

# КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА В РЕШЕТКЕ АНТИТОЧЕК: МАКРОСКОПИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

*Э. М. Баскин, М. В. Энтин\**

*Институт физики полупроводников  
Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 8 февраля 1999 г.

Изучается квантовый эффект Холла в  $2D$ -системе с антиточками. Предполагается, что размер антиточек велик по сравнению с квантовыми и релаксационными длинами. В этом приближении электрическое поле в системе описывается уравнением непрерывности. Найдено, что электрическое поле в системе без проводящих границ может быть выражено через такую же систему без магнитного поля. Решены конкретные задачи об электрическом поле и токе в структурах, содержащих одну или две антиточки, и в круглом диске с точечными контактами. Найдены эффективные холловская и продольная проводимости в образце, содержащем большое число случайно распределенных антиточек. В пределе нулевой локальной продольной проводимости эффективная продольная проводимость также обращается в нуль, а холловская проводимость совпадает с локальной. Получены поправки к тензору проводимости, обусловленные конечностью локальной проводимости. Изучен пробой квантового эффекта Холла в решетке антиточек на основании предположения, что большая плотность тока в узких местах системы ведет к перегреву электронов. Изучены локальная и нелокальная модели перегрева. Найдена высокочастотная эффективная проводимость системы с антиточками и сдвиг частоты циклотронного резонанса.

PACS: 73.40.Nm, 85.30.Vw, 76.40.+b2

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что к квантованию холловской проводимости и обращению в нуль дрейфовой проводимости приводят различные микроскопические подходы. Среди них — микроскопическое приближение, основанное на локальном соотношении между электрическим полем и плотностью тока, и подход, основанный на краевых токах, приписывающий квантовый эффект Холла (КЭХ) токам, текущим вдоль границ.

Стандартные микроскопические теории КЭХ базируются на выводе выражения для тензора проводимости в однородном электрическом поле и не учитывают пространственных флуктуаций внешнего электрического поля. В отличие от них, в некоторых недавних работах рассматривается квантование холловской проводимости как макроскопическое явление с использованием квантованной холловской

проводимости и нулевой дрейфовой проводимости идеальной системы в качестве нулевого приближения и решается задача о протекании тока в смеси холловского проводника и идеального металла [1] или в холловских проводниках на различных холловских плато [2, 3]. Этот подход приводит к так называемому «полукруговому соотношению» между холловской и дрейфовой компонентами, не содержащему постоянной Планка, правильно описывающему экспериментальные данные как для целого, так и для дробного эффекта Холла.

Макроскопический подход расширяет область применимости микроскопических теорий за счет учета пространственных вариаций приложенного электрического поля. Таким образом, главный результат «выживает» независимо от наличия границ, смешивания холловских фаз и т.д. Тем не менее остается вопрос, каковы пределы холловского квантования?

Цель настоящей статьи состоит в исследовании электрических полей и токов в неоднородной дву-

\*E-mail: Entin@isp.nsc.ru

мерной системе в режиме квантового эффекта Холла. Будем рассматривать эту систему как смесь однородного холловского проводника и изолирующей фазы, пренебрегая длиной экранирования. Такой подход, например, применим к КХ-системе с сильным легированием и компенсацией, в которой изолирующие области формируются за счет случайно уменьшенной плотности доноров. В частности, в квантовом пределе единственного частично заполненного уровня Ландау систему можно рассматривать как смесь изолирующих областей, где первый уровень Ландау пуст, и холловского изолятора, где первый уровень Ландау полностью заполнен. Другим примером являются искусственно структурированные системы — решетки антиточек, в которых проблема распределения плотности тока имеет независимое значение, в частности, в задаче о пробое КЭХ [4].

Метод базируется на отображении этой системы на аналогичный проводник без магнитного поля. Будет показано, что пространственное распределение электрического поля в проводнике с магнитным полем и без магнитного поля с такой же геометрией оказывается одинаковым. Продольные и поперечные эффективные проводимости выражаются через эффективную проводимость системы без магнитного поля. Если холловская фаза связна, то в пределе идеального холловского изолятора,  $\sigma_{xx} \rightarrow 0$ , эффективная проводимость также обращается в нуль.

Известно, что большая плотность тока приводит к пробое КЭХ. Найдем порог пробоя в решетке антиточек, экспериментально изученный в работе [4].

Полученные формулы для проводимости применимы также в пределе высокочастотного поля. Будет рассмотрено поглощение электромагнитного поля в решетке антиточек и найден сдвиг линии циклотронного резонанса.

## 2. ИДЕАЛЬНЫЙ ХОЛЛОВСКИЙ ИЗОЛЯТОР С ИЗОЛИРУЮЩИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Вначале рассмотрим смесь холловского диэлектрика и обычного диэлектрика. В холловской фазе выражение для тока имеет вид

$$\mathbf{j} = \sigma_{xx} \nabla \phi + \sigma_{xy} \mathbf{e}_B \times \nabla \phi, \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_B$  — орт магнитного поля. В пределе холловского диэлектрика  $\sigma_{xx} \rightarrow 0$ . Тем не менее в формуле (1) мы сохраняем  $\sigma_{xx}$ , чтобы определить потенциал  $\phi$ . Можно, например, считать продольную проводимость малой, но конечной из-за конечности температуры.

Из уравнения непрерывности  $\nabla \mathbf{j} = 0$  следует, что

$$\sigma_{xx} \Delta \phi = 0. \quad (2)$$

Граничные условия на границе холловского и обычного изоляторов с нормалью  $\mathbf{n}$  со стороны холловского изолятора имеют вид  $\mathbf{j} \mathbf{n} = 0$ . В пределе  $\sigma_{xx} \rightarrow 0$  граничные условия дают

$$\mathbf{n} \times \nabla \phi_0 = 0. \quad (3)$$

Последнее выражение не содержит  $\sigma_{xx}$ . Потенциал является гармонической функцией с нулевым тангенциальным полем на границе изолятора. Следовательно, обычный изолятор в холловском изоляторе может трактоваться как идеальный проводник, вставленный в проводящую среду.

Рассмотрим случайную в среднем однородную бесконечную среду, состоящую из холловского изолятора + включения из обычного изолятора со средним полем, направленным по оси  $y$   $\overline{\nabla \phi_0} = (0, \overline{E}_y)$ . (Чертой обозначено усреднение по площади:  $\overline{A} = \int A dS/S$ .)

Эффективная холловская проводимость определяется как

$$\sigma_{xy}^{eff} = \frac{\overline{j_x}}{\overline{\nabla_y \phi_0}} = \sigma_{xy} \frac{Hall}{\int \nabla_y \phi_0 dS}. \quad (4)$$

Индекс «Hall» означает, что интегрирование идет только по холловской фазе. Предположим, что изолирующая фаза состоит из замкнутых несвязанных областей. Поскольку потенциал на их границах постоянен, интеграл от поля по изолятору обращается в нуль:

$$\begin{aligned} \int_{ins} \nabla_y \phi_0 dS &= \int dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \nabla_y \phi_0 = \\ &= \int dx (\phi_0(y_2(x)) - \phi_0(y_1(x))) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно, числитель и знаменатель в (4) совпадают и  $\sigma_{xy}^{eff} = \sigma_{xy}$ . Это доказывает стабильность холловских плато по отношению к появлению изолирующих включений: эффективная проводимость не меняется, пока изолирующая фаза не образует бесконечную связную область, разрывающую холловскую фазу на несвязные области.

### 3. ХОЛЛОВСКИЙ ПРОВОДНИК С ИЗОЛИРУЮЩИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Ниже мы изучим задачу о конечном  $\sigma_{xx}$ . Рассмотрим аналитическую функцию  $w = \phi_0 + i\psi_0$ , где  $\phi_0$  и  $\psi_0$  удовлетворяют условиям Коши—Римана:

$$\nabla_x \phi_0 = \nabla_y \psi_0, \quad \nabla_y \phi_0 = -\nabla_x \psi_0. \quad (6)$$

В терминах дуального потенциала  $\psi_0$

$$\Delta \psi_0 = 0, \quad \mathbf{n} \nabla \psi_0 = 0, \quad \int \nabla_y \psi_0 dS = 0. \quad (7)$$

Если применить соотношение (7) к выражению для тока  $\mathbf{j} = \sigma \nabla \psi$ , они соответствуют продольной проводимости среды с локальной продольной проводимостью  $\sigma$ , содержащей изолирующие включения в отсутствие магнитного поля.

Выразим электрическое поле и плотность тока через решение задачи без магнитного поля. Пусть функция  $\phi$  определяется уравнением

$$\phi = \phi_0 \sin \alpha + \psi_0 \cos \alpha = \text{Im}(e^{i\alpha} w). \quad (8)$$

Функция  $\phi$  удовлетворяет граничным условиям  $\mathbf{n} \mathbf{j} = 0$  с  $\mathbf{j}$  из (1), если угол  $\alpha$  есть

$$\cos \alpha = \frac{\sigma_{xx}}{\sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}}, \quad 0 < \alpha < \pi/2. \quad (9)$$

В результате решение  $\phi$  граничной задачи с магнитным полем  $B$  отличается от решения в отсутствие магнитного поля,  $\psi_0$ , поворотом электрического поля в любой точке на угол  $\alpha$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, B) = \hat{U}(\alpha) \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0),$$

где  $\hat{U}(\alpha)$  — матрица вращения на угол  $\alpha$ .

Рассмотрим граничную задачу с заданным электрическим полем на бесконечности  $\mathbf{E}(\infty)$ . Электрическое поле в точке  $\mathbf{r}$  связано с  $\mathbf{E}(\infty)$  линейным преобразованием  $\hat{G}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{G} \mathbf{E}(\infty).$$

Преобразуя поле в точке  $\mathbf{r}$  и на бесконечности, найдем, что

$$\hat{G}|_B = \hat{U}(\alpha) \hat{G}|_{B=0} \hat{U}(-\alpha), \quad (10)$$

т. е. нужно повернуть внешние граничные условия на угол  $-\alpha$ , затем решить уравнение в отсутствие магнитного поля и повернуть полученное электрическое поле на угол  $\alpha$ .

Постановка задачи с заданным электрическим полем на бесконечности предполагает, что образец не имеет границ, а все неоднородности расположены в ограниченной области. В задаче об эффективных свойствах среды роль граничного условия на бесконечности выполняет задание среднего поля. Следовательно, соотношение (10) определяет также соотношение между локальным и средним полями.

Нетрудно видеть, что плотность тока является потенциальным полем с потенциалом  $\sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \psi_0$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \hat{U}(-\alpha) \mathbf{E}(\mathbf{r}, B) = \\ &= \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \hat{U}(-\alpha) \hat{U}(\alpha) \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \\ &= \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \nabla \psi_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Как (11), так и граничные условия для тока на границе изолятора не содержат магнитного поля. Следовательно, магнитное поле не влияет на локальную плотность тока в задачах: а) с заданной плотностью тока на бесконечности и б) с фиксированным средним током в образце без границ.

Отметим, что эти следствия нужно использовать с осторожностью. Например, они неприменимы к случаю образца с металлическими контактами, нарушающими условия теоремы.

Случай а) применим для описания обтекания током ограниченного числа изолирующих включений в холловский проводник. Случай б) применим для описания тока в микроструктурах с точечными контактами и к большой статистически-однородной системе, содержащей изолирующие включения.

### 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ВОКРУГ ОДНОЙ И ДВУХ АНТИТОЧЕК

Ниже обсудим различные следствия из предложенного метода. Проекция задачи о токе и электрическом поле в режиме КЭХ на задачу в нулевом магнитном поле позволяет найти поля и токи в различных геометриях, которые можно решить с помощью конформных отображений. Например, рассмотрим распределение полей вокруг одной и двух антиточек с радиусами  $a$ . В первом случае электрическое поле

$$E(z) = E_x + iE_y$$

определяется выражением

$$E^*(z) = E^*(\infty) - E(\infty) e^{-2i\alpha} a^2/z^2. \quad (12)$$

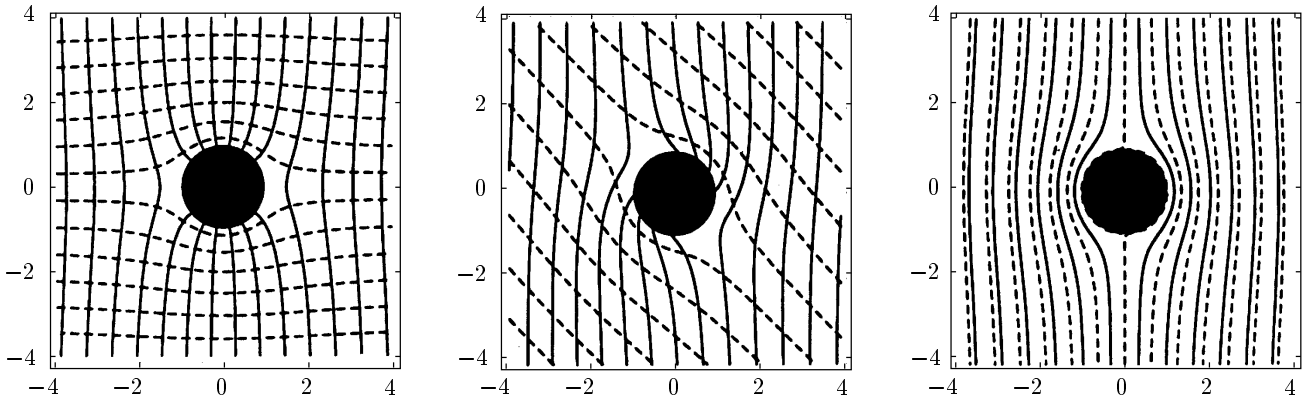


Рис. 1. Эквипотенциальные линии (сплошные) и линии тока (штриховые) вокруг одной антиточки (черный кружок). Среднее электрическое поле имеет направление  $x$ . Значения углов Холла слева направо:  $0$  ( $B = 0$ ),  $\pi/4$  и  $\pi/2$  (холловское плато)

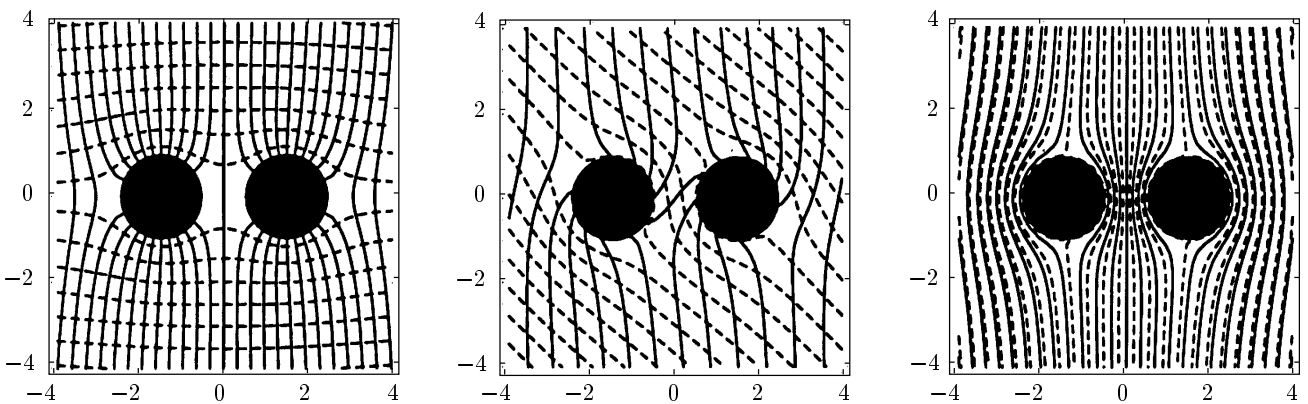


Рис. 2. То же самое, что на рис. 1 с двумя антиточками

Случай двух близких антиточек важен для объяснения пробоя КЭХ в решетках антиточек [4], который приписывается концентрации плотности тока между антиточками. Решение может быть найдено аналогично [5]. Конформное отображение двух кругов с центрами  $\pm(a + \delta)$  на кольцо  $1/R < |w| < R$  в комплексной  $w$ -плоскости,

$$R = \frac{\sqrt{2a + \delta} + \sqrt{\delta}}{\sqrt{2a + \delta} - \sqrt{\delta}},$$

дается выражением

$$w = \frac{z + b}{z - b}, \quad b = \sqrt{2a\delta + \delta^2}. \quad (13)$$

Граничное условие на бесконечности для электрического поля преобразуется в потенциал диполя в точке  $w = 1$ . Электрическое поле определяется вы-

ражением

$$E^* = 4b^2 \left[ E^*(\infty) \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{R^{4n}}{(R^{4n}(z - b) - z - b)^2} - E(\infty)e^{-2i\alpha} \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{R^{4n+2}}{(R^{4n+2}(z - b) - z - b)^2} \right]. \quad (14)$$

В ситуации близких антиточек,  $\delta \ll a$ , самое сильное поле и плотность тока достигаются вблизи точки  $z = 0$ . В этой точке

$$E(0) = \sqrt{a/2\delta} (E^*(\infty) - e^{-2i\alpha} E(\infty))$$

расходится вместе с  $\delta \rightarrow 0$ .

На рис. 1 и 2 показаны эквипотенциальные линии и линии тока вокруг одной и двух антиточек в случаях, когда  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \pi/4$  и  $\alpha = \pi/2$ . Применительно к проблеме КЭХ можно считать, что в режиме холловского плато  $\sigma_{xx} \rightarrow 0$ , а в максимуме

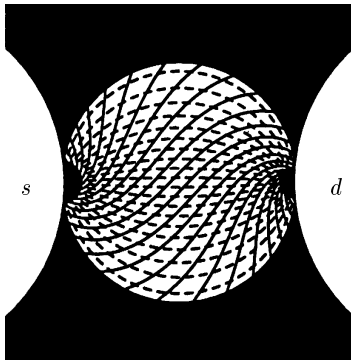


Рис. 3. Распределение тока и поля в большой круглой квантовой точке с двумя туннельными контактами. Угол Холла равен  $\pi/4$

$\sigma_{xx} \sim \sigma_{xy}$ , т. е. угол  $\alpha$  при прохождении максимума изменяется от 0 к величине  $\sim \pi/4$  и затем до нуля.

Другой легко решаемой задачей является задача о распределении тока и поля в большой квантовой точке с малыми туннельными контактами (рис. 3). Туннелирование происходит в самых тонких частях барьеров, так что контакты могут считаться точечными источниками тока. Заметим, что точечные контакты не нарушают условия теоремы и, как следствие, магнитное поле не влияет на распределение тока в отличие от контактов конечного размера.

Плотность тока и потенциал в этом случае даются выражениями

$$j_x - ij_y = \frac{2aJ}{\pi} \frac{1}{a^2 - z^2},$$

$$\phi = \frac{J}{\pi \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}} \operatorname{Re} \left( \exp(-i\alpha) \operatorname{lg} \frac{a-z}{a+z} \right), \quad (15)$$

где  $J$  — полный ток. На рис. 3 показаны эквипотенциальные линии и линии тока в этом случае.

### 5. ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ РЕШЕТКИ АНТИТОЧЕК

Тензор эффективной проводимости определяется формулами

$$\sigma_{xx}^{eff} = \frac{\bar{\mathbf{j}} \cdot \bar{\mathbf{E}}}{\bar{\mathbf{E}}^2}, \quad \sigma_{xy}^{eff} = \frac{(\mathbf{e}_B \cdot [\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{j}}])}{\bar{\mathbf{E}}^2}. \quad (16)$$

Средний ток в неупорядоченной системе, содержащей изолирующие включения, в отсутствие магнитного поля характеризуется эффективной проводимостью  $\sigma^{eff}$ :

$$\bar{\mathbf{j}} = \sigma^{eff} \bar{\mathbf{E}} = f \sigma \bar{\mathbf{E}}.$$

Отношение проводимостей  $f$  определяется структурой среды. В частности, если включения представляют собой круглые дырки радиусом  $a$  и плотностью  $n$ , то  $f$  зависит только от безразмерной плотности  $x = na^2$ .

Рассмотрим антиточки, случайно и однородно распределенные по плоскости. Если плотность антиточек мала,  $f(x) = 1 - 2x$ . Вблизи порога перколяции  $x \rightarrow x_c$

$$f(x) = (x - x_c)^t$$

(где  $t = 1.3$  [6]) независимо от геометрии системы [7].

В случае квадратной периодической решетки антиточек с периодом  $d$  величина  $f$  в предельных случаях равна

$$f = 1 - 2\pi(a/d)^2,$$

если  $a/d \ll 1$  и

$$f = \pi^{-1} \sqrt{(d-2a)/a},$$

если  $d - 2a \ll d$ .

Для того чтобы найти эффективную проводимость в магнитном поле, нужно выразить все интегралы в (16) через одну величину, например  $\int \nabla_x \psi_0 dS$ . Используя (8) и равенство

$$\sigma \int_{Hall} \nabla \psi_0 dS = \sigma^{eff} \int \nabla \psi_0 dS,$$

получаем

$$\bar{\mathbf{j}} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \nabla \psi_0, \quad (17)$$

$$\nabla \phi = \nabla_x \psi_0 (f^{-1} \cos \alpha, -\sin \alpha). \quad (18)$$

В результате

$$\sigma_{xx}^{eff} = f \frac{\sigma_{xx}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2)}{\sigma_{xx}^2 + f^2 \sigma_{xy}^2},$$

$$\sigma_{xy}^{eff} = f^2 \frac{\sigma_{xy}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2)}{\sigma_{xx}^2 + f^2 \sigma_{xy}^2}. \quad (19)$$

Подобные формулы были получены в [8] другим способом для обычной макроскопической среды с включениями и не анализировались в пределе КЭХ.

Уравнения (19) дают возможность применить к проблеме КЭХ все результаты теории проводимости неоднородной среды. С ее помощью можно найти как эффективную проводимость по локальной проводимости однородного образца, так и решить обратную задачу об определении локальной проводимости по измеренным эффективным параметрам.

В пределе идеального холловского изолятора  $\sigma_{xx} \rightarrow 0$ , формула (19) дает  $\sigma_{xx}^{eff} \rightarrow 0$  и  $\sigma_{xy}^{eff} \rightarrow \sigma_{xy}$ .

Функция  $f$  может быть исключена из уравнений (19), что приводит к полукруговому соотношению [2], которое было найдено в случае смеси различных холловских фаз:

$$(\sigma_{xx}^{eff})^2 + \left( \sigma_{xy}^{eff} - \frac{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xx}^2}{2\sigma_{xy}} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xx}^2}{2\sigma_{xy}} \right)^2. \quad (20)$$

В пределе  $\sigma_{xx} \rightarrow 0$  (20) не содержит  $\sigma_{xx}$ :

$$(\sigma_{xy}^{eff})^2 + \left( \sigma_{xy}^{eff} - \frac{\sigma_{xy}}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_{xy}}{2} \right)^2.$$

Это соотношение допускает конечность  $\sigma_{xx}^{eff}$  при малом  $\sigma_{xx}$ , т.е. конечные глобальные потери в недиссипативной среде. Этот кажущийся парадокс разрешается, если учесть, что полукруговое соотношение возникает при раскрытии неопределенности в пределе  $\sigma_{xx}/\sigma_{xy} = H \rightarrow 0$  и  $f \rightarrow 0$ . При изменении отношения  $H/f$  компоненты тензора эффективной проводимости пробегает все точки полукруга. При малом  $H/f$  конечное  $\sigma_{xx}^{eff}$  возникает за счет малого  $f$ . Другими словами, конечная диссипация вблизи порога перколяции возникает из-за конкуренции диссипации в холловской фазе и в узких перешейках.

В пределе  $H \ll f$

$$\sigma_{xy}^{eff} = \sigma_{xy}, \quad \sigma_{xx}^{eff} = \sigma_{xx}/f.$$

Если  $H \gg f$ ,

$$\sigma_{xy}^{eff} = \frac{f^2 \sigma_{xy}^3}{\sigma_{xx}^2}, \quad \sigma_{xx}^{eff} = \frac{\sigma_{xy}^2 f}{\sigma_{xx}}.$$

Парадоксальным результатом является то, что после вырезания в  $2D$ -плоскости дырок  $\sigma_{xx}^{eff}$  может возрасти (а потери при заданном электрическом поле упасть). Объяснение состоит в том, что при малом  $\sigma_{xx}$  ток приблизительно перпендикулярен электрическому полю. Поле в узких перешейках между антиточками, определяющее весь ток, велико по сравнению со средним полем. Конечное  $\sigma_{xx}$  «закарачивает» поле в перешейках и тем сильнее, чем уже перешеек. Следовательно, чем меньше  $f$ , тем больше  $\sigma_{xx}^{eff}$ .

В пределе  $H \rightarrow 0$ ,  $f \rightarrow 0$ ,  $H \gg f$  конечность  $\sigma_{xx}$  обуславливается потерями, сконцентрированными в узких перешейках, играющих роль «горячих точек».

## 6. ПРОБОЙ КЭХ В РЕШЕТКЕ АНТИТОЧЕК

Пробой КЭХ заключается в появлении конечно-го  $\sigma_{xx}^{eff}$  в минимумах  $\sigma_{xx}$  при большой плотности тока. Измерения пробоя КЭХ в регулярных и случайных решетках антиточек [4] показывают понижение

порога по сравнению с непаттернированным образцом.

Обсудим пробой КЭХ в неупорядоченной решетке антиточек, базируясь на модели [4]. Согласно этой модели, если плотность тока в узких перешейках между парой близких антиточек превышает некоторое критическое значение  $j_c^0$ , электронный газ в перешейках перегревается и холловский изолятор вблизи этих перешейков превращается в проводник. Пробой КЭХ во всем образце означает, что области нормального металла перекрываются (и холловская фаза разрывается).

Радиус зоны влияния разогрева определяется некоторой феноменологической длиной электронного охлаждения  $l_e$ . Сценарии пробоя различаются в зависимости от отношения  $l_e$  к расстоянию между антиточками и их размеру.

Во-первых, обсудим нелокальный случай  $l_e \gg a$ . Заметим, что даже отдельная антиточка уменьшает критический ток. Согласно (12) максимальная плотность тока около антиточки в два раза превышает среднюю плотность тока. Следовательно, если средняя плотность тока превышает  $j_c^0/2$ , окрестность антиточки радиуса  $l_e$  превратится в проводник. Это значение определит критический ток во всем образце, если появляющаяся резистивная фаза станет связной. Условие связности резистивной фазы есть  $4\pi n l_e^2 = B_c = 4.4$  [6].

Если  $4\pi n l_e^2 < B_c$  и  $j_c > j > j_c^0/2$ , резистивные фазы вокруг одиночных антиточек разорваны. Уединенная нормальная область внутри холловской фазы обтекается током, если диагональная проводимость резистивной фазы значительно превышает диагональную проводимость холловской фазы. В результате тепловой перегрев внутри резистивных областей может поддерживать только умеренное увеличение проводимости внутри области до величины порядка проводимости  $\sigma_{xx}$  холловской фазы.

Если плотность тока достаточно мала, окрестность одиночных антиточек остается в холловской фазе, в то время как перешейки между близкими парами антиточек становятся резистивными. Несмотря на то что размер резистивной фазы  $l_e$  превышает радиус антиточки, изоляция резистивной области от тока ограничивает перегрев внутри, если эти области не перекрываются.

Если же области резистивной фазы вокруг близких пар перекрываются, мы можем найти порог перколяции, оценивая ток, поддерживающий резистивное состояние.

Плотность критических пар  $n_c$ , определяемая тем же условием  $4\pi n_c l_e^2 = B_c$ , может быть найде-

на из неравенства, заключающегося в том, что ток в перешейке между антиточками  $j(0)$  превышает  $j_c^0$ . Значение  $j(0)$  есть  $\sqrt{2a/\delta} j(\infty) |\cos \chi|$ , где  $\chi$  — угол между межцентровым направлением и направлением среднего тока. Отсюда критическая плотность пар

$$n_c = 8\pi(na)^2 (j_c/j_c^0)^2.$$

В результате

$$j_c = j_c^0 \sqrt{\frac{B_c}{2}} \frac{1}{4\pi n a l_e}. \quad (21)$$

Последняя формула справедлива, если плотность антиточек достаточно велика,  $n \gg B_c(16\pi a l_e)^{-1}$ . Если  $n_c < n \ll B_c(16\pi a l_e)^{-1}$ , критический ток, определяемый одиночными антиточками, есть  $j_c^0/2$ .

## 7. ПРОБОЙ КЭХ В РЕШЕТКЕ АНТИТОЧЕК. ЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Здесь мы обсудим нижний порог пробоя КЭХ в случайной решетке антиточек, базируясь на предположениях, что  $na^2 \ll 1$ , и что критический ток создает самоподдерживающийся локальный перегрев в узкой полоске, разделяющей образец на два КЭХ-проводника, примыкающих к токовым контактам.

Вначале приложим сильный ток к холловской полосе переменной ширины без антиточек. В самой узкой части плотность тока максимальна и порог пробоя самый низкий. Вблизи самого узкого сечения полоса переходит в резистивное состояние.

На самом низком пороге плотность тока в остальных местах ниже пороговой, и они остаются в фазе холловского диэлектрика, где падение напряжения обращается в нуль. Поэтому критическим местом образца является самая узкая его часть. Ширина резистивной полоски обращается в нуль вместе с близостью средней плотности тока к ее пороговому значению. Локальная ширина резистивной фазы и плотность тока зависят от напряжения между холловскими фазами и, следовательно, вдоль берега холловских фаз.

Применим эти соображения к образцу с антиточками. Базируясь на них, естественно ожидать, что низший порог пробоя должен определяться кратчайшим разрезом холловской фазы, разбивающим образец на две несвязные области, примыкающие к контактам (рис. 4). Резистивная фаза появляется вдоль этого разреза. В первом приближении плотность тока ограничивается этой резистивной фазой и не зависит от координат.

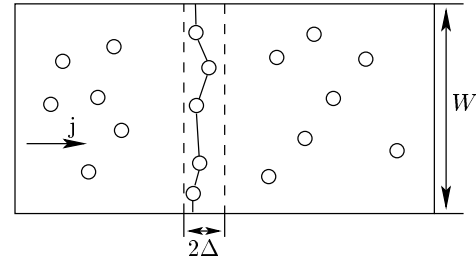


Рис. 4. Пробой КЭХ в решетке антиточек: локальная модель. Резистивная фаза появляется вдоль кратчайшего разреза, соединяющего антиточки

Поэтому проблема нахождения порога сводится к математической проблеме нахождения длины кратчайшего разреза прямоугольника, содержащего круглые отверстия, рассекающего его на несвязные области. При  $na^2 \ll 1$  длина в нулевом приближении равна ширине прямоугольника  $W$ . Поправки к этой величине на конечность  $na^2$  можно найти подобно [9]. Мы должны минимизировать длину разреза

$$\mathcal{L} = \sum_i (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}| - 2a)$$

между антиточками с положениями  $\mathbf{r}_i$ . Сумма включает подмножество антиточек, минимизирующее длину  $\mathcal{L}$ .

На первый взгляд поправки определяются долей прямой линии, рассекающей образец и попадающей на антиточки  $\sim -Wna^2$ . На самом деле эта линия включает только антиточки, центры которых удалены не более чем на  $2a$  от нее. Для того чтобы минимизировать длину разреза, нужно сделать его максимально прямым, но включить в него максимальное число антиточек. Это можно сделать, если включать в него все антиточки в полоске шириной  $2\Delta$ , такой что  $a \ll 2\Delta \ll n^{-1/2}$ . Длина разреза определяется числом антиточек  $N$ , которые он пересекает.  $N$  имеет порядок величины полного числа антиточек в полосе  $2\Delta$ :  $N = 2nW\Delta$ . Типичное расстояние между центрами антиточек внутри полосы есть  $l = \sqrt{(W/N)^2 + \Delta^2} \sim W/N + \Delta^2 N/(2W)$ . Поэтому минимальная длина разреза, проходящего по холловской фазе, есть

$$\mathcal{L} = W + \frac{\Delta^2 N^2}{2W} - 2aN = W + 2n^2 W \Delta^4 - 4anW \Delta. \quad (22)$$

Выражение (22) нужно минимизировать по  $\Delta$ . Это дает  $\Delta = (a/(2n))^{1/3}$  и  $\mathcal{L} \sim W(1 - 3 \times 2^{-1/3} (na^2)^{2/3})$ . Это значение  $\Delta$  гораздо меньше, чем  $n^{-1/2}$ , поэтому разрез в действительности почти прямой.

На пороге пробоя плотность тока через разрез должна соответствовать критической плотности тока в бесконечной среде  $j_c^0$ . Средняя низшая критическая плотность тока с учетом поправки на отношение длины разреза к ширине образца есть  $j_c = j_c^0(1 - 3 \times 2^{-1/3}(na^2)^{2/3})$ . Заметим, что эта поправка не аналитична по  $na^2$  и гораздо больше поправки, найденной исходя из общих соображений.

Мы нашли типичную минимальную длину разреза. Этот результат, конечно, справедлив только в макроскопическом пределе,  $N \gg 1$ . В малом образце флуктуации этого числа являются определяющими и минимальная длина разреза и, следовательно, порог пробоя должны флуктуировать от образца к образцу. Этот случай также может быть рассмотрен с помощью метода оптимальной флуктуации, но мы ограничимся только макроскопическим пределом.

## 8. ЦИКЛОТРОННЫЙ РЕЗОНАНС

Рассмотрим проводимость образца с антиточками в магнитном поле на конечной частоте. Электростатическая задача остается двумерной, если частота электрического поля  $\omega$  достаточно мала, и, как следствие, омический ток превышает ток смещения. В этом случае эффективная проводимость определяется тем же выражением (19), в котором тензор локальной проводимости заменяется на высокочастотный отклик. Рассмотрим КЭХ-среду с антиточками в окрестности циклотронного резонанса.

Локальный тензор проводимости имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \beta i \left( \frac{1}{\omega_c - \omega + i\delta} - \frac{1}{\omega_c + \omega - i\delta} \right), \\ \sigma_{xy} &= \beta \left( \frac{1}{\omega_c - \omega + i\delta} + \frac{1}{\omega_c + \omega - i\delta} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\beta = e^2 n / 2m$ ,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $n$  — поверхностная плотность электронов,  $\omega_c$  — циклотронная частота,  $\delta$  — затухание. Подстановка (23) в (19) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{eff} &= \frac{2\beta\omega_c f^2}{-(\omega - i\delta)^2 + f^2\omega_c^2}, \\ \sigma_{xy}^{eff} &= \frac{2i\beta\omega f}{-(\omega - i\delta)^2 + f^2\omega_c^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Поглощение линейно-поляризованной электромагнитной волны определяется  $\sigma_{xx}^{eff}$ . Из (24) следует, что как резонансная частота, так и силы осциллятора перенормируются на множитель  $f$ . Поглощение циркулярной волны с циклотрон-активной поляризацией в плоскости системы, связанное с  $\sigma_{xx}^{eff} - i\sigma_{xy}^{eff}$ , имеет

такой же сдвиг резонансной частоты, а силы осциллятора перенормируются на фактор  $f^2$ . Если  $f$  достаточно мала, перенормировка может быть весьма существенна.

## 9. ПРИМЕНИМОСТЬ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО ПРИВЛИЖЕНИЯ

Наше рассмотрение базируется на двух важных предположениях. Первое из них заключается в локальности связи плотности тока с полем (1). Другое предположение — это однородность микроскопических свойств среды. Оба предположения требуют, чтобы геометрические размеры системы были велики по сравнению с микроскопическими длинами.

Первое предположение нуждается в малости длины установления равновесия по сравнению с геометрическими длинами. Внутри однородных областей холловского диэлектрика длина установления, очевидно, мала, поскольку смещение центра циклотронной орбиты в сильном магнитном поле вызывается рассеянием и имеет порядок величины циклотронного диаметра, совпадающего для нижних уровней Ландау с магнитной длиной  $a_H$ .

Другая ситуация с краевыми токами. Они являются источниками холловского квантования в достаточно малых образцах [10, 11]. В больших образцах электроны, инжектированные в образец из контакта по краевому состоянию, двигаются вдоль него, пока не рассеются в объемное или другое краевое состояние. (Феноменологию процесса смотри в [9].) Эти переходы ограничиваются необходимостью туннелирования на расстояние, существенно превышающее размер волновой функции, и, следовательно, длина установления экспоненциально велика.

Длина установления между краевыми и объемными состояниями, очевидно, зависит от расстояния между уровнем Ферми и уровнем Ландау. Если оно мало, то переходы упругие, иначе обмен между краевыми и объемными состояниями ограничивается испусканием или поглощением фононов, с энергией активации, определяемой энергетическим расстоянием между делокализованными объемными состояниями и уровнем Ферми. Известно, что в состоянии холловского изолятора длина установления может достигать макроскопических величин, вплоть до 100 мкм [13].

Имеются два типа краевых токов. Токи вдоль внешней границы образца переносят химический потенциал из истока к стоку [10, 11]. Большая длина установления на этих краевых состояниях может



быть компенсирована за счет больших размеров образца. Если это так, этими краевыми токами можно пренебречь.

Другие краевые токи текут вокруг антиоточек и не связаны непосредственно с контактами. Они не играют роли в двух случаях, когда размер и расстояние между антиоточками существенно больше или, наоборот, меньше длины установления. Действительно, в первом случае краевые токи разомкнуты друг от друга и контактов к образцу, а во втором случае легко перемешиваются с объемными состояниями.

Перемешивание происходит также между краевыми состояниями различных антиоточек. Оно имеет экспоненциальную малость по параметру отношения расстояния между краями антиоточек и магнитной длины  $a_H$  и важно, только если это расстояние достаточно мало.

Прямые переходы между различными краевыми состояниями или между краевыми состояниями и объемными состояниями определяются перекрытием их волновых функций. Рассмотрим случай упругих переходов. Время перехода можно оценить как  $(1/\omega_c) \exp(d_1^2/2a_H^2)$ , где  $d_1$  — расстояние между соответствующими состояниями. Величина  $d_1$  для переходов между краевыми состояниями или между краевыми состояниями и объемными состояниями в основном определяется шириной слоя истощения. Для переходов между различными краевыми состояниями  $d_1$  определяется расстоянием между соответствующими краями. Более аккуратные оценки требуют рассмотрения профиля потенциала и участия примесей в процессе туннелирования [14].

Внутренние краевые токи вокруг антиоточек разомкнуты и не принимают участия в общей проводимости, если расстояние между антиоточками  $\delta$  превышает магнитную длину  $a_H$ . Если образец находится вблизи области холловского изолятора,  $\sigma_{xx} \ll \sigma_{xy}$ , критерием пренебрежимости краевыми токами является малость отношения параметра  $\exp(-\delta^2/4a_H^2)$ , характеризующего перекрытие краевых состояний вокруг различных антиоточек, к параметру  $H = \sigma_{xx}/\sigma_{xy}$ .

Профили потенциала и концентрации электронов подтверждают также справедливость предположения об однородности макроскопических свойств среды. Ширина слоя истощения вокруг антиоточек определяется экранированием потенциала за счет перераспределения электронов. В общепринятом подходе [14] экранирование определяется перераспределением электронов, усложненным структурой уровней Ландау. Учитывая, что при КЭХ хи-

мический потенциал ступенчато зависит от плотности электронов и, наоборот, электронная плотность ступенчато зависит от химического потенциала, профиль потенциала вблизи краев также является ступенчатой функцией координат, экранирование происходит с чередованием фаз холловского проводника и диэлектрика.

Более простая ситуация возникает при наличии полевого электрода, экранирующего латеральный потенциал. В этом случае положение химического потенциала на поверхности потенциала фиксируется. Если, как это бывает обычно, расстояние между двумерным слоем и поверхностью мало,  $\sim 1000 \text{ \AA}$ , ширина слоя истощения определяется преимущественно этим расстоянием, а не  $2D$ -электронами. Это предположение кажется нам более соответствующим эксперименту, чем ситуация, описанная в [14].

Будем разделять два случая. В первом из них во внешней части электронной жидкости между антиоточками химический потенциал фиксирован на некотором уровне Ландау (холловский проводник). Во втором случае он расположен между уровнями Ландау (холловский изолятор).

В первом случае линейное экранирование определяется как поверхностью, так и перераспределением электронов в двумерном слое, в то время как во втором случае — только электронами. В обоих случаях типичный пространственный масштаб электронной плотности определяется геометрическими факторами, т. е. расстоянием  $D$  между двумерным слоем и поверхностью. Ход потенциала отличается асимптотическим поведением от антиоточки вдоль  $2D$ -слоя. На больших расстояниях от края конденсатора, образованного краем антиоточки, электрический потенциал экспоненциально приближается к значению на бесконечности. Электронная плотность определяется нормальной производной от этого потенциала и поэтому имеет то же поведение. Во втором случае изменение потенциала вдоль  $2D$ -слоя является некоторой плавной функцией отношения продольной координаты  $\rho$  к  $D$ . Эту функцию можно оценить, если рассмотреть антиоточку как дополнительный заряд  $Q$ , помещенный вблизи металлической поверхности на расстоянии  $D$ :  $\phi(\rho) = Q/\rho - Q/\sqrt{\rho^2 + 4D^2} \sim \phi_S a D^2/\rho^3$ , где  $\phi_S$  — потенциал поверхности полупроводника и  $\phi$  — равновесный потенциал. Соответствующее изменение электронной плотности (числа квазичастиц на соседних к  $\mu$  уровнях Ландау) пропорционально  $\delta n = \exp(-(\omega_c/2 - |\mu - e\phi - n\omega_c|)/T)$ .

Предположим, что проводимость  $\sigma_{xx} \sim \delta n$ . Согласно этому предположению, изменение  $\sigma_{xx}$  долж-

но быть мало. Это определяет электрический размер антиточки.

В первом случае размер антиточки увеличивается с  $D$ . Во втором случае электрический размер  $a_e$ , если он превышает геометрический размер  $a$ , должен удовлетворять неравенству  $a_e \gg (\phi_S a D^2 / T)^{1/3}$ . Вне этой области  $\sigma_{xx}$  может считаться постоянной. Если проводимость определяется прыжками вблизи химического потенциала, температура  $T$  должна быть заменена на некоторую характеристическую энергию  $\theta$ , определяющую зависимость проводимости от химического потенциала, связанную с плотностью состояний в щели:  $\sigma_{xx} \sim F(\mu/\theta)$ .

Слой истощения вокруг антиточки может состоять из альтернирующих холловских фаз, что должно было усложнить задачу. Однако согласно [2] граничные условия на границе различных холловских фаз требуют равенства нулю нормальной компоненты тока. Если внутренняя область является замкнутой, она может рассматриваться как изолирующая и все наше рассмотрение остается в силе. Единственной величиной, требующей переопределения, является граница антиточки, под которой следует понимать границу последней фазы холловского изолятора.

## 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение подчеркнем основные результаты.

Мы изучили квантовый эффект Холла в системе, содержащей антиточки. Тензор проводимости системы с антиточками в магнитном поле выражается через проводимость аналогичной системы без магнитного поля и локальную проводимость в магнитном поле. Мы нашли, что присутствие изолирующих включений не влияют на холловское квантование и обращение в нуль диагональной проводимости. Мера влияния антиточек на проводимость является отклонение локального  $\sigma_{xx}$  от нуля и  $\sigma_{xy}$  от квантованных значений. Конечная эффективная проводимость  $\sigma_{xx}^{eff}$  и отклонение  $\sigma_{xy}^{eff}$  от ступенек в пределе  $\sigma_{xx} \rightarrow 0$  возникают вблизи перколяционного порога.

Локальное электрическое поле в системе, содержащей антиточки, в магнитном поле отличается от электрического поля в отсутствие магнитного поля поворотом на угол Холла. Локальная плотность тока при заданных граничных условиях для тока на внешних границах не зависит от магнитного поля.

В работе найдено распределение локального поля в частных случаях одной и двух близких антиточек. Знание локальных полей дает возможность

определить порог пробоя КЭХ в решетке антиточек в рамках модели перегрева электронного газа.

Формулы для эффективной проводимости, примененные к случаю высокочастотного электрического поля, позволили найти частоту циклотронного резонанса в системе с антиточками, отличающуюся от частоты для однородной среды.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 970218397) и федеральной программы «Физика твердотельных наноструктур». Один из нас (Э. М. Б.) был частично поддержан также грантом INTAS № 960730.

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. E. Arkhincheev and E. G. Batyev, *Sol. St. Com.* **12**, 1059 (1989).
2. A. M. Dykhne and I. M. Ruzin, *Phys. Rev. B* **50**, 2369 (1994).
3. I. M. Ruzin and S. Feng, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 154 (1995).
4. G. Nachtwei, G. Lutjering, D. Weiss, Z. H. Liu, K. von Klitzing, and C. T. Foxon, *Phys. Rev. B* **55**, 6731 (1997).
5. E. M. Baskin and M. V. Entin, *Phys. Low-Dim. Struct.* **1/2**, 17 (1997).
6. B. I. Shklovskii and A. L. Efros, *Electronic Properties of Doped Semiconductors*, Springer-Verlag, New-York (1984).
7. S. Feng, B. I. Halperin, and P. N. Sen, *Phys. Rev. B* **35**, 197 (1987).
8. Б. Я. Балагуров, *ЖЭТФ* **82**, 1333 (1982).
9. B. I. Shklovskii and B. Z. Spivak, *J. St. Phys.* **50**, 60 (1984).
10. Э. М. Баскин, М. В. Энтин, *ЖЭТФ* **98**, 2150 (1990).
11. M. Butiker, *Semiconductors and Semimetals* **35**, 191 (1992).
12. V. T. Dolgoplov, G. V. Kravchenko, and A. A. Shashkin, *Sol. St. Comm.* **78**, 999 (1991).
13. М. В. Буданцев, Г. М. Гусев, З. Д. Квон, А. Г. Погосов, *Письма в ЖЭТФ* **60**, 834 (1994).
14. D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii, and L. I. Glazman, *Phys. Rev. B* **46**, 4026 (1992).