

# КВАНТОВАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ БАРЬЕРОВ ДЛЯ СТРУКТУРНЫХ ЧАСТИЦ

*Ф. М. Пеньков\**

*Объединенный институт ядерных исследований  
141980, Дубна, Россия*

Поступила в редакцию 18 апреля 2000 г.

Рассмотрено прохождение двух связанных частиц через отталкивающий барьер. Продемонстрирован простой механизм возникновения барьерных резонансов, приводящий к аномальной прозрачности барьера по сравнению с вероятностью прохождения бесструктурных объектов. Показано, что вероятности туннелирования из ложного вакуума двух взаимодействующих частиц могут быть существенно выше, чем считалось ранее.

PACS: 03.65.Nk

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовое туннелирование через барьер — одна из наиболее часто встречающихся задач в различных областях физики. При этом за основу рассмотрения физических процессов туннелирования берется прохождение через барьер бесструктурной частицы. Однако большинство приложений связаны с задачами прохождения через барьер структурных объектов. Очевидно, что в случае, когда пространственный размер барьера много больше характерного размера падающего комплекса, мы вправе ожидать только несущественных отличий вероятности прохождения структурного комплекса от вероятности прохождения бесструктурных частиц. Ситуация резко меняется, когда размер комплекса соизмерим с пространственной шириной барьера. В этом случае появляются механизмы, приводящие к большей прозрачности барьера (см., например, [1] и цитированную там литературу). Самый простой из них возникает в случае взаимодействия с барьером только части частиц комплекса, когда вероятность прохождения зависит от массы меньшей, чем масса комплекса.

Недавно был обнаружен новый механизм резонансной прозрачности прямоугольного барьера для пары частиц, связанных бесконечным одномерным прямоугольным потенциалом [2]. При этом исполь-

зовался метод разложения по функциям мишени (по собственным состояниям пары частиц), оставляющий за рамками рассмотрения физическую картину прозрачности и вопросы сходимости метода. В настоящей работе продолжено исследование этого эффекта для других типов взаимодействия на основе численных решений исходного двумерного уравнения Шредингера.

Физическая картина радикальной прозрачности барьера заключается в возможности образования барьерного резонанса, поскольку потенциальная энергия системы может иметь локальный минимум, обеспечивающий метастабильное состояние комплекса. Для этого нужно, чтобы с барьером взаимодействовали по крайней мере две частицы. Механизм образования такого резонансного состояния очень легко представить мысленно. Пусть через барьер пройдет одна из частиц и силы, связывающие пару, достаточно для удержания частиц по разные стороны барьера. Тогда такое резонансное состояние будет жить, пока одна из частиц не пройдет барьер. Ширина барьера будет определять время жизни такого резонанса. Как показано ниже, в этом случае вероятность туннелирования через барьер может достигать единицы. Простое объяснение этого эффекта заключается в интерференционном подавлении отраженной волны, так как наличие барьерного резонанса просто описывается эффективным взаимодействием по переменной движения центра инерции па-

\*E-mail: penkov@thsun1.jinr.dubna.su

ры, пространственный вид которого имеет локальный минимум в центре барьера. Поэтому подавление отраженной волны можно объяснить хорошо известным интерференционным явлением, использующимся при просветлении оптики, — разность хода между волной, отраженной от первого пика, и волной, отраженной от второго, должна составлять половину длины волны.

Для аналитической и численной демонстрации указанного эффекта прозрачности в настоящей работе выбрана тождественная пара частиц, связанная осцилляторным взаимодействием (далее осциллятор), проходящая через одномерный отталкивающий барьер. Выбор осцилляторного взаимодействия в паре обусловлен, с одной стороны, чрезвычайной простотой системы, позволяющей свести трехмерное рассеяние трехмерной пары частиц на одномерном барьере к рассеянию одномерного осциллятора на одномерном барьере. С другой стороны, именно такой тип взаимодействия выбран в литературе [3], посвященной вероятности индуцированного распада ложного вакуума при столкновении высокоэнергичных частиц (см., например, [4, 5]). При этом была указана возможность описания процессов переходов из ложного вакуума на основе квантовомеханического туннелирования пары частиц через барьер, но исследовалась система, где только одна из частиц осциллятора взаимодействовала с барьером. Здесь же будет показано, что при взаимодействии двух частиц с барьером возникает такой же эффект резонансной прозрачности, как и описанный в работе [2], и поэтому вероятность прохождения пары может быть существенно выше, чем в системах, рассмотренных ранее.

В настоящей работе рассматривалось три вида потенциальных барьеров. Первый — гауссовой формы с параметрами типа «узкий» и «высокий» по сравнению с характерными размером и энергией возбуждения осциллятора. Этот тип взаимодействия удобен для объяснения эффекта в рамках адиабатического разложения двумерного уравнения. Второй исследовавшийся потенциальный барьер, имеющий вид функции Гаусса, но с параметрами типа «широкий» и «высокий» в указанном выше смысле, был выбран из работы [3], чтобы отметить существование возможности радикального увеличения вероятности индуцированного распада ложного вакуума. И, наконец, третий тип потенциального барьера — кулоновской формы — был исследован для привлечения внимания к возможности резонансного прохождения барьера в задачах слияния тяжелых ядер.

## 2. УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим прохождение пары тождественных частиц с массами  $m_1 = m_2 = m$ , координатами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , связанных осцилляторным взаимодействием, через потенциальный барьер  $V_0(x_1) + V_0(x_2)$ . Гамильтониан этой системы ( $\hbar = 1$ )

$$-\frac{1}{4m}\Delta_R - \frac{1}{m}\Delta_r + \frac{m\omega^2}{4}r^2 + V_0\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) + V_0\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right),$$

представленный в координатах центра инерции пары  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  и внутренней переменной относительного движения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , описывает трехмерное движение трехмерного осциллятора. Поскольку потенциальный барьер зависит лишь от одной переменной, а осцилляторное взаимодействие аддитивно по проекциям  $\mathbf{r}$ , волновая функция факторизована и ее нетривиальная часть, описывающая процесс рассеяния, зависит лишь от двух переменных. Эти переменные удобно представить в виде

$$x = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(x_1 - x_2),$$

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(x_1 + x_2).$$

Уравнение Шредингера в этих переменных имеет вид

$$[-\partial_x^2 - \partial_y^2 + x^2 + V(x - y) + V(x + y) - E] \Psi = 0, \quad (1)$$

где энергия  $E$  представляется в единицах  $\omega/2$ , а потенциальный барьер

$$V(x \pm y) = \frac{2}{\omega} V_0\left(\frac{x \pm y}{\sqrt{2m\omega}}\right)$$

ниже будем записывать в удобной для наших рассуждений форме. Уравнение (1) необходимо дополнить граничными условиями. Пусть процесс рассеяния идет слева направо и начальное состояние осциллятора отвечает состоянию  $n$ . Тогда граничные условия записываются в очевидном виде:

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \exp(ik_n y) \varphi_n(x) - \\ &\quad - \sum_{j \leq N} S_{nj} \exp(-ik_j y) \varphi_j(x), \quad y \rightarrow -\infty, \\ \Psi &\rightarrow \sum_{j \leq N} R_{nj} \exp(ik_j y) \varphi_j(x), \quad y \rightarrow +\infty, \\ \Psi &\rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Волновые функции осциллятора  $\varphi_j(x)$  отвечают уравнению Шредингера

$$(-\partial_x^2 + x^2 - \varepsilon_i) \varphi_i = 0 \quad (3)$$

с энергией  $\varepsilon_j = 2j + 1$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), импульсы  $k_j = \sqrt{E - \varepsilon_j}$ , а  $N$  — номер последнего открытого канала ( $E - \varepsilon_{N+1} < 0$ ). Далее будет рассматриваться осциллятор, составленный из бозонов, спектр которого удобно нумеровать с единицы. Таким образом, везде ниже  $\varepsilon_j = 4j - 3$  ( $j = 1, 2, \dots$ ).

Определим вероятности прохождения  $W_{ij}$  и отражения  $D_{ij}$  как отношение плотности пройденного или отраженного потока к плотности потока падающих частиц:

$$W_{ij} = |R_{ij}|^2 \frac{k_j}{k_i}, \quad D_{ij} = |S_{ij}|^2 \frac{k_j}{k_i}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{j \leq N} W_{ij} + D_{ij} = 1.$$

Поставленная таким образом задача определения вероятностей прохождения (отражения) требует решения двумерного дифференциального уравнения (1), численные решения которого будут приведены ниже.

Однако сначала мы продемонстрируем физические причины возникновения резонансной прозрачности, которые наиболее наглядны в рамках известного подхода адиабатического разложения, хорошо зарекомендовавшего себя в различных приложениях задачи трех тел (см., например, обзор [6]).

Введем базисные функции  $\Phi_i$ , удовлетворяющие уравнению

$$[-\partial_x^2 + x^2 + V(x - y) + V(x + y) - \varepsilon_i(y)] \Phi_i(x; y) = 0, \quad (4)$$

и используем их для разложения

$$\Psi(x, y) = \sum_i f_i(y) \Phi_i(x; y).$$

Подставим это разложение в уравнение (1) и спроецируем на базис. Получим систему уравнений

$$[(-\partial_y^2 + \varepsilon_i - E) \delta_{ij} - Q_{ij} \partial_y - \partial_y Q_{ij} + P_{ij}] f_j = 0, \quad (5)$$

где эффективное взаимодействие в канале  $i$ ,  $E_i = \varepsilon_i + P_{ii}$ , отвечает диагональной части взаимодействия, а функции, полученные при проектировании,

$Q_{ij} = \langle \Phi_i, \partial_y \Phi_j \rangle$  и  $P_{ij} = \langle \partial_y \Phi_i, \partial_y \Phi_j \rangle$ , отвечают связи каналов. Угловые скобки означают интегрирование по всей области  $x$ . Из определения этих функций следует антисимметричность  $Q_{ij}$  и положительность  $P_{ii}$ . Как правило, связь каналов невелика и для описания процессов рассеяния используют ограниченное число уравнений. Для дискретного спектра уравнения (4) хорошее описание процессов рассеяния достигается при использовании всех открытых по энергии каналов [6]. В нашем случае спектр уравнения (4) только дискретный. При больших  $|y|$  эффективная энергия  $E_i \rightarrow \varepsilon_i$ , а  $\Phi_i(x; y) \rightarrow \varphi_i(x)$ , что позволяет легко переписать граничные условия (2) в канальном виде.

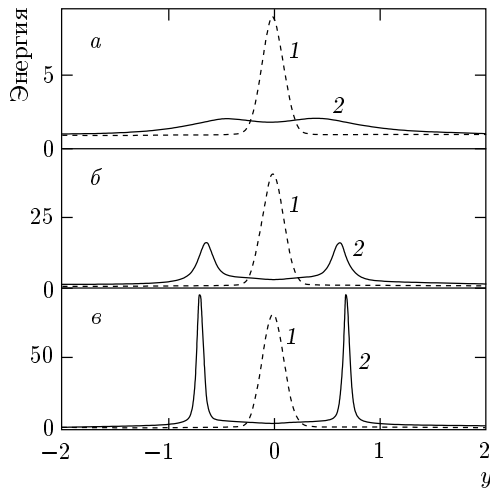
Для численного решения уравнения (4) использовалась схема Нумерова (см., например, [7]) с шагом  $h_x = 10^{-4}$ . При больших значениях переменной  $x$  ( $x_{max} = 6$ ) решение, идущее от нуля, сшивалось с экспоненциальной асимптотикой уравнения (3). Величины  $Q_{ij}$  и  $P_{ij}$  строились численно. Численная погрешность определения этих величин не превышала  $10^{-8}$ . Решение же системы уравнений (5) с целью определения величин  $S_{ij}$  и  $R_{ij}$  основывалось на построении фундаментальных решений Иоста (см., например, [8]) для левой и правой полуосей с шагом  $h_y = 10^{-4}$ . Асимптотика решений полагалась при  $y_{max} = 10$ . Для анализа погрешности схемы дискретизации и конечности области рассмотрения шаг уменьшался на порядок, а размер  $y_{max}$  увеличивался в четыре раза. Проведенный анализ позволяет утверждать достоверность семи значимых цифр во всех приведенных ниже результатах вычислений в рамках адиабатического приближения.

Для численного решения уравнения (1) использовалась трехдиагональная схема аппроксимации вторых производных с постоянными шагами по  $x$  и  $y$ :  $h_x = 0.025$ ,  $h_y = 0.005$ . Конечные размеры  $|y_{max}| = 12$  и  $|x_{max}| = 7$  области численных расчетов при указанной степени дискретизации обеспечивали точность не хуже третьего десятичного знака во всех приведенных ниже результатах расчетов на основе уравнения (1).

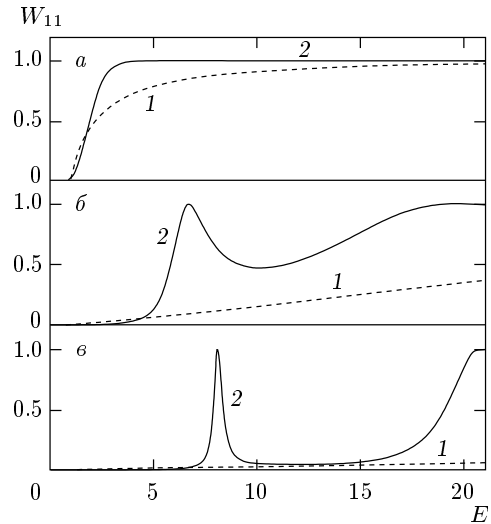
### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Для демонстрации эффектов резонансной прозрачности рассмотрим прохождение потенциально-го барьера вида

$$V(X) = \frac{A}{\sqrt{2\sigma\pi}} \exp\left(-\frac{X^2}{2\sigma}\right), \quad X = x \pm y,$$



**Рис. 1.** Эффективные энергии взаимодействия связанной пары с барьером при разных амплитудах парных потенциалов  $V$ :  $A = 1$  (*a*),  $5$  (*б*) и  $10$  (*в*). Кривые *1* — приближение бесструктурной частицы (потенциал  $2V(y)$ ). Кривые *2* — одноканальное адиабатическое приближение ( $E_1(y)$ ). Пояснения в тексте



**Рис. 2.** Вероятности прохождения связанной пары через барьеры в приближениях бесструктурной частицы (кривые *1*) и одноканальном адиабатическом (кривые *2*) при разных амплитудах парных потенциалов  $V$ :  $A = 1$  (*a*),  $5$  (*б*) и  $10$  (*в*). Пояснения в тексте

в рамках адиабатического подхода. Здесь амплитуда  $A$  — параметр, описывающий энергетическую высоту барьера, а  $\sigma$  определяет его пространственную ширину.

В выбранном подходе эффект квантовой прозрачности барьера наблюдается уже в приближении одного канала, т. е. в приближении Борна—Оппенгеймера. На рис. 1 приведены зависимости  $E_1(y)$ , полученные численным решением уравнения (4) при  $\sigma = 0.01$  и величинах амплитуды  $A = 1, 5$  и  $10$  (*a, б, в* соответственно). Такие значения параметров были выбраны для демонстрации возникновения потенциальной ямы, обеспечивающей резонансные особенности процессов рассеяния. Для сравнения на рисунке приведены исходные потенциалы барьеров при  $x = 0$ , т. е.  $2V(y)$ , которые отвечают процессу рассеяния бесструктурных (или предельно связанных) частиц. Для удобства сравнения они сдвинуты на энергию связи пары.

На рис. 2 приведены вероятности прохождения пары через барьер, полученные численным решением уравнения (5), отвечающие потенциалам, изображенным на рис. 1. Хорошо видно, что в случае  $A = 1$  процессы рассеяния осциллятора и бесструктурной частицы с удвоенной массой различаются незначительно. При  $A = 5$  появляется резонансная компонента рассеяния, а при  $A = 10$  наблюдается ярко выраженный резонанс при энергии  $E_r \approx 8.12$ , до-

стигающий в пике величины  $W_{11} = 1$ . Именно такое поведение вероятности определяет термин «квантовая прозрачность барьеров». Для сравнения отметим, что вероятность прохождения барьера  $2V(y)$  составляет лишь приблизительно  $0.012$ .

Некоторое удивление может вызвать полная прозрачность барьера. Во Введении было указано на явные аналогии с оптическими явлениями. Ниже мы приведем простые выражения, справедливые в случае прямоугольных барьеров и в квазиклассическом приближении, которые показывают возможность полной прозрачности. Для рассуждения выберем изображенный на рис. 1в потенциал с двумя ярко выраженными пиками. Поскольку задача прохождения через барьер в одномерном случае рассмотрена во многих учебниках (см., например, [9]), здесь приводится лишь схема решения задачи прохождения двухпикового барьера. Помечая три области классически разрешенного движения слева направо цифрами 1, 2, 3 и вводя верхние индексы для амплитуд и вероятностей прохождения из области, помеченной левым индексом, в область, помеченную правым, легко получить выражение

$$R^{(13)} = \frac{R^{(12)}R^{(23)}}{1 - S^{(21)}S^{(23)}}.$$

Здесь опущен для простоты записи нижний индекс канала 1. Тогда вероятность прохождения двух-

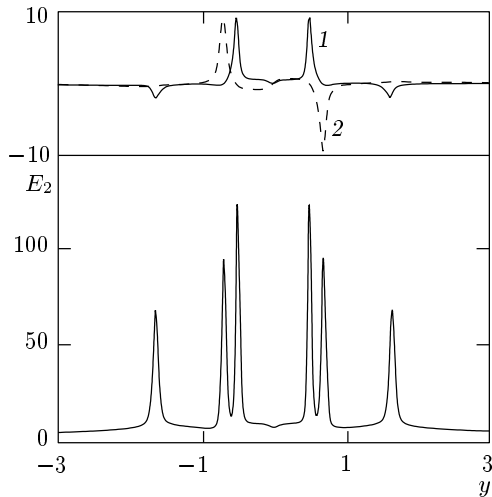


Рис. 3. Составляющие второго канала адиабатического приближения  $P_{12}$  (кривая 1) и  $Q_{12}$  (кривая 2) при амплитуде парных потенциалов  $V$ , равной 10. Пояснения в тексте

пикового барьера выражается через вероятности прохождения каждого пика:

$$W^{(13)} = \frac{W^{(12)}W^{(23)}}{1 + |S^{(21)}|^2|S^{(23)}|^2 - 2|S^{(21)}||S^{(23)}|\cos(\theta)}, \quad (6)$$

где  $\theta$  — удвоенная разность фаз (либо действие в квазиклассическом подходе) движения между левым и правым пиком. Из инвариантности к обращению времени следует принцип детального равновесия (см., например, [9]), который в нашем случае приводит к равенству  $|S^{(21)}| = |S^{(12)}|$ .

Для симметричного потенциала ( $W^{(12)} = W^{(23)}$ ) вероятность прохождения  $W^{(13)}$  достигает максимума при  $\theta = 2\pi n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Заметим, что именно это условие в квазиклассическом подходе определяет спектр связанных состояний при бесконечно широких пиках. С учетом соотношения  $|S^{(ij)}|^2 = 1 - W^{(ij)}$  нетрудно убедиться, что при этих энергиях  $W^{(13)} = 1$ , т. е. достигается полная прозрачность.

Параметры барьерного потенциала  $V$  были выбраны так, чтобы энергия резонанса  $E_r$  была выше энергии второго канала  $\varepsilon_2 = 5$ . Это необходимо для демонстрации утверждения, что включение неупругих процессов не изменит резонансную картину прозрачности.

На рис. 3 показаны результаты численного решения уравнения (4) для второго канала при  $A = 10$  и  $\sigma = 0.01$ . Видно, что функции связи каналов  $Q_{12}$  и

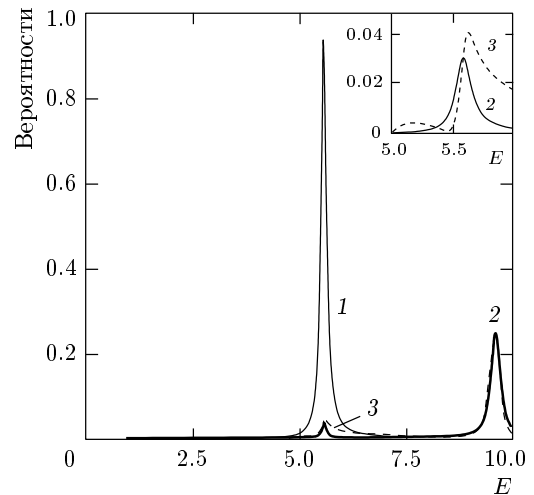


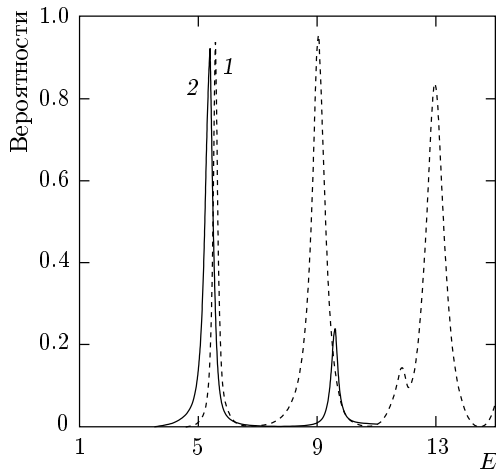
Рис. 4. Вероятности прохождения связанной пары через барьер в двухканальном адиабатическом приближении при амплитуде парных потенциалов  $V$ , равной 10: 1 —  $W_{11}$ , 2 —  $W_{12}$ , 3 —  $D_{12}$ . Пояснения в тексте

$P_{12}$  примерно на два порядка меньше диагональных значений  $E_2$ . Эффективная энергия  $E_2$  имеет более сложный вид, чем  $E_1$ , и тоже может порождать дополнительные резонансы, корректное рассмотрение которых требует учета третьего канала (энергии выше 9).

На рис. 4 приведены вероятности прохождения через барьер осциллятора в основном состоянии. Упругий пик  $W_{11}$  сохраняется, хотя имеет относительно небольшой сдвиг ( $E_r \approx 5.58$ ) и значительное уменьшение ширины — примерно в три раза. Его максимальное значение  $\approx 0.94$  не достигает единицы из-за наличия открытого второго канала. При этом  $W_{12}$  и  $D_{12}$ , показанные в области резонансных энергий на врезке, приблизительно равны 0.03, и полная вероятность прохождения барьера достигает величины около 0.97, что позволяет говорить о значительной, хоть и не 100%-ной, прозрачности. Заметим, что вероятность прохождения барьера  $2V(y)$  в этой области составляет лишь около 0.0075. Величина же  $D_{11}$  ( $\approx 0.0007$ ) чрезвычайно близка к нулю, демонстрируя указанный выше оптический эффект подавления отраженной волны даже в двухканальном случае.

Второй пик на рис. 4 при энергии  $E_r \approx 9.6$  нельзя считать достоверным, поскольку при этих энергиях требуется учет третьего канала.

Разумеется, можно построить  $N$ -канальное приближение. Однако всегда останется вопрос о схожести метода. Поэтому ниже будут демонстри-



**Рис. 5.** Сравнение вероятностей прохождения связанной пары через барьеры при точном решении уравнения (1) (кривая 1) и двухканальном адиабатическом приближении (кривая 2). Пояснения в тексте

роваться вероятности прохождения пары через барьер, найденные численным решением исходного уравнения (1). Как было отмечено выше, адиабатическое приближение нужно было лишь для прояснения механизмов прозрачности. Для того чтобы показать, насколько адиабатический подход корректно описывает процессы рассеяния и резонансную прозрачность, на рис. 5 приведены вероятности прохождения пары через барьер в адиабатическом приближении и результаты численного расчета исходного уравнения (1) при  $A = 10$  и  $\sigma = 0.01$ . На этом рисунке видны небольшие различия в области первого пика, что демонстрирует справедливость двухканального адиабатического приближения в этой области энергии.

Таким образом, адиабатическое приближение качественно описывает зависимость вероятности прохождения пары частиц через барьер даже при возможности неупругих процессов. Именно это позволяет считать справедливым объяснения резонансной прозрачности барьеров в рамках такого подхода. При этом для демонстрации эффектов резонансной прозрачности был выбран тип потенциального барьера, который можно охарактеризовать как «узкий» и «высокий» по сравнению со среднеквадратичным радиусом и энергией возбуждения осциллятора соответственно. Резонансная проницаемость такого типа барьеров хорошо укладывается в простую схему объяснения этого эффекта, приведенную во Введении. Реальные же физические системы могут иметь барьеры более сложного вида. Примерами мо-

гут служить обычный кулоновский барьер и потенциальный барьер вида  $(1/g^2)V(g^2X)$  при  $g^2 \ll 1$  [3], возникающий при исследовании вероятности индуцированного распада ложного вакуума (см., например, [4, 5]). Для демонстрации эффектов резонансной прозрачности таких потенциальных барьеров ниже приводятся результаты численных расчетов двумерных уравнений типа (1) с асимптотическими условиями (2).

Как было сказано выше, в работах, посвященных индуцированному распаду ложного вакуума, использовалась модель квантовомеханического прохождения через барьер связанной осцилляторным взаимодействием пары [3]. При этом рассматривался случай, когда только одна из частиц взаимодействовала с барьером. В рамках эффекта резонансного туннелирования мы вправе ожидать существенного изменения картины туннелирования при включении взаимодействия с барьером обеих падающих частиц. Используемый в работе [3] барьер после процедуры приведения к безразмерному виду имеет форму

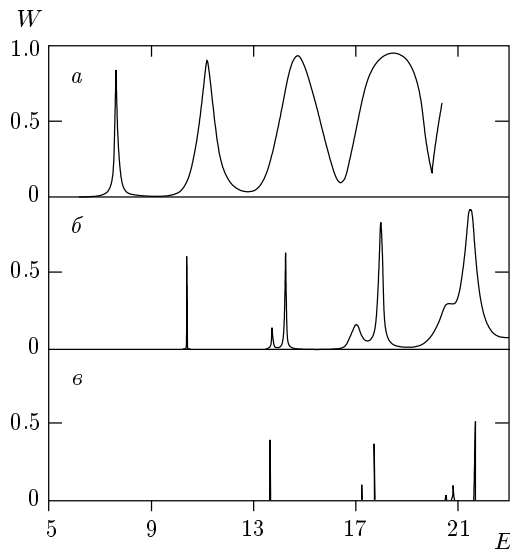
$$V(X) = \frac{2}{g^2\omega} \exp\left(-\frac{g^2X^2}{\omega}\right), \quad X = x \pm y, \quad (7)$$

где  $\omega$  — частота осциллятора, а  $g^2 \ll 1$  — параметр модели ложного вакуума. Очевидно, что при постоянном значении  $g^2$  и предельно малой величине  $\omega$  мы возвращаемся к рассмотренному выше случаю «узких» барьеров. В расчетах работы [3] рассматривалась зависимость вероятности туннелирования при  $g^2 = 0.09, 0.06, 0.04, 0.03, 0.02, 0.01$  и фиксированном значении частоты  $\omega = 1/2$ . В приведенных нами расчетах принято то же значение  $\omega$ , но большие значения величины  $g^2$ . Это связано с возникновением предельно (в рамках численного счета) узких резонансов в энергетической зависимости вероятности туннелирования связанной пары через барьер уже при  $g^2 = 0.2$ . Поэтому на рис. 6 и 7 приведены результаты численных расчетов уравнения (1) с барьером (7) при  $g^2 = 0.5, 0.3, 0.2$  ( $a, b, в$  соответственно).

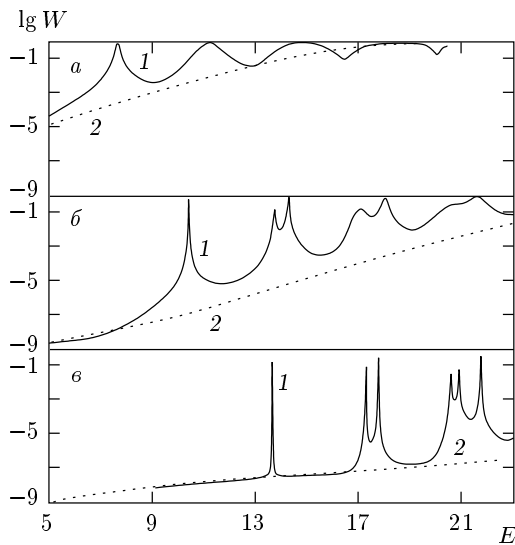
На этих рисунках отложены вероятности прохождения связанной пары из основного состояния во все возможные, т. е.

$$W = \sum_{j \leq N} W_{1j},$$

при разных значениях  $g^2$ . Ярко выраженная резонансная зависимость вероятности туннелирования показывает существование обсуждаемых барьерных



**Рис. 6.** Резонансное поведение полной вероятности прохождения связанной пары через барьеры (7). Расчет при параметрах модели ложного вакуума  $g^2 = 0.5$  (а),  $0.3$  (б) и  $0.2$  (в). Пояснения в тексте



**Рис. 7.** Сравнение полных вероятностей прохождения связанной пары через барьеры. Кривые 1 — точное решение для потенциала (7). Кривые 2 — приближение бесструктурной частицы. Расчет при параметрах модели ложного вакуума  $g^2 = 0.5$  (а),  $0.3$  (б) и  $0.2$  (в). Пояснения в тексте

резонансов. Отметим, что первый резонанс при уменьшении  $g^2$  смещается в сторону больших энергий, однако величина  $g^2 E_r$  уменьшается.

В случае  $g^2 = 0.2$  вероятность резонансного про-

хождения пары во много раз ( $\sim 10^8$ ) больше вероятности прохождения в нерезонансной области (фон). Поэтому на рис. 7 приведены результаты расчетов в логарифмическом масштабе, которые не только демонстрируют указанное превышение, но и показывают совпадение фоновой части кривой с вероятностью прохождения бесструктурной частицы, т. е. с решением уравнения (1) для барьерного потенциала  $2V(y)$ .

Выше для пояснения причин резонансной прозрачности мы использовали адиабатическое приближение. Однако положение резонансов при этом подходе можно найти после решения системы одномерных дифференциальных уравнений. Здесь же после приведенных результатов численных расчетов двумерного уравнения (1) покажем простую схему возникновения барьерных метастабильных состояний, которые с учетом (6) приводят к прозрачности барьера. Для этого заметим, что потенциальная энергия  $U(x, y) = V(x+y) + V(x-y) + x^2$  имеет локальный минимум при  $y = 0$  (центр масс в середине барьера) и некоторых значениях  $x = \pm x_0$ . При  $x = 0$  находится максимум. Таким образом, существуют две потенциальные «ямы», разделенные барьером. Связанные состояния такой системы расщепляются на четные и нечетные. Величина расщепления определяется вероятностью проникновения через внутренний барьер. В случае  $2V(x = 0, y = 0) \gg 1$  этот сдвиг может быть очень мал и спектр четных состояний определяется просто спектром изолированной «ямки». В первом приближении положение резонансов можно описать осцилляторным спектром связанных состояний при  $y = 0, x = x_0$ :

$$E_{n_x n_y} = E_0 + 2\omega_x(1/2 + n_x) + 2\omega_y(1/2 + n_y). \quad (8)$$

Здесь  $n_x$  и  $n_y$  — осцилляторные квантовые числа,  $E_0 = 2V(x_0)$ , а частоты  $\omega_x$  и  $\omega_y$  определяются вторыми производными в точке локального минимума:

$$\omega_x = \sqrt{\partial_x^2 U(x, y)/2} \Big|_{x=x_0, y=0},$$

$$\omega_y = \sqrt{\partial_y^2 U(x, y)/2} \Big|_{x=x_0, y=0}.$$

Для потенциала (7) нетрудно получить параметры осцилляторной модели:

$$E_0 = \omega [1 + 2 \ln(2/\omega)] / g^2,$$

$$\omega_x^2 = 4 \ln(2/\omega), \quad (9)$$

$$\omega_y^2 = \omega_x^2 - 1.$$

Отметим, что выражения для частот  $\omega_x$  и  $\omega_y$  не зависят от параметра  $g^2$  и накладывают ограничения на параметры осциллятора. Для того чтобы существовал локальный минимум  $U(x, y)$ , значения  $\omega$  должны быть меньше 1.557.

Сравним положения резонансов, показанных на рис. 6, при  $g^2 = 0.2$  с результатами расчета по формулам (8), (9), которые позволяют понять существование небольших, но хорошо заметных спутных резонансов. Положение первого резонанса  $E_r = 13.65$  хорошо описывается энергией осциллятора в основном состоянии:  $E_{00} = 13.92$ . Вторая группа резонансов отвечает однократному возбуждению осцилляторов либо по  $x$ , либо по  $y$ :  $E_{01} = 18.18$ ,  $E_{10} = 18.63$ . Им соответствуют резонансы при энергиях 17.24 и 17.74. Третья группа резонансов порождается двукратным возбуждением,  $E_{02} = 22.45$ ,  $E_{11} = 22.90$ ,  $E_{20} = 23.34$ , с соответствующими резонансными энергиями: 20.58, 20.88, 21.72. Таким образом, простая осцилляторная модель метастабильного барьерного состояния дает правильную качественную картину возникновения резонансов. Сравнение же ее с рис. 6 показывает, что наибольшие значения вероятности туннелирования отвечают метастабильным состояниям с минимальным возбуждением по координате центра инерции.

Разложение возле точки равновесия не исчерпывает возможности осцилляторной модели. Согласие между резонансной энергией и энергией метастабильного состояния осциллятора может быть улучшено простой вариационной процедурой. Для этого будем считать положение минимума  $x_0$  и частоты  $\omega_x$  и  $\omega_y$  неизвестными величинами, которые определяются минимумом среднего значения полного гамильтониана

$$\begin{aligned} \bar{H} = & \\ = & \langle \phi_x \phi_y | -\partial_x^2 - \partial_y^2 + x^2 + V(x-y) + V(x+y) | \phi_x \phi_y \rangle \end{aligned}$$

по нормированным собственным функциям осциллятора в основном состоянии:

$$\begin{aligned} \phi_x &= \left(\frac{\omega_x}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\omega_x}{4}(x-x_0)^2\right], \\ \phi_y &= \left(\frac{\omega_y}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega_y}{4}y^2\right). \end{aligned}$$

Проводя вариацию  $\bar{H}$  по  $x_0$ ,  $\omega_x$  и  $\omega_y$ , можно получить систему трех нелинейных уравнений, которые мы не приводим здесь из-за их громоздкости. Два из трех уравнений решаются аналитически:  $x_0 = x_0(\omega_x, \omega_y)$ ,  $\omega_y = \sqrt{\omega_x^2 - 1}$ . Таким образом, для

Сравнение положений первого резонанса с вариационной оценкой

$g^2$	$E_{var}$	$E_r$	$g^2 E_r \omega / 2$
0.5	7.649	7.62	1.30
0.3	10.416	10.38	0.779
0.2	13.680	13.65	0.683

численной оценки остается функция одной переменной  $\bar{H} = \bar{H}(\omega_y)$ , минимум которой и определяет вариационную оценку  $E_{var}$  для первого резонанса. Отметим, что вариационная связь  $\omega_x$  и  $\omega_y$  точно такая же, как и в случае разложения (9). В таблице для сравнения приведены величины  $E_{var}$  и положения первых резонансов  $E_r$ , показанных на рис. 6. С учетом указанной выше точности численного расчета согласие можно считать хорошим.

При  $g^2 \ll 1$  вариационные выражения упрощаются и позволяют сделать разложение

$$\begin{aligned} E_{var}^{as} \sim & \frac{\omega}{g^2} \left[ 1 + 2 \ln\left(\frac{2}{\omega}\right) \right] + \sqrt{4 \ln\left(\frac{2}{\omega}\right)} + \\ & + \sqrt{4 \ln\left(\frac{2}{\omega}\right) - 1} + O(g^2), \end{aligned}$$

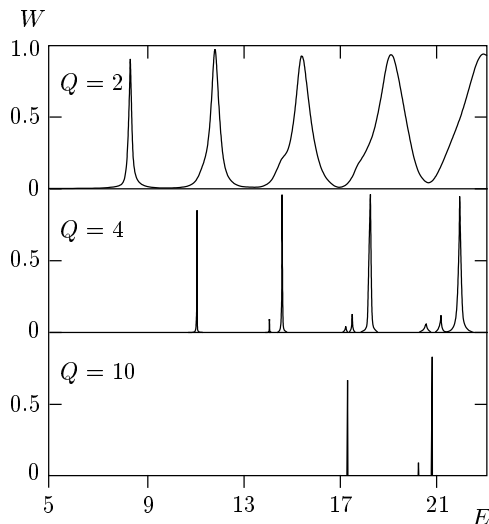
совпадающее с точностью до  $O(g^2)$  с энергией  $E_{00}$ , полученной простым разложением возле минимума  $U(x, y)$ . Таким образом, оценка спектра резонансов по формулам (8), (9) является асимптотической при  $g^2 \rightarrow 0$ . В частности, можно указать предельное при  $g^2 \rightarrow 0$  положение первого резонанса в единицах  $g^2$ , т. е. величину  $g^2 E \omega / 2$ , которая используется в работе [3]:

$$\frac{g^2 E \omega}{2} \rightarrow \frac{\omega^2}{2} \left[ 1 + 2 \ln\left(\frac{2}{\omega}\right) \right].$$

При  $\omega = 1/2$  эта энергия стремится примерно к 0.472. Стремление энергии резонанса к указанному пределу отражено в четвертой колонке таблицы. В работе [3], где исследовалось прохождение пары через барьер, приведена гладкая расчетная кривая (рис. 2 в [3]) вероятности прохождения на энергетическом интервале от 1.2 до 2. Из приведенных выше расчетов следует, что учет взаимодействия обеих частиц пары с потенциальным барьером приведет к существенной немонотонности этой кривой.

Рассмотренные выше барьеры имели форму функции Гаусса. Для полноты картины ниже будут приведены расчеты для барьера кулоновского





**Рис. 8.** Резонансное поведение полной вероятности прохождения связанной пары через барьеры кулоновского вида при разных значениях  $Q$ . Пояснения в тексте

вида, обрезанного как на малых, так и на больших расстояниях:

$$V(X) = \begin{cases} Q/X_{min} & : |X| < X_{min}, \\ Q/|X| & : X_{min} \leq |X| \leq X_{max}, \quad X = x \pm y, \\ Q/X_{max} & : |X| > X_{max}. \end{cases} \quad (10)$$

Обрезание на малых расстояниях введено для моделирования ядерного кулоновского барьера, разумеется, в рамках ограничений, накладываемых одномерным рассеянием. При таком обрезании имеет смысл понятие «высота барьера» для одномерной модели рассеяния. Для большей аналогии ширина барьера при  $|X| = X_{min}$  должна быть небольшой в пространственных единицах задачи, то есть по сравнению со среднеквадратичным размером осциллятора. Обрезание на больших расстояниях введено для возможности использования асимптотики вида (2). Величина  $X_{max}$  должна быть больше единицы для имитации барьера малой прозрачности. Здесь выбраны  $X_{min} = 0.1$  и  $X_{max} = 5$ . Величина  $Q$  определяет энергетическую высоту барьера. Результаты численных расчетов для  $Q = 2, 4, 10$  приводятся на рис. 8.

В этом случае тоже наблюдается ярко выраженная картина резонансного туннелирования связанной пары. Мы не будем приводить здесь анализ

осцилляторной модели для положения резонансов из-за существенной модельности выбранного потенциала. Укажем лишь на очевидные проявления спутных резонансов и хорошо заметную эквидистантность в положении основных резонансов.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный выше механизм прозрачности барьеров для связанной пары частиц ярко проявляется у всех выбранных для исследования потенциальных барьеров. С учетом первого наблюдения резонансной прозрачности [2] для барьеров прямоугольной формы и неосцилляторного типа связи в паре можно полагать, что резонансная прозрачность барьеров для составных частиц может наблюдаться для очень широкого класса взаимодействий. Поэтому эффекты квантовой прозрачности могут иметь место в различных областях физики. Примером служит утверждение, что допущение о возможности описания процессов распадов ложного вакуума путем квантового туннелирования пары частиц, связанной осцилляторным взаимодействием, приводит к механизмам резонансной прозрачности барьера и существенному увеличению вероятности распада ложного вакуума. Резонансная прозрачность одномерного обрезанного кулоновского барьера ставит задачу о исследовании возможной прозрачности реального кулоновского барьера в физике слияния тяжелых ионов.

Автор выражает глубокую признательность А. К. Мотовилову за идею проецирования при реализации численной схемы и Ю. М. Чувильскому за предварительное обсуждение полученных результатов с указанием важности исследования механизма резонансной прозрачности кулоновских барьеров.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. B. N. Zakhariev and A. A. Suzko, *Direct and Inverse Problems, Potentials in quantum Scattering*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg (1990).
2. N. Saito and Y. Kayanuma, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, 3759 (1994).
3. G. F. Bonini, A. G. Cohen, C. Rebbi, and V. A. Rubakov, *Phys. Rev. D* **60**, 076004 (1999), E-prints archive, hep-ph/9901226.

4. В. А. Рубаков, М. Е. Шапошников, УФН **166**, 493 (1996), E-prints archive, hep-ph/9603208.
5. A. N. Kuznetsov and P. G. Tinyakov, Phys. Rev. D **56** 1156 (1997), E-prints archive, hep-ph/9703256.
6. С. И. Виноцкий, Л. И. Пономарев, ЭЧАЯ **13**, 557 (1982).
7. Г. И. Марчук, *Методы вычислительной физики*, Наука, Москва (1989).
8. Дж. Тейлор, *Теория рассеяния*, Мир, Москва (1975).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1974).