ЖЭТФ, 2000, том 117, вып. 3, стр. 593–604

ЭЛЕКТРОННЫЙ ТРАНСПОРТ ЧЕРЕЗ МИКРОСУЖЕНИЕ В ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н. Г. Галкин, В. А. Гейлер**, В. А. Маргулис

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева
430000, Саранск, Россия

Поступила в редакцию 14 июля 1999 г.

Рассмотрен баллистический электронный транспорт в трехмерных микросужениях с эллиптическим сечением, помещенных в произвольно ориентированное магнитное поле. В модели параболического потенциала конфайнмента получена и исследована зависимость гибридных частот от величины и направления магнитного поля. Найдено разложение кондактанса в ряд Фурье, на основе которого исследованы осцилляции Ааронова—Бома и Шубникова—де Гааза в зависимости от поля и ступенчатая структура квантования кондактанса. Дано возможное объяснение экспериментально наблюдаемого эффекта — квантование кондактанса при достаточно высоких температурах.

PACS: 72.10.-d, 72.10.Fk

1. ВВЕДЕНИЕ

Баллистический электронный транспорт в трехмерных микросужениях (точечных контактах) вызывает в последние годы растущий интерес [1–9] в связи с экспериментальным обнаружением в таких системах эффекта квантования кондактанса даже при комнатных температурах. Свойства трехмерных ($3D$) микросужений существенно отличаются от свойств двумерных ($2D$) микросужений [10, 11], в которых первоначально было обнаружено квантование кондактанса. Характер квантования кондактанса в $3D$-микросужениях существенно зависит от формы поперечного сечения, а также от длины контакта [7]. В частности, в симметричном сужении (круговое сечение) высота ступени квантования кондактанса, измеренная в единицах кванта кондактанса $G_0 = 2e^2/h$, пропорциональна степени вырождения уровней поперечной энергии [7]. Приложенное магнитное поле $\mathbf{B}$ изменяет транспортный режим сужения. Это обусловлено тем обстоятельством, что поле изменяет электронный конфайнмент и может усиливать (в случае эллиптического сечения) или вызывать (для кругового сечения) эффективную анизотропию поперечного сечения сужения. В [7] на основе обобщенной формулы Бюттикера—Ландауэра (в основном численными методами) исследовался кондактанс $3D$-микросужения в случаях продольного и поперечного магнитных полей, а также в частном случае наклонного магнитного поля (поле лежит в плоскости yz, т. е. $\mathbf{B} = (0, B_y, B_z)$). При этом численные результаты показывают, что изменение формы поперечного сечения, величины и направления поля $\mathbf{B}$ ведут к изменению электронного транспортного режима. Из полученных в [7] графиков зависимости кондактанса G от поля $\mathbf{B}$ следует, что в случае продольного магнитного поля могут возникать осцилляции типа Ааронова—Бома и Шубникова—де Гааза. Характер этих осцилляций сильно зависит от величины магнитного поля. Длина микросужения, как отмечено в [7], также сильно влияет на транспортный режим. В частности, данные численного анализа указывают, что эффект квантования кондактанса (ступенчатая структура) и осцилляции Ааронова—Бома могут исчезать в коротких микросужениях.

*E-mail: geyler@mrsu.ru

Отметим, что удобной моделью потенциала геометрического конфайнмента, которая позволяет учесть как роль формы микросужения, так и влияния величины и направления магнитного поля, является потенциал типа «мягкой стенки». Этот потенциал использовался в [10, 11] для $2D$-сужений и в [7] для $3D$-сужений. Такой потенциал характеризует как форму поперечного сечения сужения, так и ее протяженность. Это обстоятельство очень важно, поскольку в баллистическом режиме именно геометрия микросужения является источником сопротивления.

Вблизи узкого горла сужения произвольный гладкий потенциал геометрического конфайнмента во втором порядке по координатам (x, y, z) представляется в виде

$$V(x,y,z) = V_0 + \frac{1}{2}m^*(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 - \omega_z^2z^2). \tag{1}$$

Здесь V_0 — потенциал в седловой точке сужения, m^* — эффективная масса электрона, z — координата вдоль оси сужения. Частота ω_z определяется длиной микросужения l: $\omega_z = \hbar/m^*l^2$. Сечение микросужения аппроксимируется с точностью до членов второго порядка эллипсом с полуосями

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m^*\omega_x}}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m^*\omega_y}}.$$

Гамильтониан одноэлектронных состояний в приложенном постоянном и однородном магнитном поле $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ имеет вид

$$H = \frac{1}{2m^*}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + V(x,y,z), \tag{2}$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал поля $\mathbf{B}$. Для $\mathbf{A}$ выбираем следующую калибровку:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{1}{2}B_yz - B_zy\right)\mathbf{i} + \left(B_xy - \frac{1}{2}B_yx\right)\mathbf{k}. \tag{3}$$

Поворотом осей в фазовом пространстве можно привести квадратичный гамильтониан (2) к диагональному виду. Тогда этот гамильтониан примет тот же вид, что и в отсутствие магнитного поля, но с другими частотами эффективного потенциала:

$$H = \frac{1}{2m^*}\mathbf{P}^2 + \frac{m^*}{2}(\omega_1^2Q_1^2 + \omega_2^2Q_2^2 - \Omega^2Q_3^2), \tag{4}$$

где $\mathbf{P}$, Q — новые фазовые переменные. Новые характерные частоты ω_1, ω_2 и Ω являются функциями величины и направления поля $\mathbf{B}$.

Вероятность прохождения из моды с квантовыми числами (m, n) в моду с (m', n') определяется обобщенной формулой Бюттикера [12] и имеет вид

$$T_{m,n;m',n'} = \delta_{mm'}\delta_{nn'}\left[1 + \exp(-2\pi\varepsilon_{mn})\right]^{-1}, \tag{5}$$

где $\varepsilon_{mn} = (E - V_0 - E_{mn})/\hbar\Omega$, квантовые числа осцилляторов m и $n = 0, 1, 2, \ldots$, энергия движения электрона в плоскости Q_1Q_2 равна $E_{mn} = \hbar\omega_1(m + 1/2) + \hbar\omega_2(n + 1/2)$, E — общая энергия электрона.

Эффекты электронного туннелирования через эффективный потенциал

$$V_{eff}(z) = V_0 + E_{mn} - m^*\Omega^2z^2/2$$

приводят к смазыванию пороговой энергии $V_{eff}(0)$, что, в свою очередь, приводит к тому, что вероятность прохождения через каналы с $E < V_{eff}(0)$ отлична от нуля [7]. Сравнение множителя в квадратных скобках в (5) с распределением Ферми $f_0(E)$ показывает, что величина $\hbar\Omega/2\pi$ играет ту же роль, что и температура в распределении Ферми, т. е. размазывает пороговую энергию электрона.

Кондактанс $3D$-сужения при $T \neq 0$ задается формулой

$$G(T) = \int_0^\infty dE\left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right)G(T=0), \tag{6}$$

где $G(T = 0)$ определяется выражением типа Ландауэра:

$$\frac{G(T=0)}{G_0} = \sum_{m,n=0}^{\infty}\left[1 + \exp(-2\pi\varepsilon_{mn})\right]^{-1}. \tag{7}$$

На основании сказанного выше о смазывании пороговой энергии верхний предел в суммах (7) по m и n равен бесконечности.

Наличие в (7) двойной суммы по квантовым числам m, n и интеграла по энергии в (6) затрудняет прямое использование этих выражений для аналитического исследования кондактанса $3D$-сужения (в отличие от случая нанопроволоки постоянного сечения, где нет размазки пороговой энергии в (7) и суммы легко вычисляются). По-видимому, в связи с этим в [7] кондактанс далее исследовался с помощью (6) и (7) численными методами. При этом общий случай, когда $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ в [7] вообще не рассматривался.

Отметим важное для дальнейшего наблюдение. Формула (7) аналогична магнитному отклику вырожденного газа двумерных осцилляторов с температурой $T = \hbar\Omega/2\pi$ и химическим потенциалом

$\mu = E - V_0$. Магнитный отклик такого газа изучен в [13], где удалось просуммировать соответствующие ряды по одному индексу и свести (6) и (7) к одномерному ряду Фурье.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 мы определяем в общем случае произвольного магнитного поля $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ частоты ω_1, ω_2 и Ω через корни некоторого кубического уравнения и строим зависимости этих частот от величины и направления поля. В разд. 3 мы получаем разложение кондактанса $3D$-сужения в одномерный ряд Фурье, выделяя монотонную и осциллирующую части кондактанса сужения, т. е. получаем для кондактанса аналог формулы Ландау для магнитного отклика вырожденного газа. В разд. 4 исследуется осциллирующая часть кондактанса и аналитически доказывается существование осцилляций типа Ааронова—Бома и Шубникова—де Гааза в случае продольного поля. В этом же разделе исследован случай поперечного поля, а также ступенчатая структура кондактанса в зависимости от ориентации поля.

2. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ГАМИЛЬТОНИАНА

Рассмотрим гамильтониан (2) с потенциалом (1) и магнитным полем $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, произвольно ориентированном относительно осей x, y и z, где ось z направлена вдоль микросужения, а оси x и y — соответственно вдоль малой и большой осей эллиптического сечения сужения. В фазовом пространстве (p_x, p_y, p_z, x, y, z) гамильтониан (2) задает квадратичную форму с симметричной матрицей шестого порядка

$$M = \frac{1}{2m^*}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2B_3 & -B_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & B_2 & -2B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & k_1^2 & -2B_1B_2 & 0 \\ 2B_3 & 0 & -2B_1 & -2B_1B_2 & k_2^2 & -2B_2B_3 \\ -B_2 & 0 & 0 & 0 & -B_2B_3 & k_3^2 \end{matrix}\right\|. \tag{8}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} &B_1 = \frac{e}{2c}B_x, \quad B_2 = \frac{e}{2c}B_y, \quad B_3 = \frac{e}{2c}B_z, \\ &k_1^2 = m^{*2}\omega_x^2 + B_2^2, \\ &k_2^2 = m^{*2}\omega_y^2 + 4B_1^2 + 4B_3^2, \\ &k_3^2 = -m^{*2}\omega_z^2 + B_2^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Канонический вид (4) гамильтониана (2) определяется собственными числами матрицы IM, где I — симплектическая единица [14]:

$$I = \left\|\begin{matrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{matrix}\right\|, \qquad E = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|. \tag{10}$$

Собственные числа λ матрицы M получаются из следующего уравнения шестого порядка

$$(\lambda^2 + \omega_x^2)(\lambda^2 + \omega_y^2)(\lambda^2 - \omega_z^2) + \lambda^2(\lambda^2 + \omega_x^2)\omega_{cx}^2 + \\ + \lambda^2(\lambda^2 + \omega_y^2)\omega_{cy}^2 + \lambda^2(\lambda^2 - \omega_z^2)\omega_{cz}^2 = 0, \tag{11}$$

где $\omega_{cj} = eB_j/m^*c$, $j = x, y, z$.

Положим для определенности $\omega_x \geq \omega_y$ и исследуем кубическое уравнение, которое получится для величины $\xi = \lambda^2$. Обозначим через $P(\xi)$ полином третьей степени от ξ, стоящий в правой части (11). Тогда, очевидно,

$$P(-\infty) = -\infty, \quad P(-\omega_x^2) > 0,$$

$$P(0) < 0, \quad P(\omega_z^2) > 0.$$

Тем самым уравнение $P(\xi) = 0$ имеет три различных корня:

$$\xi_1 \in (-\infty, -\omega_x^2), \quad \xi_2 \in (-\omega_x^2, 0), \quad \xi_3 \in (0, \omega_z^2).$$

Следовательно, симплектическим преобразованием фазового пространства гамильтониан (2) приводится к каноническому виду (4), в котором $\omega_{1,2}^2 = -\xi_{1,2}$, $\Omega^2 = \xi_3$ [14]. Заметим, что при замене $\omega_z^2 \to -\omega_z^2$ уравнение $P(\xi) = 0$ переходит в кубическое уравнение для эффективных частот частицы в трехмерной параболической квантовой яме, находящейся в магнитном поле [15]. В весьма частном случае, когда поле $\mathbf{B}$ лежит в одной из координатных плоскостей, гибридные частоты ω_j и Ω были найдены в [7]. Графики зависимостей гибридных частот ω_j от величины и направления поля $\mathbf{B}$ (направление задается углами θ и φ ориентации поля относительно системы координат (x, y, z), связанной с микросужением) показаны на рис. 1, на котором один из углов фиксирован ($\varphi = \varphi_0$ или $\theta = \theta_0$). Видно, что частоты ω_j зависят как от величины, так и от направления поля, поэтому кондактанс микросужения будет также зависеть от этих величин.

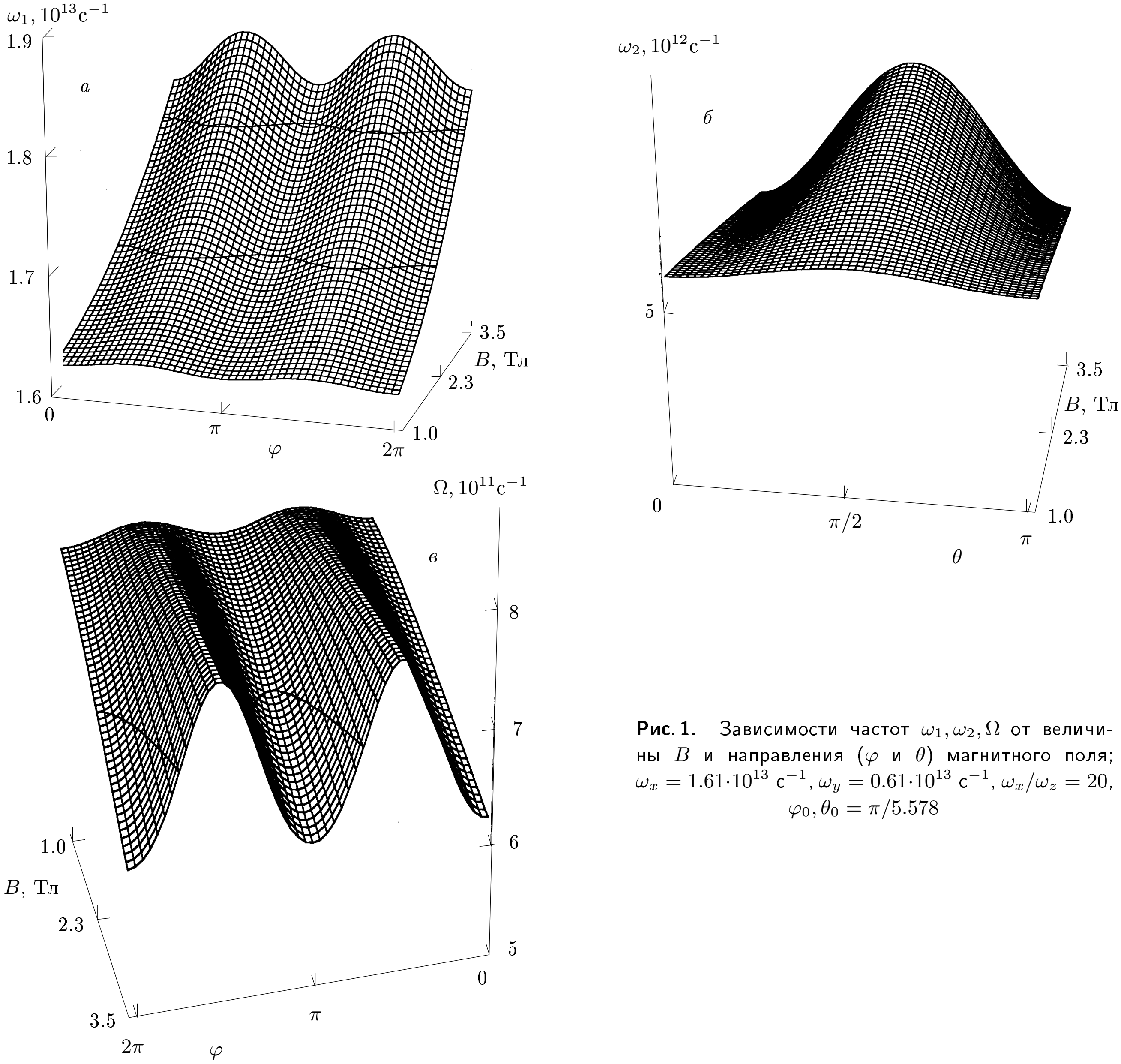


Рис. 1. Зависимости частот $\omega_1, \omega_2, \Omega$ от величины B и направления (φ и θ) магнитного поля; $\omega_x = 1.61 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, $\omega_y = 0.61 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, $\omega_x/\omega_z = 20$, $\varphi_0, \theta_0 = \pi/5.578$

3. РАЗЛОЖЕНИЕ КОНДАКТАНСА В РЯД ФУРЬЕ

Вначале рассмотрим кондактанс микросужения при нулевой температуре. Воспользуемся выражением (7) и введем обозначения $\beta = 2\pi/\hbar\Omega$ и $E - V_0 = \varepsilon$. Тогда

$$\frac{G(T=0)}{G_0} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[1 + \exp\left(-\beta(\varepsilon - E_{mn})\right)\right]^{-1}. \qquad (12)$$

Как показано в Приложении, имеет место формула

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi p} e^{-px} dp, \quad 0 < \alpha < 1. \qquad (13)$$

Положив в (13) $x = \beta(E_{mn} - \varepsilon)$, получим

$$\frac{G(T=0)}{G_0} = \frac{1}{2i} \times$$
$$\times \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{d\xi}{\sin \pi\xi} \sum_{m,n=0}^{\infty} \exp\left[-\xi(E_{mn} - \varepsilon)\beta\right]. \qquad (14)$$

Используя соотношение

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \exp\left\{-\zeta\left[\hbar\omega_1\left(m + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\right\} =$$
$$= \left[4 \operatorname{sh}\left(\frac{\hbar\omega_1\zeta}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\hbar\omega_2\zeta}{2}\right)\right]^{-1} \qquad (15)$$

и вводя $\zeta = \beta\xi$, получим из (14) и (15)

$$\frac{G(T=0)}{G_0} = \frac{1}{8i\beta} \times \\ \times \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{\varepsilon\zeta} d\zeta}{\sin(\pi\zeta/\beta) \operatorname{sh}(\hbar\omega_1\zeta/2) \operatorname{sh}(\hbar\omega_2\zeta/2)}. \tag{16}$$

Интеграл в (16) можно вычислить, используя контур, замкнутый в левой полуплоскости. Суммируя вычеты внутри контура, получим

$$\frac{G(T=0)}{G_0} = \frac{\pi}{4\beta} \times \\ \times \sum_i \operatorname{res}\left[\frac{e^{\varepsilon z}}{\sin(\pi z/\beta) \operatorname{sh}(\hbar\omega_1 z/2) \operatorname{sh}(\hbar\omega_2 z/2)}, z_k\right]. \tag{17}$$

Подынтегральная функция в (16) имеет полюс третьего порядка в нуле и в случае несоизмеримых частот простые полюсы в точках $z_i = \{2\pi ni/\hbar\omega_1, 2\pi mi/\hbar\omega_2,\ k\beta\}$, $n, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $k = -1, -2, \ldots$.

После простых, но довольно громоздких вычислений найдем

$$\frac{G(T=0)}{G_0} = \frac{1}{6\omega_1\omega_2}\left[\frac{3(E-V_0)^2}{\hbar^2} + \frac{\Omega^2-\omega_1^2-\omega_2^2}{4}\right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\exp[-2\pi k(E-V_0)/\hbar\Omega]}{4\operatorname{sh}(\pi k\omega_1/\Omega)\operatorname{sh}(\pi k\omega_2/\Omega)} + \\ + \frac{\Omega}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{\omega_1}\frac{\cos[2\pi n(E-V_0)/\hbar\omega_1]}{\sin(\pi n\omega_2/\omega_1)\operatorname{sh}(\pi n\Omega/\omega_1)} + \\ + \frac{1}{\omega_2}\frac{\cos[2\pi n(E-V_0)/\hbar\omega_2]}{\sin(\pi n\omega_1/\omega_2)\operatorname{sh}(\pi n\Omega/\omega_2)}\right]. \tag{18}$$

Выражение (18) теряет смысл при соизмеримых значениях гибридных частот (в этом случае некоторые из полюсов, лежащих на мнимой оси, имеют кратность больше единицы). Однако, поскольку вещественное число с вероятностью единица иррационально, ниже будем считать, что частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы. Отметим, что даже для несоизмеримых частот вопрос о сходимости рядов Фурье в (18) должен исследоваться отдельно, так как входящие в знаменатель множители $\sin(\pi n\omega_2/\omega_1)$ и $\sin(\pi n\omega_1/\omega_2)$ могут быть малыми. Эта проблема аналогична проблеме малых знаменателей в небесной механике [13].

Используя подход, основанный на теории Колмогорова—Арнольда—Мозера [13], можно показать, что ряды в (18) сходятся равномерно, если для частот выполняется диофантово условие несоизмеримости (это условие реализуется с вероятностью единица).

Для нахождения температурной зависимости кондактанса микросужения воспользуемся формулами (6) и (18). После несложных вычислений получим

$$\frac{G(T)}{G_0} = G^{mon} + G^{osc}. \tag{19}$$

Здесь

$$G^{mon} = \frac{1}{6\omega_1\omega_2}\left[\left(\frac{\Omega^2-\omega_1^2-\omega_2^2}{4} + \frac{3V_0^2}{\hbar^2}\right)\times \\ \times\left[1+\exp\left(-\frac{\mu}{T}\right)\right]^{-1} - \frac{6V_0T}{\hbar^2}F_0\left(\frac{\mu}{T}\right) + \frac{6T^2}{\hbar^2}F_1\left(\frac{\mu}{T}\right)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\exp[-2\pi k(\mu-V_0)/\hbar\Omega]}{4\operatorname{sh}(\pi k\omega_1/\Omega)\operatorname{sh}(\pi k\omega_2/\Omega)}\times \\ \times\left(1+\frac{2}{3}\,\frac{\pi^4k^2T^2}{\hbar^2\Omega^2}\right),$$

$$G^{osc} = \frac{\pi^2\Omega T}{\hbar\omega_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times \\ \times\left[\frac{n\cos[2\pi n(\mu-V_0)/\hbar\omega_1]}{\operatorname{sh}(2\pi^2nT/\hbar\omega_1)\sin(\pi n\omega_2/\omega_1)\operatorname{sh}(\pi n\Omega/\omega_1)} + \\ + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\frac{n\cos[2\pi n(\mu-V_0)/\hbar\omega_2]}{\operatorname{sh}(2\pi^2nT/\hbar\omega_2)\sin(\pi n\omega_1/\omega_2)\operatorname{sh}(\pi n\Omega/\omega_2)}\right],$$

где F_0 и F_1 — интегралы Ферми.

Формула (19) дает разложение кондактанса сужения в ряд Фурье. Ряд Фурье в (19) дает осциллирующую часть кондактанса, а первое слагаемое дает монотонную часть кондактанса. Эта формула является в некотором смысле аналогом формулы Ландау для магнитного отклика электронного газа, которая описывает эффект де Гааза—Ван Альфена. Графики, построенные по формуле (19) для различных углов φ и θ, показаны на рис. 2 и 3.

В отличие от стартовых формул (6) и (7), использованных в [7] для численного анализа, формула (19) пригодна для аналитического исследования кондактанса. В частности, из нее видно, что роль эффективной длины сужения в магнитном поле (определяемой через частоту Ω) полностью аналогична роли температуры. С уменьшением эффективной длины сужения (с ростом Ω) ступени квантования размываются сильнее и в конце концов могут исчезнуть совсем.

Как следует из (19), осциллирующая часть кондактанса G^{osc} имеет максимумы в точках где $\mu - V_0 = \hbar\omega_{1,2}(n+1/2)$. Эти максимумы обусловлены пересечением уровней E_{nm} с энергией

$\mu - V_0$ и являются проявлением аналога эффекта Шубникова—де Гааза в кондактансе.

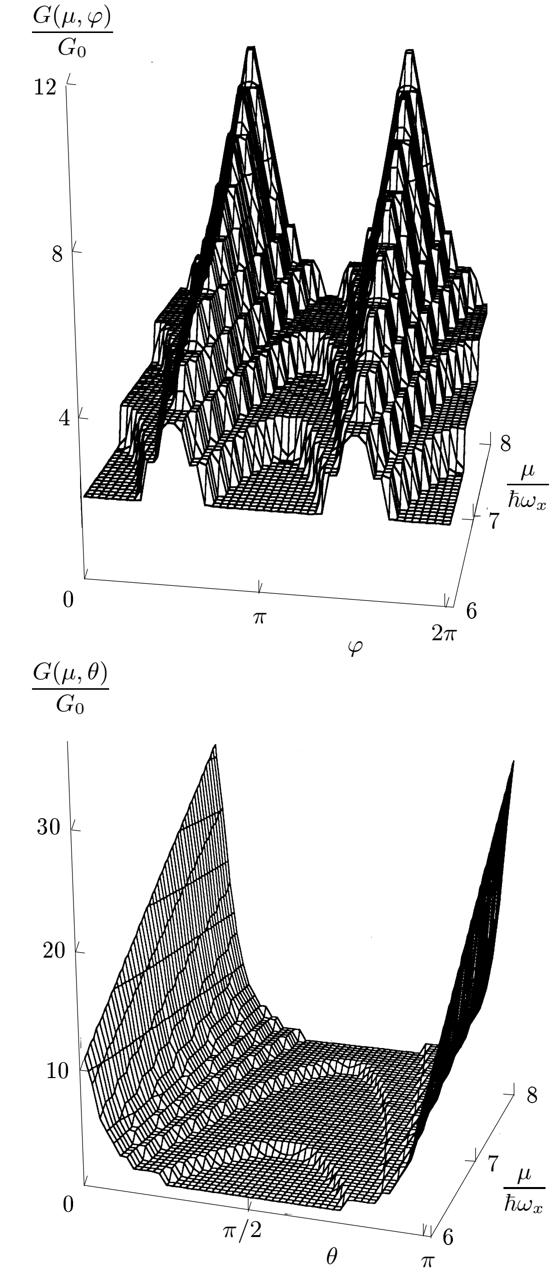
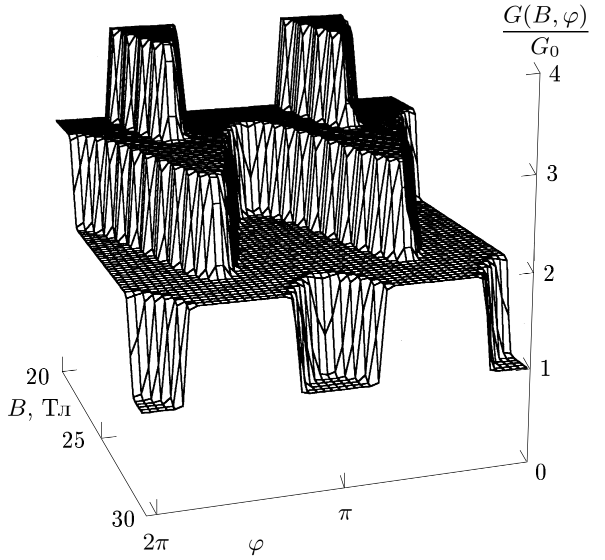


Рис. 2. Зависимости кондактанса от химического потенциала $\mu = E$ и от направления магнитного поля, задаваемого полярным φ и азимутальным θ углами; $\omega_x = 1.61 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, $\omega_y = 0.61 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, $\omega_x/\omega_z = 20$, $B = 25$ Тл, $V_0 = 0.6 \cdot 10^{-13}$ эрг, $\varphi_0, \theta_0 = \pi/5.578$, $T = 0.5$ К

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВОЙ КОНДАКТАНСА

Монотонная часть кондактанса G^{mon}, как следует из (18) и (19), имеет почти параболическую (при $T \neq 0$) форму. Осциллирующая часть состоит из почти треугольных пиков, сглаженных за счет тем-



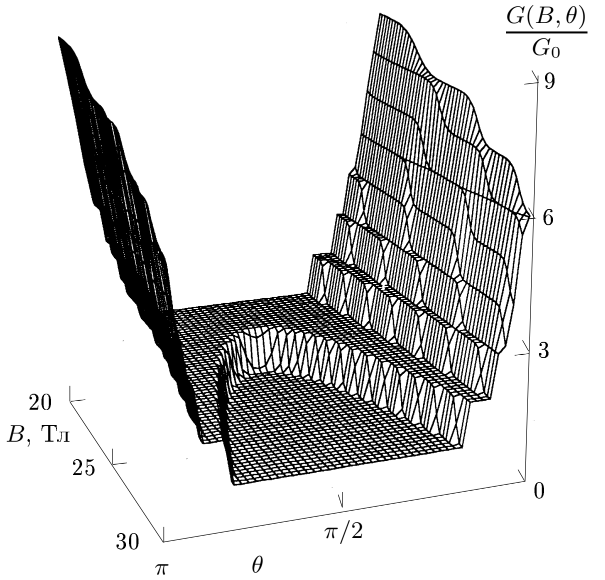


Рис. 3. Зависимости кондактанса от величины B и от направления магнитного поля, задаваемого полярным φ и азимутальным θ углами; $\omega_x = 1.61 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, $\omega_y = 1 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, $\omega_x/\omega_z = 20$, $\mu = 1.05 \cdot 10^{-13}$ эрг, $V_0 = 0.5 \cdot 10^{-13}$ эрг, $\varphi_0, \theta_0 = \pi/5.578$, $T = 0.5$ K

пературы и конечности длины сужения. Сложение этих двух кривых и дает ступенчатую структуру кривой $G(\mu)$. Интересно отметить следующее. Сглаживание G^{osc} при $T \neq 0$ определяется произведением двух множителей, $\operatorname{sh}(2\pi^2 nT/\hbar\omega_j)\operatorname{sh}(\pi n\Omega/\omega_j)$, каждый из которых оказывает влияние на форму осцилляций. Однако если длина сужения достаточно велика, то рост первого множителя с температурой может компенсироваться малостью второго в такой степени, чтобы квантование кондактанса наблюдалось и при достаточно высоких температурах. Таким образом, формула (19) позволяет, по-видимому, объяснить возможность наблюдения квантования кондактанса в $3D$-сужениях даже при достаточно высоких температурах, о которых сообщалось в [5, 6, 8].

4.1. Продольное поле

В этом случае гибридные частоты ω_j имеют вид [7]

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\omega_c^2 + (\omega_x + \omega_y)^2} \pm \pm \sqrt{\omega_c^2 + (\omega_x - \omega_y)^2}\right], \quad \Omega = \omega_z. \qquad (20)$$

В простейшем случае, когда сечение симметрично, а магнитное поле слабо, $\omega_c \ll \omega_x = \omega_y = \omega_0$, эти частоты с точностью до членов порядка $O(\omega_c/\omega_0)$ можно представить в виде $\omega_{1,2} \sim \omega_0 \pm \omega_c/2$. Введем эффективный радиус сечения по формуле

$$\mu - V_0 = \frac{m^* \omega_1 \omega_2 R_{eff}^2}{2}. \qquad (21)$$

Поток магнитного поля через сечение с этим радиусом равен $\Phi = \pi B R_{eff}^2$. Следовательно, $\mu - V_0 = (\hbar\omega_1\omega_2/\omega_c)\Phi/\Phi_0$, где $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e$ — квант магнитного потока. Поэтому

$$\frac{\mu - V_0}{\hbar\omega_{1,2}} = \frac{m^*\omega_0 R_{eff}^2}{2\hbar} \mp \frac{\Phi}{2\Phi_0}. \qquad (22)$$

Подставляя (22) в (19) и отбрасывая члены высшего порядка малости по ω_c/ω_0 (учитывая, что $\omega_1/\omega_2 \simeq 1 + \omega_c/\omega_0$, $\omega_2/\omega_1 \simeq 1 - \omega_c/\omega_0$), получим для осциллирующей части кондактанса $3D$-сужения выражение

$$\frac{G^{osc}}{G_0} \simeq \frac{2\pi^2\Omega T}{\hbar\omega_0^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(m\omega_0 R_{eff}^2 \pi n/\hbar)\sin(\pi n\Phi/\Phi_0)}{\sin(\pi n\omega_c/\omega_0)\operatorname{sh}(2\pi^2 nT/\hbar\omega_0)\operatorname{sh}(\pi n\Omega/\omega_0)}. \qquad (23)$$

Как видно из (23), кондактанс испытывает в этом случае осцилляции типа Ааронова—Бома. Если не учитывать слабой зависимости коэффициентов Фурье от магнитного поля (осцилляции почти периодические), то период будет равен двум квантам потока (рис. 4*a*).

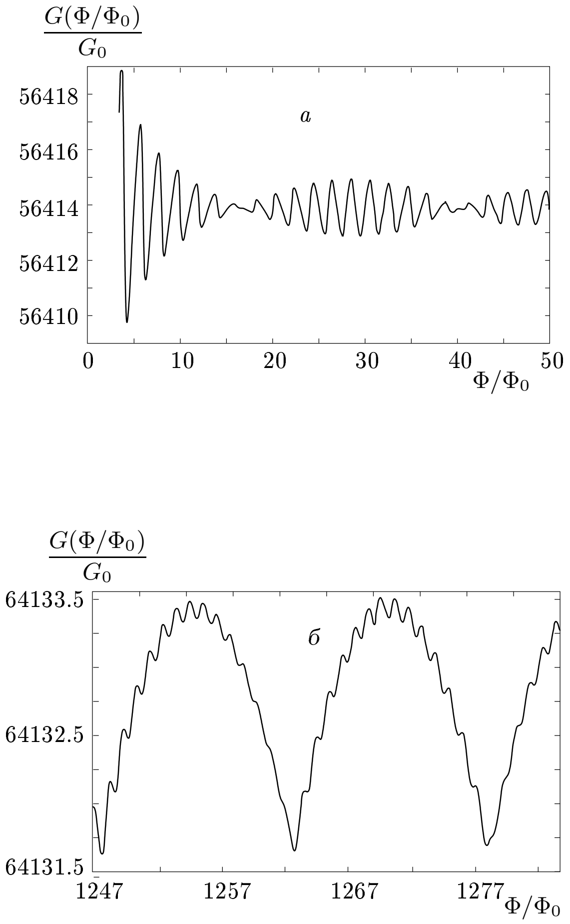


Рис. 4. Зависимости кондактанса от магнитного потока Φ/Φ_0 в случаях слабого (*а*) и сильного (*б*) продольно ориентированных магнитных полей; $\omega_x = 0.161 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, $\omega_y = 0.161 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, $\omega_x/\omega_z = 20$, $\mu = 6.2 \cdot 10^{-13}$ эрг, $V_0 = 0.5 \cdot 10^{-13}$ эрг, $T = 0.6$ К

В случае сильного поля ($\omega_c \gg \omega_0$) для симметричной структуры из (20) следует оценка $\omega_1 \simeq \omega_c$, $\omega_2 = \omega_0^2/\omega_c \ll \omega_1$. При этом второе слагаемое в осциллирующей части (19) из-за большой величины $\mathrm{sh}(2\pi^2 nT/\hbar\omega_2)$ становится значительно меньше первого, и им можно пренебречь. Тогда основной вклад в G^{osc} дает первое слагаемое с числителем $\propto \cos[2\pi n(\mu - V_0)/\hbar\omega_c]$. Это слагаемое дает осцилляции Шубникова—де Гааза в кондактансе с большой частотой и с периодом по обратному магнитному полю $\Delta(1/B) = e\hbar/m^*c(\mu - V_0)$. Для доказательства существования осцилляций Ааронова—Бома в области сильных ($\omega_c \gg \omega_0$) магнитных полей введем число квантов потока $\eta = \Phi/\Phi_0$ в формулу для осциллирующей части кондактанса (19). Тогда получим

$$\frac{G^{osc}}{G_0} = \frac{\pi^2 \Omega T}{\hbar\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \times \\ \times \left\{ \frac{\cos(2\pi n\eta\omega_2/\omega_c)}{\sin(\pi n\omega_2/\omega_1)\,\mathrm{sh}(2\pi^2 nT/\hbar\omega_1)\,\mathrm{sh}(\pi n\Omega/\omega_1)} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \frac{\cos(2\pi n\eta\omega_1/\omega_c)}{\sin(\pi n\omega_1/\omega_2)\,\mathrm{sh}(2\pi^2 nT/\hbar\omega_2)\,\mathrm{sh}(\pi n\Omega/\omega_2)} \right\}. \tag{24}$$

Гиперболические синусы, стоящие в знаменателях в этой формуле, дают только размытие осцилляционных пиков, поэтому ниже мы ограничимся рассмотрением поведения двух функций:

$$f(\eta) = \frac{\cos(2\pi n\eta\omega_2/\omega_c)}{\sin(\pi n\omega_2/\omega_1)}, \\ g(\eta) = \frac{\cos(2\pi n\eta\omega_1/\omega_c)}{\sin(\pi n\omega_1/\omega_2)}. \tag{25}$$

Далее мы покажем, что именно эти множители дают осцилляции каждого члена ряда в (24). Приравняем нулю производную по числу квантов потока η от этих множителей и найдем уравнения для точек экстремумов функций $f(\eta)$ и $g(\eta)$, учитывая, что частоты несоизмеримы, $\sin(\pi n\omega_1/\omega_2) \neq 0$ и $\sin(\pi n\omega_2/\omega_1) \neq 0$, тогда

$$\sin(2\pi n\eta\omega_1/\omega_c)\sin(\pi n\omega_1/\omega_2) = \\ = (-\omega_c/\eta\omega_2)\cos(2\pi n\eta\omega_2/\omega_c)\cos(\pi n\omega_2/\omega_1), \\ \sin(2\pi n\eta\omega_2/\omega_c)\sin(\pi n\omega_2/\omega_1) = \\ = (-\omega_c/\eta\omega_1)\cos(2\pi n\eta\omega_1/\omega_c)\cos(\pi n\omega_1/\omega_2). \tag{26}$$

Учтем, что $\omega_c/\eta\omega_1 = \hbar\omega_2/\mu - V_0$ и $\omega_c/\eta\omega_2 = \hbar\omega_1/\mu - V_0$. Отсюда следует, что в формуле (26) $\sin(2\pi n\eta\omega_{1,2}/\omega_c) \ll 1$. Тогда имеем оценку для точек экстремумов:

$$\sin(2\pi n\eta\omega_2/\omega_c) \approx 0, \\ \sin(2\pi n\eta + 2\pi n\eta\omega_2/\omega_c) \approx 0. \tag{27}$$

При получении (27) учтено, что $\omega_1 = \omega_2 + \omega_c$ и частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы. Первое из соотношений (27) дает в точках экстремумов

$$\frac{\mu - V_0}{\hbar\omega_1} = N, \quad N = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Поскольку в области сильных полей $\omega_1 \approx \omega_c$, эти экстремумы соответствуют осцилляциям Шубникова—де Гааза в кондактансе. Эти осцилляции обусловлены вторым слагаемым в фигурных скобках (24).

Рассмотрим вблизи экстремумов осцилляций Шубникова—де Гааза, $\omega_2\eta/\omega_c = N$, второе из соотношений (27). Из него следует, что при целых значениях η также имеются экстремумы, которые соответствуют осцилляциям малого первого слагаемого в осциллирующей части (24). Расстояние между соседними максимумами в этом случае равно кванту потока ($\Delta\eta = 1$). Вдали от экстремумов осцилляций Шубникова—де Гааза эти осцилляции также имеют место, но периодичность по потоку разрушается. Таким образом, первый ряд в (24) дает осцилляции Ааронова—Бома в кондактансе. Отметим, что, как следует из (24), величина амплитуды этих осцилляций в ω_1^2/ω_2^2 раз меньше, чем амплитуда осцилляций Шубникова—де Гааза, поэтому с ростом поля амплитуды осцилляций Ааронова—Бома уменьшаются как B^2, и для достаточно сильных полей эти осцилляции полностью размываются температурой. Осцилляции Ааронова—Бома, таким образом, накладываются на осцилляции Шубникова—де Гааза и дают тонкую структуру максимумов (рис. 4*б*).

4.2. Поперечное поле

В случае поперечного магнитного поля $\omega_2 = \omega_0$, поэтому второй из рядов в общем выражении (19) для кондактанса не дает осцилляций по магнитному полю в кондактансе. Если магнитное поле **B** слабо ($\omega_c \ll \omega_0$), то, как показано в [7], частоты ω_1 и Ω удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 + O\left(\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2+\omega_z^2}\right), \\ \Omega &= \omega_z + O\left(\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2+\omega_z^2}\right). \end{aligned} \tag{29}$$

В связи с тем что $\omega_1 \approx \omega_0$, осцилляции по полю первого из рядов в (19) очень малы и размываются температурой. В сильном магнитном поле $\omega_1 \simeq \omega_c$, $\Omega \simeq \omega_z\omega_0/\omega_c$ [7], поэтому осцилляций Ааронова—Бома в этом случае нет, а осцилляции Шубникова—де Гааза малы (их амплитуды в ω_0^2/ω_c^2 раз меньше, чем в случае продольного поля) и также размываются температурой. Отметим, что с ростом поля уменьшается величина Ω, а следовательно, увеличивается эффективная длина $l_{eff} = \sqrt{\hbar/m^*\Omega}$ сужения [7]. Как следует из (19), при этом уменьшаются с ростом поля множители $\operatorname{sh}(\pi n\Omega/\omega_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, уменьшается сглаживание осциллирующей части кондактанса в (19), происходящее за счет конечности длины сужения. Таким образом, сильное поперечное магнитное поле улучшает ступенчатую структуру кривой квантования кондактанса $G(\mu)/G_0$.

Отметим, что в слабом поле кривая $G(\mu)/G_0$ очень схожа с кривой в отсутствие поля, когда частоты ω_x и ω_y близки друг к другу, но не равны между собой. Это связано с тем, как отмечалось во Введении, что при $\omega_x = \omega_y = \omega_0$ высота ступеней квантования кондактанса пропорциональна кратности вырождения уровней, а слабое магнитное поле приводит к небольшой эффективной асимметрии сужения и снимает это вырождение (высота ступеней становится равной кванту кондактанса).

4.3. Эффекты, связанные с изменением направления поля

Как следует из графиков на рис. 1, величины частот ω_1, ω_2 и Ω зависят от ориентации поля **B** относительно осей симметрии микросужения (углов θ и φ). В связи со сказанным выше ясно, что при изменении углов θ и φ (при постоянной величине $|\mathbf{B}|$) изменяется характер транспортного режима электронов в сужении.

На рис. 2 и 3 показаны зависимости $G(\varphi)/G_0$ и $G(\theta)/G_0$, в которых проявляется ступенчатая структура кондактанса.

В области слабых магнитных полей ($\omega_c^2 \ll \omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2$) можно найти явную зависимость частот $\omega_{1,2}$ и Ω от углов θ и φ. Для этого положим в уравнении (11) $\xi_{1,2} = -\omega_{x,y}^2 + \varepsilon_{1,2}$ и $\xi_3 = \omega_z^2 + \varepsilon_3$. Используя известную связь между коэффициентами и корнями кубического уравнения и отбрасывая малые члены порядка ε_j^2 и ε_j^3, получим систему линейных уравнений для нахождения ε_j. Отметим, что пренебрегать членами порядка ε_j^2 нельзя, если $\omega_x \approx \omega_y$.

Система уравнений для нахождения ε_j имеет вид

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = \omega_c^2, \\ &\varepsilon_1\omega_z^2\omega_y^2+\varepsilon_2\omega_z^2\omega_x^2-\varepsilon_3\omega_x^2\omega_y^2 = 0, \\ &(\omega_z^2-\omega_y^2)\varepsilon_1+(\omega_z^2-\omega_x^2)\varepsilon_2-(\omega_x^2-\omega_y^2)\varepsilon_3 = a, \end{aligned} \tag{30}$$

где $a = \omega_{cx}^2\omega_x^2+\omega_{cy}^2\omega_y^2-\omega_{cz}^2\omega_z^2$. Решением этой системы является $\varepsilon = \Delta_j/\Delta$, $j = 1, 2, 3$, где

$$\begin{aligned} &\Delta = -(\omega_x^2+\omega_y^2)\omega_z^4-(\omega_x^2+\omega_z^2)\omega_y^4-(\omega_y^2+\omega_z^2)\omega_x^4, \\ &\Delta_1 = -\omega_x^2(\omega_y^2+\omega_z^2)(\omega_c^2\omega_x^2+a), \\ &\Delta_2 = \omega_y^2(\omega_x^2+\omega_z^2)(\omega_c^2\omega_y^2+a), \\ &\Delta_3 = \omega_z^2(\omega_x^2-\omega_y^2)(\omega_c^2\omega_z^2+a). \end{aligned} \tag{31}$$

Из сказанного выше вытекает оценка

$$\omega_1 = \sqrt{\left|\omega_x^2 - \frac{\Delta_1}{2\Delta}\right|},$$
$$\omega_2 = \sqrt{\left|\omega_y^2 - \frac{\Delta_2}{2\Delta}\right|}, \qquad (32)$$
$$\Omega = \sqrt{\left|\omega_z^2 + \frac{\Delta_3}{2\Delta}\right|}.$$

Отметим, что Δ не зависит от углов θ и φ, а зависимость от углов в Δ_j определяется величиной a, которая зависит от углов по формуле

$$a = (\omega_x^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + \omega_y^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta - \\ - \omega_z^2 \cos^2\theta)\omega_c^2. \qquad (33)$$

В случае сильного поля ($\omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2 \ll \omega_c^2$) уравнение (11) удобно записать в виде

$$\xi^3 + a\xi^2 + b\xi = \varepsilon, \qquad (34)$$

где

$$a = \omega_c^2 + \omega_x^2 + \omega_y^2 - \omega_z^2, \quad \varepsilon = \omega_x^2\omega_y^2\omega_z^2,$$
$$b = \omega_x^2\omega_y^2 - \omega_y^2\omega_z^2 - \omega_x^2\omega_z^2 + \omega_{cx}^2\omega_x^2 + \omega_{cy}^2\omega_y^2 - \omega_{cz}^2\omega_z^2, \qquad (35)$$

и $a \gg b \gg \varepsilon$. Решение уравнения (34) можно найти асимптотическими методами, используя ряд Бурмана—Лагранжа. Тогда

$$\omega_1 = \sqrt{a - \frac{b}{a}} + O(\varepsilon), \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{|b|}{a}} + O(\varepsilon),$$
$$\Omega = \sqrt{\frac{\varepsilon}{|b|}} + O(\varepsilon^2). \qquad (36)$$

В формуле (36) от углов зависит только величина b:

$$b = \omega_x^2\omega_y^2 - \omega_x^2\omega_z^2 - \omega_y^2\omega_z^2 + (\omega_x^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + \\ + \omega_y^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta - \omega_z^2 \cos^2\theta)\omega_c^2. \qquad (37)$$

Заметим, что численные решения уравнения (11) хорошо согласуются с (32) в области слабых полей и с (36) в области сильных полей.

5. ВЫВОДЫ

Аналитическое исследование кондактанса микросужения, помещенного в произвольно направленное магнитное поле, проведенное в данной работе, объясняет различные транспортные режимы микросужения. При любой ориентации поля зависимость $G(\mu)$ имеет ступенчатую структуру. Высота каждой ступени равна кванту кондактанса. Температура и конечность длины микросужения приводят к смазыванию порогов ступеней. При этом, как следует из (19), величина $\hbar\Omega/2\pi$ играет точно такую же роль, что и температура.

В достаточно длинных сужениях (малая частота Ω) множители, характеризующие размазку порогов ступеней за счет температуры и конечной длины сужения, могут компенсировать друг друга. Этот эффект может приводить к ступенчатой структуре кондактанса даже при относительно высоких температурах. Ступенчатая структура кривой кондактанса $G(\mu)$ обусловлена сложением почти параболической монотонной части $G^{mon}(\mu)$ и состоящей из почти треугольных пиков осциллирующей части кондактанса $G^{osc}(\mu)$.

В произвольно ориентированном магнитном поле гибридные частоты $\omega_1, \omega_2, \Omega$ зависят от углов ориентации поля $\mathbf{B}$ относительно осей симметрии системы. Для случаев слабого и сильного полей найден явный вид этих зависимостей в разд. 4. Эти зависимости приводят к эффекту квантования кондактанса (рис. 3).

В случае продольного магнитного поля зависимость кондактанса от величины поля имеет осциллирующий характер. При этом транспортные режимы для слабого и сильного магнитных полей различны. Так, в слабом поле имеются осцилляции Ааронова—Бома с периодом равным двум квантам потока. Эти осцилляции хорошо проявляются в длинных сужениях (рис. 4*а*). В случае сильного поля осцилляции Ааронова—Бома также имеют место. Их период, однако, равен одному кванту потока. В сильном поле имеются также осцилляции Шубникова—де Гааза с периодом по обратному полю $\Delta(1/B) = e\hbar/m^*c(\mu - V_0)$. Осцилляции Шубникова—де Гааза имеют амплитуду в ω_1^2/ω_2^2 раз большую, чем осцилляции Ааронова—Бома. С ростом поля амплитуда осцилляций Ааронова—Бома уменьшается как B^2, и в области достаточно сильных полей они полностью размываются температурой. Осцилляции Ааронова—Бома в области сильных полей накладываются на осцилляции Шубникова—де Гааза и дают тонкую структуру максимумов этих осцилляций (рис. 4*б*).

Для случая слабого поперечного поля осцилляции по магнитному полю очень малы и легко размываются температурой и рассеянием, которое определяется эффективной длиной микросужения. В сильном поперечном поле осцилляций типа Ааронова—

Бома нет, а осцилляции Шубникова—де Гааза малы, так как их амплитуда в ω_1^2/ω_2^2 раз меньше, чем в случае продольного поля. С ростом поля в этом случае увеличивается эффективная длина микросужения и, следовательно, ухудшается ступенчатая структура кривой $G(\mu)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим преобразование Фурье функции $\varphi(t) = f(t)e^{xt}$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta)e^{i\xi(t-\eta)}d\eta. \tag{П.1}$$

Представим (П.1) в виде

$$f(t)e^{xt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\xi t}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{(x-i\xi)\eta}d\eta. \tag{П.2}$$

Введем $p = x - i\xi$, тогда

$$f(t)e^{xt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\xi t}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{p\eta}d\eta. \tag{П.3}$$

Обозначим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{p\eta}d\eta = F(p). \tag{П.4}$$

Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-t(x-i\xi)}F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} dp e^{-pt}F(p). \tag{П.5}$$

Из (П.5) следует, что

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{-pt}F(p)dp, \tag{П.6}$$

где функция $F(p)$ определена формулой (П.4). Выражение (П.6) является аналогом преобразования Меллина. Используя соотношение [16]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}dx}{1+e^x} = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0 < \operatorname{Re} p < 1 \tag{П.7}$$

и формулы (П.4) и (П.6), получим формулу (13) из разд. 3:

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi p}e^{-px}dp, \tag{П.8}$$

где $\alpha = \operatorname{Re} p$.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования.

ЛИТЕРАТУРА

1. U. Landman, W. D. Luedtke, N. A. Burnham, and R. J. Colton, Science **248**, 454 (1990).
2. Е. Н. Богачек, А. М. Загоскин, И. О. Кулик, ФНТ **16**, 1404 (1990).
3. J. A. Torres, J. I. Pascual, and J. J. Saenz, Phys. Rev. B **49**, 16581 (1994).
4. E. N. Bogachek, M. Jonson, R. I. Shekhter, and T. Swahn, Phys. Rev. B **47**, 16635 (1993); **50**, 18341 (1994).
5. J. I. Pascual, J. Mendez, J. Gomez-Herrero, A. M. Baro, N. Garcia, and Vu Thien Binh, Phys. Rev. Lett. **71**, 1852 (1993).

6. J. I. Pascual, J. Mendez, J. Gomez-Herrero, A. M. Baro, N. Garcia, U. Landman, W. D. Luedtke, E. N. Bogachek, and H.-P. Cheng, Science **267**, 1793 (1995); J. Vac. Sci. Technol. B **13**, 1280 (1995).

7. A. G. Scherbakov, E. N. Bogachek, and Uzi Landman, Phys. Rev. B **53**, 4054 (1996).

8. L. Olesen, E. Laegsgaard, I. Stensgaard, F. Besenbacher, J. Schiotz, P. Stoltze, K. W. Jacobsen, and J. N. Norskov, Phys. Rev. Lett. **72**, 2251 (1994).

9. N. Agrait, J. G. Rodrigo, and S. Vieira, Phys. Rev. B **47**, 12345 (1993).

10. M. Büttiker, Phys. Rev. B **40**, 7906 (1990).

11. M. Büttiker, Semicond. Semimet. **35**, 19 (1992).

12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).

13. V. A. Geyler and V. A. Margulis, Phys. Rev. B **55**, 2543 (1997).

14. J. Williamson, Amer. J. Math. **58**, 141 (1936).

15. Q. P. Li, K. Karai, S. K. Yip, S. Das Sarma, and H. D. Drew, Phys. Rev. B **43**, 5151 (1991).

16. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Наука, Москва (1981).