, оставляя другие методы для будущего изучения.

Предлагается следующая процедура, идейно восходящая к работе [6]. Пусть необходимое вычисление состоит в проведении преобразования \mathbf{V}_{comp} с начальной матрицей плотности в форме ρ_{init} , тогда как спиновая система находится в состоянии, задаваемом равновесной матрицей плотности (22). Покажем, что среднее

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \left[\mathbf{V}_{comp} \rho_{eq} \mathbf{V}_{comp}^\dagger + \mathbf{V}_{comp} \mathbf{V}_1 \rho_{eq} \mathbf{V}_1^\dagger \mathbf{V}_{comp}^\dagger + \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{V}_{comp} \mathbf{V}_2 \rho_{eq} \mathbf{V}_2^\dagger \mathbf{V}_{comp}^\dagger \right] = \\ & = \frac{1}{3} \mathbf{V}_{comp} \left(\rho_{eq} + \mathbf{V}_1 \rho_{eq} \mathbf{V}_1^\dagger + \mathbf{V}_2 \rho_{eq} \mathbf{V}_2^\dagger \right) \mathbf{V}_{comp}^\dagger \end{aligned}$$

от результатов трех вычислений \mathbf{V}_{comp} , начинающихся с трех различных начальных состояний — ρ_{eq} , $\mathbf{V}_1 \rho_{eq} \mathbf{V}_1^\dagger$, $\mathbf{V}_2 \rho_{eq} \mathbf{V}_2^\dagger$, — эквивалентно преобразованию \mathbf{V}_{comp} состояния ρ_{init} :

$$\mathbf{V}_{comp} \rho_{init} \mathbf{V}_{comp}^\dagger. \quad (24)$$

Для этого выберем преобразования \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 в форме двух последовательных одночастотных импульсов

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_y(\Omega_{12}, \pi) \mathbf{V}_y(\Omega_{23}, \pi) = \\ &= \mathbf{P}_{44} + \mathbf{P}_{21} + \mathbf{P}_{13} + \mathbf{P}_{32}, \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{V}_y(\Omega_{23}, \pi) \mathbf{V}_y(\Omega_{12}, \pi) = \\ &= \mathbf{P}_{44} - \mathbf{P}_{12} + \mathbf{P}_{31} - \mathbf{P}_{23}, \end{aligned} \quad (25)$$

тогда, используя выражения (16а), (16б) и правила умножения (8), получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{eq} + \mathbf{V}_1 \rho_{eq} \mathbf{V}_1^\dagger + \mathbf{V}_2 \rho_{eq} \mathbf{V}_2^\dagger}{3} &= Z [\alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{P}_{44}] \propto \rho_{init}, \\ \alpha &= 1 + \frac{1}{3} [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3], \\ \beta &= \lambda_4 - \frac{1}{3} [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3]. \end{aligned} \quad (26)$$

Это подтверждает возможность сведения логической операции над ρ_{init} к операции над ρ_{eq} с помощью подходящих импульсных последовательностей.

5. ОДНОВИТНАЯ ОПЕРАЦИЯ ПОВОРОТА

Оператор $\mathbf{V}_y(\Omega_{12}, \varphi_y; \Omega_{34}, \varphi'_y)$ (17) при $\varphi_y = \varphi'_y = \varphi$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_y(\Omega_{12}, \varphi; \Omega_{34}, \varphi) &= \\ &= (\mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{22} + \mathbf{P}_{33} + \mathbf{P}_{44}) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \\ &+ (\mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_{12} + \mathbf{P}_{43} - \mathbf{P}_{34}) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Выражая посредством формул (20) операторы \mathbf{P} через операторы \mathbf{R} и \mathbf{S} , можно убедиться, что оператор

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_y(\Omega_{12}, \varphi; \Omega_{34}, \varphi) &= \\ &= (\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{22}) \otimes \left[(\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22}) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \right. \\ &+ \left. (\mathbf{S}_{21} - \mathbf{S}_{12}) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \exp \{ i\varphi \mathbf{1}_R \otimes \mathbf{S}_x \} \end{aligned} \quad (28)$$

тождествен оператору (27). Последнее равенство в правой части оператора (28) показывает, что преобразование $\mathbf{V}_y(\Omega_{12}, \varphi; \Omega_{34}, \varphi)$ есть вращение на угол φ в пространстве Γ_S при условии инвариантности пространства Γ_R . Используя выражения (16а) и (16б) для вычислений выражений типа (17) и (27), можно получить оператор вращения виртуального спина S вокруг оси y , по форме совпадающий с (28).

Аналогичным образом можно показать, что оператор $\mathbf{V}_y(\Omega_{13}, \varphi_y; \Omega_{24}, \varphi'_y)$ (18) при $\varphi_y = \varphi'_y \equiv \varphi$ равен оператору

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_y(\Omega_{13}, \varphi; \Omega_{24}, \varphi) &= \\ &= \left[(\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{22}) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) (\mathbf{R}_{21} - \mathbf{R}_{12}) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \otimes \\ &\otimes (\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22}) = \exp \{ i\varphi \mathbf{R}_x \otimes \mathbf{1}_S \}. \end{aligned} \quad (29)$$

Последнее равенство в правой части выражения (29) показывает, что пропагатор $\mathbf{V}_y(\Omega_{13}, \varphi; \Omega_{24}, \varphi)$ есть вращение на угол φ относительно оси x в спиновом пространстве Γ_R при неизменном Γ_S .

6. ОПЕРАЦИЯ «КОНТРОЛИРУЕМОЕ ОТРИЦАНИЕ» — CNOT

Преобразование $\mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \varphi_x)$ (16a) на переходе $1 \leftrightarrow 2$ при $\varphi_x = \pi$, определяемое как

$$\mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi) = [\mathbf{P}_{33} + \mathbf{P}_{44}] - i[\mathbf{P}_{21} + \mathbf{P}_{12}], \quad (30)$$

осуществляет двухбитную операцию «контролируемое отрицание» CNOT — операцию NOT на спине S , если спин R находится в состоянии $|\xi_1\rangle$, и оставляет спин S неизменным, если спин R находится в состоянии $|\xi_2\rangle$. Действительно, легко проверить, используя определение проективных операторов, что

$$\mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi)|\Psi_1\rangle \equiv -i|\Psi_2\rangle, \quad \mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi)|\Psi_2\rangle \equiv -i|\Psi_1\rangle, \\ \mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi)|\Psi_3\rangle \equiv |\Psi_3\rangle, \quad \mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi)|\Psi_4\rangle \equiv |\Psi_4\rangle,$$

или в информационных обозначениях

$$\mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi)|11\rangle = -i|10\rangle, \quad \mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi)|10\rangle = -i|11\rangle, \\ \mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi)|01\rangle = |01\rangle, \quad \mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi)|00\rangle = |00\rangle.$$

Это является (с точностью до фазового множителя $\exp(i\pi/2)$) таблицей истинности для определенной выше операции CNOT, в которой спин R управляет состоянием спина S . В проективных операторах базиса $\Gamma_R \otimes \Gamma_S$ оператор эволюции $\mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi)$ представим в форме

$$\mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi) = -i\mathbf{R}_{11} \otimes (\mathbf{S}_{12} + \mathbf{S}_{21}) + \mathbf{R}_{22} \otimes \mathbf{1}_S. \quad (31)$$

Аналогичным образом можно показать, что преобразование $\mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \varphi_x)$ на переходе $1 \leftrightarrow 3$ при $\varphi_x = \pi$, равное

$$\mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi) = [\mathbf{P}_{22} + \mathbf{P}_{44}] - i[\mathbf{P}_{13} + \mathbf{P}_{31}], \quad (32)$$

осуществляет операцию CNOT, в которой спин S управляет состоянием спина R :

$$\mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi)|\Psi_1\rangle \equiv -i|\Psi_3\rangle, \quad \mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi)|\Psi_2\rangle \equiv |\Psi_2\rangle, \\ \mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi)|\Psi_3\rangle \equiv -i|\Psi_1\rangle, \quad \mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi)|\Psi_4\rangle \equiv |\Psi_4\rangle.$$

Это дает таблицу истинности

$$\mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi)|11\rangle = i|01\rangle, \quad \mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi)|10\rangle = |10\rangle, \\ \mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi)|01\rangle = i|11\rangle, \quad \mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi)|00\rangle = |00\rangle.$$

В проективных операторах базиса $\Gamma_R \otimes \Gamma_S$ оператор эволюции $\mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi)$ представим в форме

$$\mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi) = \mathbf{1}_R \otimes \mathbf{S}_{22} - i(\mathbf{R}_{12} + \mathbf{R}_{21}) \otimes \mathbf{S}_{11}. \quad (33)$$

Таким образом, импульсное возбуждение спина $I = 3/2$, соответствующее операторам эволюции $\mathbf{V}_x(\Omega_{12}, \pi)$ и $\mathbf{V}_x(\Omega_{13}, \pi)$, осуществляет логическую операцию CNOT на виртуальных спинах такую, что спин R контролирует динамику спина S и наоборот.

7. СЧИТЫВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для нахождения результата вычислений необходимо иметь возможность считывать состояние конечной матрицы плотности ρ_{out} . Методы ЯМР позволяют измерять все элементы матрицы плотности посредством томографии состояний [7]. В силу сложности этого метода здесь для иллюстрации будет обсуждаться считывание в случае, когда результат вычислений ρ_{out} имеет диагональную форму:

$$\rho_{out} = \mu_0\mathbf{1} + \mu_1\mathbf{P}_{11} + \mu_2\mathbf{P}_{22} + \mu_3\mathbf{P}_{33} + \mu_4\mathbf{P}_{44}, \quad (34)$$

а результатом вычисления является одно из состояний (19), т.е. когда отличной от нуля может быть только одна из величин μ_i . Предлагается воздействовать на рассматриваемый спин $3/2$ двухчастотным импульсом электромагнитного поля, осуществляющим поворот элементов матрицы плотности на угол $\varphi_y = \pi/2$. В результате этого возникает сигнал свободной прецессии на резонансных частотах Ω_{12} и Ω_{34} . Оператором эволюции (27), соответствующим такому импульсу, является

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_y(\Omega_{12}, \pi/2; \Omega_{34}, \pi/2) = \\ = \left(1/\sqrt{2}\right) [\mathbf{1}_I + \mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_{12} + \mathbf{P}_{43} - \mathbf{P}_{34}]. \quad (35)$$

После импульса (35) матрица плотности (34) эволюционирует под действием гамильтониана (9) и в представлении Шредингера приобретает форму

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \left\{ [\mu_1 + \mu_2][\mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{22}] + \right. \\ + [\mu_3 + \mu_4][\mathbf{P}_{33} + \mathbf{P}_{44}] + \\ + [\mu_1 - \mu_2] \left[\mathbf{P}_{21} \exp\{-it\Omega_{21}\} + \right. \\ \left. + \mathbf{P}_{12} \exp\{it\Omega_{12}\} \right] + \\ + [\mu_3 - \mu_4] \left[\mathbf{P}_{43} \exp\{-it\Omega_{34}\} + \right. \\ \left. + \mathbf{P}_{34} \exp\{it\Omega_{34}\} \right] \left. \right\}, \quad (36)$$

где время отсчитывается от конца импульса (35). В состоянии, описываемом матрицей плотности (36), появляются осциллирующие квантовомеханические средние от экспериментально наблюдаемых поперечных компонент спина \mathbf{I} :

$$\langle \mathbf{I}_+(t) \rangle \equiv \langle \mathbf{I}_x + i\mathbf{I}_y \rangle = \\ = \langle \sqrt{3}(\mathbf{P}_{43} + \mathbf{P}_{23}) + \mathbf{P}_{32} \rangle = \\ = \text{Sp} \{ \rho(t)(\mathbf{I}_x + i\mathbf{I}_y) \} = \\ = \sqrt{3}[\mu_3 - \mu_4] \exp\{-it\Omega_{34}\} + \\ + \sqrt{3}[\mu_1 - \mu_2] \exp\{-it\Omega_{12}\}. \quad (37)$$

Таким образом, в описанной ситуации в перпендикулярной постоянному магнитному полю плоскости возникнет прецессия ядерного спина, индуцирующая в приемной катушке периодическое напряжение на двух резонансных частотах с компонентами Фурье $\sqrt{3}[\mu_3 - \mu_4]$ и $\sqrt{3}[\mu_1 - \mu_2]$. Отметим, что воздействие того же импульса на равновесную матрицу плотности (22) привело бы к аналогичной прецессии, но с компонентами Фурье, равными $\sqrt{3} Z[\lambda_3 - \lambda_4]$ и $\sqrt{3} Z[\lambda_1 - \lambda_2]$. Измерение знака отношений

$$b_{34} \equiv \frac{\mu_3 - \mu_4}{\lambda_3 - \lambda_4}, \quad b_{12} \equiv \frac{\mu_1 - \mu_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

соответствующих компонент Фурье, следующих после и до процедуры вычисления, позволяет определить конечное состояние двух виртуальных спинов:

если $b_{34} < 0$ и $b_{12} = 0$, то результатом вычисления является $|00\rangle$,

если $b_{34} > 0$ и $b_{12} = 0$, то результатом вычисления является $|01\rangle$,

если $b_{34} = 0$ и $b_{12} < 0$, то результатом вычисления является $|10\rangle$,

если $b_{34} = 0$ и $b_{12} > 0$, то результатом вычисления является $|11\rangle$.

В случае, когда оператор ρ_{out} содержит наряду с диагональными еще и недиагональные проективные операторы \mathbf{P}_{mn} ($m \neq n$), радиочастотный импульс, подобный рассмотренному в этом разделе, порождает не только сигналы свободной прецессии, но и сигналы спинового эха. Особая роль последних в логических квантовых операциях требует дополнительного изучения.

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Ради конкретности выше рассматривался четырехуровневый энергетический спектр ядер со спином $3/2$ в постоянном магнитном поле. Ядерный спин $3/2$ не является редкостью, ядра с таким спином (${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$, ${}^{21}\text{Na}$, ${}^{35}\text{Cl}$, ${}^{63}\text{Cu}$, ${}^{65}\text{Cu}$, ${}^{79}\text{Br}$, ${}^{81}\text{Br}$,...) входят в самые разнообразные и легкодоступные вещества. Предполагалось, что за счет взаимодействия электрического квадрупольного момента ядра с градиентом кристаллического поля спектр спинового резонансного поглощения расщепляется на несколько линий, расстояния между которыми существенно превосходят их ширины. Изложенная схема относится к квантовым системам любой физической природы. В принципе, для этой же цели можно использовать ядерные спины большей величины, выбрав подходящие четыре уровня энергии, а также

спектры ЭПР с эффективным спином $S^* \geq 3/2$, оптические уровни энергии и т.д. При этом изменятся только выражения для резонансных частот и матричных элементов операторов физических величин. В частности, вполне подходит энергетический спектр ядерного квадрупольного резонанса, расщепленный взаимодействием с постоянным магнитным полем ($\omega_0 < \omega_Q$). Этот случай отличается от рассмотренного в статье только взаимным расположением спиновых уровней энергии, тогда как выражения (1)–(10) для операторов и собственных функций остаются справедливыми.

Использование четырех и большего количества дискретных уровней энергии предоставляет, вообще говоря, дополнительные возможности. В ранее предложенных схемах [4, 5] для реализации квантовых двухкубитных вентилей квантового ЯМР-компьютера предлагалось использовать два спина $1/2$, связанных обменным взаимодействием. Для их функционирования в качестве двухкубитного вентиля требуется наличие экспериментальной возможности включения обменного взаимодействия между разными частицами на точно фиксированное время и, что еще труднее, выключение этого взаимодействия на время, когда рассматриваемый вентиль не функционирует. Эти времена определяются величиной обменного взаимодействия в веществе и могут оказаться настолько длинными, что превысят период когерентности. Кроме того, для выключения обменного взаимодействия требуется применение сложных импульсных последовательностей, что может существенным образом удлинить время вычислений, тратить дополнительную энергию на разогрев и т.д.

В настоящей работе показано, что использование спинов, больших или равных $3/2$, для создания элементов памяти и логических элементов квантового компьютера позволяет преодолеть указанные выше трудности. Это выражается в том, что двухкубитные вентили могут быть реализованы на одной квантовой частице, и поэтому отпадает необходимость затрачивать время на срабатывание взаимодействия между пространственно разделенными частицами. Необходимые логические операции, в том числе и те, которые требовали ранее наличия обменного взаимодействия, в данном случае достигаются применением коротких радиочастотных импульсов, длительность которых определяется амплитудой радиочастотного поля и находится под контролем экспериментатора. Фактически в нашей схеме радиочастотные импульсы берут на себя функцию двухчастичных взаимодействий.

Другое преимущество реализации вентилях на одной частице состоит в том, что с помощью виртуальных спинов можно построить аналоги трехчастичных взаимодействий. Проблема состоит в том, что обратимый компьютер, работающий на принципах классической физики, требует наличия универсального набора обратимых вентилях, включая трехбитные. Изучение путей материализации идеи квантового компьютера, первоначально высказанной Фейнманом [8], показало, что для реализации трехбитных обратимых вентилях требуются физические системы с трехчастичным взаимодействием. Такие взаимодействия в природе отсутствуют. Эту проблему удалось обойти в работе [9], где было показано, что особым образом сконструированных двухкубитных вентилях, построенных на двухчастичных физических взаимодействиях, достаточно, чтобы реализовать произвольный квантовый алгоритм. Между тем трехбитные вентили могут в будущем оказаться полезными для создания компактных алгоритмов или для каких-либо других целей. Поэтому представляется интересным предложить альтернативный путь создания информационных аналогов трехчастичных взаимодействий, путь, основанный на идее настоящей работы — многоуровневость вместо многочастичности. Гильбертово пространство Γ_I ядер со спином $I = 7/2$ можно трактовать как прямое произведение трех гильбертовых пространств виртуальных спинов $1/2$. Следовательно, гильбертово пространство Γ_I одной такой частицы вмещает три кубита информации (спин $7/2$ встречается, например, у ядер ^{43}Ca , ^{45}Sc , ^{49}Ti , ^{51}V , ^{121}Sb , ^{123}Sb , ^{133}Cs ...). Другой вариант этого пути состоит в использовании физических систем с обменным взаимодействием двух спинов, один из которых больше или равен $3/2$. Это тоже позволяет естественным образом получить физическую систему хотя и с парным взаимодействием, но, тем не менее, содержащую три кубита. В качестве примера таких систем

можно использовать кристаллы, в которых наблюдается двойной электронно-ядерный резонанс, а также молекулы со спиновым гамильтонианом в форме

$$\omega_{01}\mathbf{I}_{z1} + \frac{1}{3}\hbar\omega_Q [3\mathbf{I}_{z1}^2 - I_1(I_1 + 1) + \eta(\mathbf{I}_{x1}^2 - \mathbf{I}_{y1}^2)] + \omega_{02}\mathbf{I}_{z2} + J\mathbf{I}_{z1}\mathbf{I}_{z2},$$

где I_2 — любой спин, а спин $I_1 \geq 3/2$ и J — константа обменного взаимодействия. Эти вопросы, однако, требуют отдельного рассмотрения.

Работа поддержана Фондом НИОКР республики Татарстан (проект 14-29).

ЛИТЕРАТУРА

1. T. P. Das and E. L. Hahn, in *Solid State Physics*, Supplement 1, N. Y.–London, Academic Press (1958).
2. А. Р. Кессель, В. Л. Ермаков, Письма в ЖЭТФ **70**, 59 (1999).
3. T. P. Das and A. K. Saha, *Phys. Rev.* **98**, 516 (1955).
4. N. A. Gershenfeld and I. L. Chuang, *Science* **275**, 350 (1997).
5. D. G. Cory, M. D. Price, and T. F. Havel, *Physica D* **120**, 82 (1998).
6. E. Knill, I. L. Chuang, and R. Laflamme, *Phys. Rev. A* **57**, 3348 (1998).
7. R. Laflamme, E. Knill, W. H. Zurek et al., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* **356**, 1941 (1998).
8. R. P. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982).
9. A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve et al., *Phys. Rev. A* **52**, 3457 (1995).