ЖЭТФ, 2000, том 118, вып. 4 (10), стр. 849–862

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПЕРЕНОС В СЛУЧАЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЯХ

В. И. Кляцкин[a,b*], *И. Г. Якушкин*[a**]

[a] *Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук 109017, Москва, Россия*

[b] *Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева Дальневосточного отделения Российской академии наук 690041, Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 4 апреля 2000 г.

Рассматривается диффузия частиц и поля пассивной примеси в случайных волновых полях. Особенностью этой задачи является обращение статистических коэффициентов переноса (коэффициентов диффузии) в нуль в обычно используемых приближениях (дельта-коррелированного случайного поля или диффузионного), приводящих к уравнению Фоккера—Планка. В данной работе используется теория возмущений в первом неисчезающем порядке малости, что позволяет вычислить значения этих коэффициентов переноса для волн различной природы.

PACS: 92.60.Dj, 92.60.Ek

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСОБЕННОСТИ ДИФФУЗИИ ЧАСТИЦ В СЛУЧАЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЯХ СКОРОСТИ И ВНЕШНИХ СИЛ

Движение частиц в быстропеременных случайных полях скорости или под действием быстропеременных случайных сил представляет собой важную проблему, имеющую многочисленные приложения в механике, гидродинамике, физике плазмы и т. п. При этом хорошо известно, что стохастический перенос в быстропеременных колебательных и волновых полях приводит к ряду важных физических явлений, таких, например, как ускорение Ферми, стохастический нагрев плазмы и т. п. [1, 2]. Обычное описание этих явлений основывается на уравнении Фоккера—Планка, коэффициенты которого выражаются через корреляционные функции случайных полей и вычисляются с помощью методов усреднения, развитых для нелинейных уравнений. Полученные таким образом результаты, хотя и отражают основные черты изучаемых явлений, но не имеют универсального характера и четко определенной области применимости.

*E-mail: klyatskin@hotmail.com

**E-mail: yakushk@omega.ifaran.ru

Вместе с тем известно, что широкий класс задач поддается достаточно полному описанию при использовании приближения дельта-коррелированного случайного процесса, диффузионного приближения или их некоторых обобщений на основе функциональной техники с вариационными производными (см., например, [3–7]). Вычисление коэффициентов переноса для случайных волновых полей указывает на то, что они могут быть в ряде случаев величинами второго порядка малости по отношению к величинам, фигурирующим в обычных вариантах теории короткокоррелированных случайных полей. В силу этого определенный интерес представляет развитие общей методики вывода уравнений для статистических характеристик стохастического переноса частиц и полей и вычисления коэффициентов переноса с учетом членов второго порядка малости, если коэффициенты первого порядка малости обращаются в нуль.

Общая методика таких вычислений была предложена еще в работе [8] (см. также [3, 9]). Эта методика позволяет рассматривать с единой точки зрения целый ряд явлений, для описания которых разными авторами применяются различные подходы, вычислять статистические характеристики ансамблей частиц и полей, а также указывать области применимости полученных уравнений.

Для описания диффузии частиц в поле случайных скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ обычно используется дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\mathbf{u}(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0. \tag{1}$$

Диффузия же частиц в поле случайных внешних сил $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ с линейным трением описывается системой уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\mathbf{v}(t), \quad \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t)=-\lambda\mathbf{v}(t)+\mathbf{f}(\mathbf{r},t),\\ \mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0)=\mathbf{v}_0.\end{gathered} \tag{2}$$

Введем в рассмотрение индикаторные функции для уравнений (1) и (2),

$$\begin{gathered}\varphi(\mathbf{r},t)=\delta\left(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}\right),\\ \varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\delta\left(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}\right)\delta\left(\mathbf{v}(t)-\mathbf{v}\right),\end{gathered} \tag{3}$$

описываемые уравнениями Лиувилля (см., например, [3])

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left\{\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\varphi(\mathbf{r},t)\right\},\\ \varphi(\mathbf{r},0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}-\lambda\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{v}\right)\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\\ =-\mathbf{f}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t),\\ \varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0).\end{gathered} \tag{4}$$

Тогда среднее значение индикаторной функции $\varphi(\mathbf{r},t)$ по ансамблю реализаций случайного поля $\{\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\}$ будет описывать одноточечную плотность вероятностей положения частицы,

$$P(\mathbf{r},t)=\langle\varphi(\mathbf{r},t)\rangle_{\mathbf{u}}=\langle\delta\left(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}\right)\rangle_{\mathbf{u}},$$

а среднее значение индикаторной функции $\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ по ансамблю реализаций случайного поля $\{\mathbf{f}(\mathbf{r},t)\}$ будет описывать совместную одноточечную плотность вероятностей положения частицы и ее скорости,

$$\begin{aligned}P(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\langle\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\rangle_{\mathbf{f}}=&\\ =\langle\delta\left(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}\right)\delta\left(\mathbf{v}(t)-\mathbf{v}\right)\rangle_{\mathbf{f}}&.\end{aligned}$$

Усредним уравнения (4) по ансамблю реализаций случайных полей $\{\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\}$ и $\{\mathbf{f}(\mathbf{r},t)\}$. В результате получаем незамкнутые уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\varphi(\mathbf{r},t)\right\rangle,\\ P(\mathbf{r},0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}-\lambda\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{v}\right)P(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\\ =-\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\left\langle\mathbf{f}(\mathbf{r},t)\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\right\rangle,\\ P(\mathbf{r},\mathbf{v},0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0),\end{gathered} \tag{5}$$

содержащие корреляции $\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\varphi(\mathbf{r},t)\rangle$ и $\langle\mathbf{f}(\mathbf{r},t)\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\rangle$. Будем считать поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ гауссовыми случайными полями, однородными в пространстве и стационарными во времени с нулевыми средними значениями и корреляционными тензорами

$$\begin{gathered}B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')=\langle u_i(\mathbf{r},t)u_j(\mathbf{r}',t')\rangle,\\ B_{ij}^{(\mathbf{f})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')=\langle f_i(\mathbf{r},t)f_j(\mathbf{r}',t')\rangle.\end{gathered} \tag{6}$$

Тогда расщепление корреляций можно осуществить на основе формулы Фурутцу—Новикова (см., например, [3, 6, 10])

$$\begin{aligned}\langle f_k(\mathbf{x},t)R[t;\mathbf{f}(\mathbf{y},\tau)]\rangle=\int d\mathbf{x}'\int dt' B_{kl}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')\times&\\ \times\left\langle\frac{\delta}{\delta f_l(\mathbf{x}',t')}R[t;\mathbf{f}(\mathbf{y},\tau)]\right\rangle&,\end{aligned} \tag{7}$$

справедливой для корреляции гауссова случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ с произвольным функционалом $R[t;\mathbf{f}(\mathbf{y},\tau)]$ от него. Следовательно уравнения (5) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial}{\partial r_i}\int d\mathbf{r}'\int\limits_0^t dt' B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\times\\ \times\left\langle\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')}\varphi(\mathbf{r},t)\right\rangle_{\mathbf{u}},\\ P(\mathbf{r},0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}-\lambda\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{v}\right)P(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\\ =\frac{\partial}{\partial v_i}\int d\mathbf{r}'\int\limits_0^t dt' B_{ij}^{(\mathbf{f})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\times\\ \times\left\langle\left[\frac{\partial}{\partial r_k}\frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')}+\frac{\partial}{\partial v_k}\frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')}\right]\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\right\rangle_{\mathbf{f}},\\ P(\mathbf{r},\mathbf{v},0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0).\end{gathered} \tag{8}$$

Далее для получения замкнутых уравнений требуется использовать асимптотические методы. Простейшими такими методами являются приближение дельта-коррелированности во времени случайных полей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ и диффузионное приближение.

1.1. Приближение дельта-коррелированности

В приближении дельта-коррелированности во времени случайных полей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ корреляционные тензоры (6) аппроксимируются выражениями

$$B_{ij}(\mathbf{r},t) = 2B_{ij}^{eff}(\mathbf{r})\delta(t-t'), \tag{9}$$

где

$$B_{ij}^{eff}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt B_{ij}(\mathbf{r},t) = \int\limits_{0}^{\infty} dt B_{ij}(\mathbf{r},t). \tag{10}$$

Учитывая теперь равенства

$$\begin{gathered}
\left.\frac{\delta\varphi(\mathbf{r},t)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')}\right|_{t=t'} = -\frac{\partial}{\partial r_j}\left\{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\varphi(\mathbf{r},t')\right\}, \\
\left.\frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')}\right|_{t=t'} = 0, \\
\left.\frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')}\right|_{t=t'} = \delta_{kj}\delta(\mathbf{r}(t')-\mathbf{r}'),
\end{gathered} \tag{11}$$

вытекающие из (4) и (2), уравнения (8) можно переписать в замкнутой форме, соответствующей уравнению Фоккера—Планка,

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{r},t) = D_{ij}^{(\mathbf{u})}\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}P(\mathbf{r},t), \\
P(\mathbf{r},0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),
\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{v}\right) P(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \\
= D_{ij}^{(\mathbf{f})}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}P(\mathbf{r},\mathbf{v},t), \\
P(\mathbf{r},\mathbf{v},0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0),
\end{gathered} \tag{13}$$

с диффузионными тензорами

$$\begin{gathered}
D_{ij}^{(\mathbf{u})} = \int\limits_0^{\infty} d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(0,\tau), \\
D_{ij}^{(\mathbf{f})} = \int\limits_0^{\infty} d\tau B_{ij}^{(\mathbf{f})}(0,\tau).
\end{gathered} \tag{14}$$

При этом решения стохастических уравнений (1) и (2) являются векторными марковскими процессами, плотность вероятностей перехода которых также описывается уравнениями (12), (13). Условием применимости приближения дельта-коррелированности во времени случайных полей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ является, очевидно, условие малости временного радиуса корреляции τ_0 случайных полей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ по сравнению со всеми временными масштабами, возникающими в задаче, что требует соответствующей малости флуктуирующих параметров.

В общем случае, интегрируя уравнение (13) по $\mathbf{r}$, получаем замкнутое уравнение для плотности вероятностей скорости частицы:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{v}\right) P(\mathbf{v},t) = \frac{\partial}{\partial v_i}D_{ij}^{(\mathbf{f})}\frac{\partial}{\partial v_j}P(\mathbf{v},t), \\
P(\mathbf{r},\mathbf{v},0) = \delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0),
\end{gathered} \tag{15}$$

которое имеет стационарное распределение вероятностей, описывающееся уравнением

$$\lambda\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{v}P(\mathbf{v}) = -\frac{\partial}{\partial v_i}D_{ij}^{(\mathbf{f})}\frac{\partial}{\partial v_j}P(\mathbf{v}). \tag{16}$$

Скорость установления этого распределения зависит от параметра λ. Для достаточно большого значения параметра λ стационарное распределение (16) устанавливается быстро, а временная эволюция плотности вероятностей для положения частицы будет описываться уравнением (12) с диффузионным тензором

$$D_{ij}^{(\mathbf{u})} = \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^{\infty} d\tau B_{ij}^{(\mathbf{f})}(0,\tau),$$

что означает статистическую эквивалентность рассматриваемой задачи задаче о диффузии частицы в случайном поле скоростей вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{f}(\mathbf{r},t). \tag{17}$$

Переход от уравнения (13) к уравнению (12) составляет так называемую проблему Крамерса (см., например, [11]).

1.2. Диффузионное приближение

Учет конечности временного радиуса корреляции случайных полей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ можно провести в рамках диффузионного приближения. Это приближение более наглядно и физично, чем формальное математическое приближение дельта-коррелированного случайного поля. Оно справедливо также для достаточно малых флуктуаций параметров стохастической динамической системы и позволяет получить не только условия применимости дельта-коррелированного приближения, но и описать новые физические эффекты, порожденные конечностью временного радиуса корреляции случайных параметров. В рамках диффузионного приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка τ_0 несущественно, т. е. система на этих масштабах эволюционирует как свободная.

В диффузионном приближении уравнения для соответствующих плотностей вероятностей (8) являются точными. Соответствующие упрощения задачи осуществляются на уровне функциональной зависимости решения задачи от флуктуирующих параметров. Так, для задачи (1) в диффузионном приближении индикаторная функция и ее вариационная производная на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции τ_0 случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ описываются системой динамических уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta\varphi(\mathbf{r},t)}{\delta u_i(\mathbf{r}',t')}=0,\\ \left.\frac{\delta\varphi(\mathbf{r},t)}{\delta u_i(\mathbf{r}',t')}\right|_{t=t'}=-\frac{\partial}{\partial r_i}\left\{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\varphi(\mathbf{r},t')\right\},\\ \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r},t)=0,\quad \varphi(\mathbf{r},t)|_{t=t'}=\varphi(\mathbf{r},t').\end{gathered}\tag{18}$$

Подставляя решение системы (18) в первое из уравнений (8), получаем уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{r},t)=D_{ij}^{(\mathbf{u})}(t)\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}P(\mathbf{r},t),\\ P(\mathbf{r},0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\end{gathered}\tag{19}$$

где теперь диффузионный тензор имеет вид

$$D_{ij}^{(\mathbf{u})}(t)=\int_0^t d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(0,\tau).\tag{20}$$

Уравнение (19) с диффузионным тензором (20) справедливо для всех времен t. Однако в этом случае решение задачи (1) $\mathbf{r}(t)$ не является векторным марковским случайным процессом, так как его многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации с помощью плотности вероятностей перехода. В асимптотическом случае $t \gg \tau_0$ решение исходной динамической системы (1) в диффузионном приближении уже будет марковским случайным процессом, описывающимся уравнением (12) с коэффициентом диффузии (14), т. е. в этом асимптотическом случае диффузионное приближение совпадает с приближением дельта-коррелированности во времени случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$. Это обусловлено, очевидно, отсутствием среднего потока в уравнении (1).

Аналогичным образом для динамической задачи (2) вариационные производные функций $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$, входящие в уравнение (8), в диффузионном приближении на масштабах порядка временного радиуса корреляции τ_0 случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ описываются детерминированной системой уравнений, вытекающей из (2) при $t' < t$,

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')}=\frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')},\\ \frac{d}{dt}\frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')}=-\lambda\frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')},\end{gathered}\tag{21}$$

начальные условия для которой,

$$\begin{gathered}\left.\frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')}\right|_{t=t'}=0,\\ \left.\frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')}\right|_{t=t'}=\delta_{kj}\delta(\mathbf{r}(t')-\mathbf{r}'),\end{gathered}\tag{22}$$

однако, содержат случайности в виде стохастической функции $\mathbf{r}(t')$.

Решение системы (21) с начальными условиями (22) имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')}=\delta_{kj}e^{-\lambda(t-t')}\delta(\mathbf{r}(t')-\mathbf{r}'),\\ \frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}',t')}=\frac{1}{\lambda}\delta_{kj}\left[1-e^{-\lambda(t-t')}\right]\delta(\mathbf{r}(t')-\mathbf{r}').\end{gathered}\tag{23}$$

Далее, считая, что на таких масштабах времени действие случайных сил несущественно и для динамики самой частицы, мы можем заменить значение $\mathbf{r}(t')$, входящее в (23), на $\mathbf{r}(t)$, используя упрощенную систему уравнений (2),

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\mathbf{v}(t),\quad \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t)=-\lambda\mathbf{v}(t)\tag{24}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r}(t)|_{t=t'}=\mathbf{r}(t'),\quad \mathbf{v}(t)|_{t=t'}=\mathbf{v}(t'),\tag{25}$$

откуда следует, что

$$\begin{gathered}\mathbf{r}(t')=\mathbf{r}(t)-\frac{1}{\lambda}\mathbf{v}\left[e^{\lambda(t-t')}-1\right],\\ \mathbf{v}(t')=e^{\lambda(t-t')}\mathbf{v}(t).\end{gathered}\tag{26}$$

Используя выражения (23) и (26), можно теперь уравнение (8) записать в замкнутом виде [9]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}-\lambda\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{v}\right)P(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\frac{\partial}{\partial v_i}\times \\ \times\left\{D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v},t)\frac{\partial}{\partial v_j}+D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v},t)\frac{\partial}{\partial r_j}\right\}P(\mathbf{r},\mathbf{v},t),\tag{27}$$

где введены коэффициенты диффузии

$$
\begin{aligned}
D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v},t) &= \int\limits_0^t d\tau e^{-\lambda\tau} \times \\
&\times B_{ij}^{(\mathbf{f})}\left(\frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda\tau}-1\right]\mathbf{v},\tau\right), \\
D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v},t) &= \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t d\tau\left[1-e^{-\lambda\tau}\right] \times \\
&\times B_{ij}^{(\mathbf{f})}\left(\frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda\tau}-1\right]\mathbf{v},\tau\right).
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Уравнение (28) правильно описывает одноточечную плотность вероятностей и для времен $t < \tau_0$. Однако в этом случае решение задачи (2) $\{\mathbf{r}(t),\mathbf{v}(t)\}$ не является векторным марковским случайным процессом, так как его многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации с помощью плотности вероятностей перехода. В асимптотическом случае $t \gg \tau_0$ решение исходной динамической системы (2) уже будет марковским случайным процессом. В этом случае можно верхние пределы в интегралах (28) заменить на бесконечность. При этом мы приходим к уравнению Фоккера—Планка для одновременной плотности вероятностей,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}-\lambda\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{v}\right)P(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \frac{\partial}{\partial v_i}\times \\
&\times\left\{D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial v_j}+D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial r_j}\right\}P(\mathbf{r},\mathbf{v},t), \\
&P(\mathbf{r},\mathbf{v},0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0),
\end{aligned}
\tag{29}
$$

с коэффициентами диффузии

$$
\begin{aligned}
D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) &= \int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \times \\
&\times B_{ij}^{(\mathbf{f})}\left(\frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda\tau}-1\right]\mathbf{v},\tau\right), \\
D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty d\tau\left[1-e^{-\lambda\tau}\right] \times \\
&\times B_{ij}^{(\mathbf{f})}\left(\frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda\tau}-1\right]\mathbf{v},\tau\right).
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Отметим, что приближению дельта-коррелированного случайного поля (т. е. уравнению (12)) соответствует уравнение (27) с коэффициентами диффузии

$$
D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) = \int\limits_0^\infty d\tau B_{ij}^{(\mathbf{f})}(0,\tau), \quad D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}) = 0.
$$

При отсутствии трения уравнение (29) упрощается и принимает вид [1]

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)P(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \frac{\partial}{\partial v_i}\times \\
&\times\left\{D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial v_j}+D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial r_j}\right\}P(\mathbf{r},\mathbf{v},t), \\
&P(\mathbf{r},\mathbf{v},0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)
\end{aligned}
\tag{31}
$$

с коэффициентами диффузии

$$
\begin{aligned}
D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) &= \int\limits_0^\infty d\tau B_{ij}^{(\mathbf{f})}(\mathbf{v}\tau,\tau), \\
D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}) &= \int\limits_0^\infty \tau d\tau B_{ij}^{(\mathbf{f})}(\mathbf{v}\tau,\tau).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

При достаточно большом значении параметра λ рассматриваемая задача аналогична задаче Крамерса для дельта-коррелированного приближения поля случайных сил $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$. При этом очевидно, что плотность вероятностей положения частицы будет описываться уравнением (19), что статистически эквивалентно переходу к динамическому уравнению (1) с полем скоростей вида (17).

Введем в рассмотрение новое поле $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)$ с единичной дисперсией, такое что

$$
\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \sigma_{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t),
$$

где дисперсия поля скоростей

$$
\sigma_{\mathbf{u}}^2 = B_{ii}^{(\mathbf{u})}(0,0).
$$

Будем считать, что это случайное поле имеет волновое происхождение и, следовательно, его корреляционный тензор имеет структуру

$$
B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{k}F_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{k})\cos\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t\}, \tag{33}
$$

где спектральная функция $F_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{k})$ такова, что $\int d\mathbf{k}F_{ii}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{k}) = 1$, и $\omega = \omega(\mathbf{k}) > 0$ — дисперсионная кривая для волновых движений.

Так, например, для акустических волн $\omega(\mathbf{k}) = ck$, где c — скорость распространения звука, для гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{gk}$, для внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде $\omega(\mathbf{k}) = N\sqrt{k^2-k_z^2}/k$, где N — частота Брента—Вяйсяля, для волн Россби в атмосфере и океане $\omega(\mathbf{k}) = -\beta k_x/k^2$, где β — градиент силы Кориолиса в направлении y, и т. п.

Пусть спектральная функция удовлетворяет условию $\Phi_{ij}(0) = 0$, где $\Phi_{ij}(\omega) = \int d\mathbf{k} F_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{k}) \times \delta(\omega - \omega(\mathbf{k}))$ (в дальнейшем будем считать, что выполняется более сильное условие $\Phi_{ij}(\omega)/\omega^2 \to 0$ при $\omega \to 0$). Тогда для корреляционной функции случайного волнового поля $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ имеет место соотношение

$$\int_0^\infty B_{ij}^{(\mathbf{u})}(0, t) dt = 0 \tag{34}$$

и, следовательно, как приближение дельта-коррелированности поля скорости, так и диффузионное приближение для наиболее интересного случая $t \gg \tau_0$ не приводят к конечному результату, так как коэффициенты диффузии обращаются в нуль. Для получения конечного результата необходимо учитывать члены высшего порядка малости. В случае же $t \lesssim \tau_0$ коэффициенты диффузии отличны от нуля, однако поведение частиц за такой период времени не имеет универсального характера и существенно зависит от модели случайного поля скоростей.

Отметим, однако, что в общем случае стохастической задачи (2) о диффузии частицы в случайном поле сил, имеющих волновую природу, корреляционная функция которых имеет вид аналогичный (33), т. е.

$$B_{ij}^{(\mathbf{f})}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} F_{ij}^{(\mathbf{f})}(\mathbf{k}) \cos\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t\}, \tag{35}$$

уравнения (19) и (31) с коэффициентами диффузии (30), (32) по-прежнему имеют смысл, так как коэффициенты диффузии в этом случае не обращаются в нуль. Так, подставляя выражение (35) в (32) и интегрируя по времени, видим, что коэффициент диффузии не равен нулю,

$$D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) \sim \int d\mathbf{k} F_{ij}^{(\mathbf{f})}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega(\mathbf{k})) \neq 0,$$

из-за наличия резонанса «волна—частица»:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} = \omega(\mathbf{k}).$$

Пусть максимум спектральной функции $F_{ij}(\mathbf{k})$ соответствует некоторому волновому числу k_m, а максимум спектральной функции $\Phi_{ij}(\omega)$ — частоте ω_m. Определим пространственный и временной корреляционные масштабы как $l \sim 2\pi/k_m$, $\tau_0 \sim 2\pi/\omega_m$. При этом величина $\varepsilon = \sigma_{\mathbf{u}}\tau_0/l$ для реальных волновых полей, как правило, мала и может рассматриваться как основной малый параметр задачи, т. е. $\varepsilon \ll 1$. Будем также считать, что во всей области, где определен спектр поля скоростей, справедливо неравенство $\sigma_{\mathbf{u}} k \ll \omega(k)$. Последнее условие обусловливает отсутствие резонансов между разными компонентами поля скорости.

Существование максимумов спектральных функций $F_{ij}(\mathbf{k})$ и $\Phi_{ij}(\omega)$ отнюдь не означает присутствия квазирегулярной составляющей в поле случайных скоростей. Их существование обусловлено тем, что само поле скоростей является результатом дифференцирования (по пространству и времени) других вспомогательных волновых полей (например, поля потенциала для потенциального поля скоростей или поля смещения границы раздела и т. п.). Конечно, если спектральные функции являются очень «узкими», т. е. имеют дельта-образный вид относительно центральной частоты (волнового числа), то возможно предварительно упростить задачу путем динамического усреднения по быстрым осцилляциям с центральной частотой (волновым числом) исходных стохастических уравнений. Однако для большинства геофизических волновых задач такая ситуация не осуществляется.

Отметим, что гипотеза статистической пространственной однородности имеет, вообще говоря, ограниченную применимость и несправедлива, например, для волн в атмосферном или океаническом волноводах, при рассмотрении переноса ограниченными волновыми пакетами и т. п. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением гауссова статистически однородного волнового поля скоростей, сосредоточив внимание на принципиальной стороне вопроса. Для получения конкретных количественных результатов необходимо рассматривать статистические модели самого волнового поля с точностью до квадратичных членов. При этом, вообще говоря, возникают средний перенос (стоксов дрейф) и диффузия частиц, которые для разных частных случаев рассматривались, например, в работах [12–14] на основе подхода, предложенного в свое время Тейлором [15]. Нашей же целью является применение к указанному классу задач более общего и последовательного подхода, справедливого для волн различной природы, и позволяющего получить некоторые обобщения теории переноса, основанной на уравнении Фоккера—Планка. Этот подход позволяет вычислять различные статистические характеристики ансамблей частиц, переносимых волновыми течениями, и анализировать на основе методов статистической топографии [5–7] эффекты, связанные с кластеризацией и образованием когерентных структур в полях плотности примеси.

Далее мы более подробно рассмотрим диффузию пассивной примеси (частиц и поля плотности концентрации примеси) в случайном поле скоростей, имеющем волновую природу, для которой, как мы видели ранее, диффузионное приближение эквивалентно приближению дельта-коррелированности поля скоростей и приводит к нулевым коэффициентам диффузии.

2. ДИФФУЗИЯ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

Диффузия пассивной примеси в случайном поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ описывается линейным уравнением в частных производных первого порядка, являющимся уравнением непрерывности для плотности консервативной примеси:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_{\mathbf{u}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)\right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \\ \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}),\end{gathered} \tag{36}$$

где $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ — статистически однородное в пространстве и стационарное во времени случайное волновое векторное поле со средним значением $\langle\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)\rangle = 0$, и корреляционным тензором

$$\langle\tilde{u}_i(\mathbf{r}, t)\tilde{u}_j(\mathbf{r}', t')\rangle = B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$$

$$(B_{ii}(0, 0) = 1).$$

Общая масса примеси при этом сохраняется, т. е.

$$M = M(t) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) = M_0.$$

Линейное уравнение в частных производных первого порядка (36) может быть решено методом характеристик. Вводя характеристические кривые (траектории частицы), динамика которых описывается уравнением (1),

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \sigma_{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \tag{37}$$

(36) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\rho(t) = -\sigma_{\mathbf{u}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t), \\ \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0).\end{gathered} \tag{38}$$

Такая формулировка задачи соответствует лагранжеву описанию, в то время как исходное динамическое уравнение (36) соответствует эйлерову описанию.

Решение системы уравнений (37), (38) зависит от характеристического параметра — начального значения $\mathbf{r}_0$, что будем отмечать вертикальной чертой:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), \quad \rho(t) = \rho(t|\mathbf{r}_0). \tag{39}$$

Первое из равенств (39) можно рассматривать как алгебраическое уравнение для параметра $\mathbf{r}_0$, решение которого $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)$ существует, так как расходимость $j(t|\mathbf{r}_0) = \det ||j_{ik}(t|\mathbf{r}_0)||$ отлична от нуля, где

$$j_{ik}(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0)}{\partial r_{0k}}.$$

Следовательно, решение исходного уравнения (36) можно записать в виде равенства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta\left(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}\right), \tag{40}$$

устанавливающего связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками.

Дельта-функция в правой части равенства (40) является индикаторной функцией для положения лагранжевой частицы, и, следовательно, после усреднения ее по ансамблю реализаций случайного поля скоростей $\{\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)\}$ получаем хорошо известную связь одновременной плотности вероятностей положения частицы в лагранжевом описании $P(t, \mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \langle\delta\left(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}\right)\rangle$ со средней плотностью в эйлеровом описании (см., например, [10])

$$\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rangle = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) P\left(t, \mathbf{r}|\mathbf{r}_0\right). \tag{41}$$

3. ЛАГРАНЖЕВО ОПИСАНИЕ

Введем обозначения для индикаторной функции координаты лагранжевой частицы,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \delta\left(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}\right), \tag{42}$$

а также первой и второй вариационных производных, необходимых для вычисления в дальнейшем статистических средних:

$$\begin{gathered}\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta\tilde{u}_i(\mathbf{r}', t')} = \sigma_{\mathbf{u}} S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'), \\ \frac{\delta^2\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta\tilde{u}_i(\mathbf{r}', t')\delta\tilde{u}_j(\mathbf{r}'', t'')} = \sigma_{\mathbf{u}}^2 S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t'').\end{gathered} \tag{43}$$

Для индикаторной функции имеем стохастическое уравнение Лиувилля

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r}, t) = -\sigma_{\mathbf{u}} \frac{\partial}{\partial r_k}\left\{\tilde{u}_k(\mathbf{r}, t)\varphi(\mathbf{r}, t)\right\}, \\ \varphi(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),\end{gathered} \tag{44}$$

которое можно переписать в виде интегрального уравнения

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - \sigma_{\mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial r_k} \times \int\limits_0^t d\tau\, \tilde{u}_k(\mathbf{r},\tau)\varphi(\mathbf{r},\tau). \quad (45)$$

Соответственно, для первой вариационной производной (43), учитывая, что она отлична от нуля только при $t \ge t'$, получаем стохастическое интегральное уравнение

$$S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = \hat{L}_i(\mathbf{r},\mathbf{r}')\varphi(\mathbf{r},t')\theta(t-t') - \sigma_{\mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial r_k}\int\limits_{t'}^t d\tau\, \tilde{u}_k(\mathbf{r},\tau)S_i(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}',t'), \quad (46)$$

где действие оператора $\hat{L}_j(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ на функцию $f(\mathbf{r})$ описывается формулой

$$\hat{L}_i(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial r_i}\left\{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')f(\mathbf{r})\right\}. \quad (47)$$

Аналогичным образом для второй вариационной производной получаем стохастическое интегральное уравнение

$$S_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\mathbf{r}'',t'') = \hat{L}_i(\mathbf{r},\mathbf{r}')S_j(\mathbf{r},t';\mathbf{r}'',t'') \times \theta(t-t')\theta(t'-t'') + \hat{L}_j(\mathbf{r},\mathbf{r}'')S_i(\mathbf{r},t'';\mathbf{r}',t')\theta(t-t'')\theta(t''-t') - \sigma_{\mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial r_l}\int\limits_{\max\{t',t''\}}^t d\tau \tilde{u}_l(\mathbf{r},\tau)S_{ij}(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}',t';\mathbf{r}'',t''). \quad (48)$$

Усредним теперь уравнение (44) по ансамблю реализаций поля $\{\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)\}$. Тогда для лагранжевой плотности вероятности положения частицы $P(\mathbf{r},t) = \langle\varphi(\mathbf{r},t)\rangle$, используя подход работ [3–6], с учетом формулы Фурутцу—Новикова (7) получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{r},t) = -\sigma^2_{\mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial r_k} \times \int d\mathbf{r}'\int\limits_0^t dt' B_{ki}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\left\langle S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\right\rangle, \quad (49)$$

$$P(\mathbf{r},0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

Интегрируя уравнение (49) по времени в интервале (t_1,t), где $t_1 < t$, получаем равенство

$$P(\mathbf{r},t) - P(\mathbf{r},t_1) = -\sigma^2_{\mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial r_l}\int\limits_{t_1}^t d\tau\int d\mathbf{r}'' \times \int\limits_0^\tau dt'' B_{lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')\left\langle S_j(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}'',t'')\right\rangle. \quad (50)$$

Усредним теперь уравнение (46) по ансамблю реализаций поля $\{\tilde{u}_k(\mathbf{r},t)\}$. Тогда для величины $\langle S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\rangle$ получаем уравнение

$$\left\langle S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\right\rangle = \hat{L}_i(\mathbf{r},\mathbf{r}')P(\mathbf{r},t')\theta(t-t') - \sigma^2_{\mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial r_l}\int\limits_{t'}^t d\tau\int d\mathbf{r}''\int\limits_0^t dt'' \times B_{lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')\left\langle S_{ij}(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}',t';\mathbf{r}'',t'')\right\rangle. \quad (51)$$

Для функции $\langle S_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t'';\mathbf{r}'',t)\rangle$ используем приближенное выражение

$$\left\langle S_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t'';\mathbf{r}'',t)\right\rangle = \hat{L}_i(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left\langle S_j(\mathbf{r},t';\mathbf{r}'',t'')\right\rangle\theta(t-t')\theta(t'-t'') + \hat{L}_j(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\left\langle S_i(\mathbf{r},t'';\mathbf{r}',t')\right\rangle\theta(t-t'')\theta(t''-t'), \quad (52)$$

соответствующее пренебрежению вариационными производными третьего порядка в (48). С учетом этого приближения и равенства (50) уравнение (51) можно записать в виде замкнутого интегрального уравнения:

$$\left\langle S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\right\rangle = \hat{L}_i(\mathbf{r},\mathbf{r}')P(\mathbf{r},t)\theta(t-t') + \sigma^2_{\mathbf{u}}\hat{L}_i(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_l}\int\limits_{t'}^t d\tau\int d\mathbf{r}''\int\limits_0^\tau dt'' \times B_{lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')\left\langle S_j(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}'',t'')\right\rangle - \sigma^2_{\mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial r_l}\int\limits_{t'}^t d\tau\int d\mathbf{r}''\int\limits_0^{t'} dt'' \times B_{lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')\hat{L}_i(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left\langle S_j(\mathbf{r},t';\mathbf{r}'',t'')\right\rangle - \sigma^2_{\mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial r_l}\int\limits_{t'}^t d\tau\int d\mathbf{r}''\int\limits_{t'}^\tau dt'' \times B_{lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')\hat{L}_j(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\left\langle S_i(\mathbf{r},t'';\mathbf{r}',t')\right\rangle. \quad (53)$$

Решая уравнение (53) для $\langle S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\rangle$ методом последовательных приближений по параметру $\sigma^2_{\mathbf{u}}$ с точностью до малых членов (при этом временные аргументы t_i у функций $P(\mathbf{r}, t_i)$ можно заменить на t), имеем

$$\langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')\rangle = \Big\{\hat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \hat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_l} \int\limits_{t'}^{t} d\tau \int d\mathbf{r}'' \int\limits_0^{\tau} dt'' \times \\ \times B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t'') \hat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') - \\ - \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial}{\partial r_l} \int\limits_{t'}^{t} d\tau \int d\mathbf{r}'' \int\limits_0^{t'} dt'' \times \\ \times B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'') \hat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') - \\ - \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial}{\partial r_l} \int\limits_{t'}^{t} d\tau \int d\mathbf{r}'' \int\limits_{t'}^{\tau} dt'' \times \\ \times B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'') \hat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')\ \hat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Big\} P(\mathbf{r}, t). \quad (54)$$

Подставляя (54) в уравнение (49), можно выполнить интегрирование по всем пространственным переменным и получить уравнение третьего порядка по $\mathbf{r}$ (в котором можно опустить члены с производной первого порядка, пропорциональные $\sigma_{\mathbf{u}}^4$):

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int\limits_0^t dt' \frac{\partial B_{ki}(0, t')}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_k} P(\mathbf{r}, t) + \\ + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int\limits_0^t dt' B_{ki}(0, t') \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_i} P(\mathbf{r}, t) + \\ + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_l} \int\limits_0^t dt' B_{ki}(0, t - t') \int\limits_{t'}^{t} d\tau \times \\ \times \int\limits_0^{t'} dt'' \frac{\partial^2 B_{lj}(0, \tau - t'')}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t) + \\ + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_l} \int\limits_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(0, t - t')}{\partial r_i \partial r_j} \int\limits_{t'}^{t} d\tau \times \\ \times \int\limits_{t'}^{\tau} dt'' B_{lj}(0, \tau - t'') P(\mathbf{r}, t) + \\ + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_j} \int\limits_0^t dt' \frac{\partial B_{ki}(0, t - t')}{\partial r_l} \int\limits_{t'}^{t} d\tau \times \\ \times \int\limits_0^{t'} dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, \tau - t'')}{\partial r_i} P(\mathbf{r}, t) + \\ + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_i} \int\limits_0^t dt' \frac{\partial B_{ki}(0, t - t')}{\partial r_l} \int\limits_{t'}^{t} d\tau \times \\ \times \int\limits_0^{\tau} dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, t'')}{\partial r_j} P(\mathbf{r}, t) + \\ + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_j} \int\limits_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(0, t - t')}{\partial r_i \partial r_l} \int\limits_{t'}^{t} d\tau \times \\ \times \int\limits_0^{\tau} dt'' B_{lj}(0, t'') P(\mathbf{r}, t) + \\ + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_i} \int\limits_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(0, t - t')}{\partial r_l \partial r_j} \int\limits_{t'}^{t} d\tau \times \\ \times \int\limits_{t'}^{\tau} dt'' B_{lj}(0, \tau - t'') P(\mathbf{r}, t) - \\ - \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^3}{\partial r_k \partial r_l \partial r_j} \int\limits_0^t dt' B_{ki}(0, t - t') \int\limits_{t'}^{t} d\tau \times \\ \times \int\limits_0^{t'} dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, \tau - t'')}{\partial r_i} P(\mathbf{r}, t) - \\ - \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^3}{\partial r_k \partial r_l \partial r_i} \int\limits_0^t dt' \frac{\partial B_{ki}(0, t - t')}{\partial r_j} \int\limits_{t'}^{t} d\tau \times \\ \times \int\limits_{t'}^{\tau} dt'' B_{lj}(0, \tau - t'') P(\mathbf{r}, t) - \\ - \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^3}{\partial r_k \partial r_i \partial r_j} \int\limits_0^t dt' \frac{\partial B_{ki}(0, t - t')}{\partial r_l} \int\limits_{t'}^{t} d\tau \times \\ \times \int\limits_0^{\tau} dt'' B_{lj}(0, t'') P(\mathbf{r}, t). \quad (55)$$

Уравнение (55) не является, вообще говоря, уравнением для плотности вероятности, так как может приводить к отрицательным величинам в области ее малых значений. Вместе с тем его решение правильно описывает статистические моменты и в этом смысле является обобщением уравнения Фоккера—Планка. Используя теперь спектральное представление поля скоростей (33) и его свойства, можно выполнить интегрирование по времени в коэффициентах уравнения, и для больших значений времен ($t \gg \tau_0$) уравнение (55) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} k_i F_{ki}(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial r_k} P(\mathbf{r}, t) +$$

$$+ \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{1j} F_{ki}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \times$$
$$\times \delta(\omega_1 - \omega_2) \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_i} P(\mathbf{r}, t) +$$
$$+ \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{2i} F_{ki}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \times$$
$$\times \delta(\omega_1 - \omega_2) \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \qquad (56)$$

где $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$.

Уравнение (56) уже представляет собой уравнение Фоккера—Планка, описывающее плотность вероятности положения частицы, переносимой статистически однородным гауссовым волновым полем скоростей.

Для изотропных флуктуаций поля $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ уравнение (56) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = D_N \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} P(\mathbf{r}, t), \qquad (57)$$

соответствующий гауссовому случайному векторному процессу $\mathbf{r}(t)$ со средним значением $\langle \mathbf{r}(t) \rangle = \mathbf{r}_0$ и дисперсией

$$\sigma_{\mathbf{r}}^2(t) = \left\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2 \right\rangle = 2ND_N t, \qquad (58)$$

где N — размерность пространства, а D_N — коэффициент диффузии,

$$D_N = \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2N} \int d\mathbf{k}_1 \times$$
$$\times \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{1j} F_{ii}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2). \qquad (59)$$

В этом случае спектральный тензор волнового поля скоростей имеет структуру

$$F_{ki}(\mathbf{k}) = F^s(k) \left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{\mathbf{k}^2} \right) + F^p(k) \frac{k_i k_k}{\mathbf{k}^2}, \qquad (60)$$

где $F^s(k)$ и $F^p(k)$ — соответственно соленоидальная и потенциальная составляющие спектрального тензора, $\omega(\mathbf{k}) \equiv \omega(k)$, и, следовательно, для коэффициента диффузии получаем выражение

$$D_N = \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2N} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\omega_1^2} k_1^2 F_{ii}(\mathbf{k}_1) \times$$
$$\times \int d\mathbf{k}_2 F_{ll}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) =$$
$$= \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2N} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\omega_1^2} k_1^2 \left[F^s(k_1)(N-1) + F^p(k_1) \right]^2 \times$$
$$\times \int d\mathbf{k}_2 \delta(\omega_1 - \omega_2). \qquad (61)$$

Для анизотропной среды появляется пространственная асимметрия векторного процесса $\mathbf{r}(t)$. Его среднее значение и дисперсия описываются выражениями

$$\langle r_m(t) \rangle = r_{0m} + t\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} k_i F_{mi}(\mathbf{k}),$$
$$\sigma_{\mathbf{r}}^2(t) = \left\langle \mathbf{r}^2(t) - \langle \mathbf{r}(t) \rangle^2 \right\rangle =$$
$$= t\sigma_{\mathbf{u}}^4 \pi \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{1j} F_{ii}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \times \qquad (62)$$
$$\times \delta(\omega_1 - \omega_2) + t\sigma_{\mathbf{u}}^4 \pi \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{2i} \times$$
$$\times F_{ki}(\mathbf{k}_1) F_{lk}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2).$$

Как мы видим, коэффициент диффузии оказывается пропорциональным не дисперсии поля скоростей, а ее квадрату. Это связано с тем, что в данной задаче отсутствуют резонансы типа «волна—частица», что ведет к уменьшению порядка дисперсии скорости случайного дрейфа частиц. Задача оказывается подобной задачам о колебаниях маятника Капицы или о вихревом дрейфе заряженных частиц в быстропеременном электрическом поле [1], где основной эффект также имеет квадратичную величину.

4. ЭЙЛЕРОВО ОПИСАНИЕ

Перейдем теперь к статистическому описанию эйлерова представления. Для простоты будем считать, что начальное распределение поля плотности постоянно, $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$, и, следовательно, случайная функция $\rho(\mathbf{r}, t)$ будет статистически однородной в пространстве, т. е. все ее одноточечные статистические характеристики не будут зависеть от пространственной точки $\mathbf{r}$.

Введем индикаторную функцию, аналогичную функции (42) в лагранжевом описании,

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho), \qquad (63)$$

и первую и вторую вариационные производные:

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta \tilde{u}_i(\mathbf{r}', t')} = \sigma_{\mathbf{u}} S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \rho),$$
$$\frac{\delta^2 \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta \tilde{u}_i(\mathbf{r}', t') \delta \tilde{u}_j(\mathbf{r}'', t'')} = \sigma_{\mathbf{u}}^2 S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \rho). \qquad (64)$$

Для индикаторной функции $\varphi(\mathbf{r}, t; \rho)$ с помощью уравнения (36) получаем стохастическое уравнение

Лиувилля (см., например, [4–7]), которое запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r},t;\rho)=\sigma_{\mathbf{u}}\hat N(\mathbf{r},t;\rho)\varphi(\mathbf{r},t;\rho),\qquad \varphi(\mathbf{r},0;\rho)=\delta(\rho(\mathbf{r},0)-\rho_0), \tag{65}$$

где

$$\hat N(\mathbf{r},t;\rho)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)+ \frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right). \tag{66}$$

Уравнение (65) можно переписать в виде интегрального уравнения

$$\varphi(\mathbf{r},t;\rho)=\delta(\rho(\mathbf{r},0)-\rho_0)+ \sigma_{\mathbf{u}}\int\limits_0^t d\tau\hat N(\mathbf{r},\tau;\rho)\varphi(\mathbf{r},\tau;\rho). \tag{67}$$

Соответственно, для первой вариационной производной (64) получаем стохастическое интегральное уравнение

$$S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\rho)=\hat N_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)\varphi(\mathbf{r},t';\rho)\theta(t-t')+ \sigma_{\mathbf{u}}\int\limits_{t'}^t d\tau\hat N(\mathbf{r},\tau;\rho)S_i(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}',t';\rho), \tag{68}$$

где

$$\hat N_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)=\left\{\hat L_i(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\hat M_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)\right\},$$

оператор $\hat L_i(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ описывается формулой (47), а действие оператора $\hat M_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)$ на функцию $f(\mathbf{r};\rho)$ описывается формулой

$$\hat M_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)f(\mathbf{r};\rho)=\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_i}\times \left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)f(\mathbf{r};\rho). \tag{69}$$

Аналогичным образом для второй вариационной производной получаем стохастическое интегральное уравнение

$$\begin{aligned}S_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\mathbf{r}'',t'';\rho)&=\\ =\hat N_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)&S_j(\mathbf{r},t';\mathbf{r}'',t'';\rho)\theta(t-t')\theta(t'-t'')+\\ +\hat N_j(\mathbf{r},\mathbf{r}'';\rho)&S_i(\mathbf{r},t'';\mathbf{r}',t';\rho)\theta(t-t'')\theta(t''-t')+\\ +\sigma_{\mathbf{u}}\int\limits_{\max\{t',t''\}}^t d\tau\,&\hat N(\mathbf{r},\tau;\rho)S_{ij}(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}',t';\mathbf{r}'',t'';\rho).\end{aligned} \tag{70}$$

Далее будем действовать, как и в случае лагранжева описания. Усредним уравнение (65) по ансамблю реализаций поля $\{\tilde u_k(\mathbf{r},t)\}$. Тогда для эйлеровой плотности вероятности $P(t;\rho)=\langle\varphi(\mathbf{r},t;\rho)\rangle$ с учетом формулы Фурутцу—Новикова (7) получаем уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(t;\rho)&=\sigma_{\mathbf{u}}^2\int d\mathbf{r}'\int\limits_0^t dt'\frac{\partial B_{ki}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')}{\partial r_k}\times\\ &\times\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\langle S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\rangle,\\ P(0;\rho)&=\delta(\rho-\rho_0).\end{aligned} \tag{71}$$

Усредним теперь уравнение (68) по ансамблю реализаций поля $\{\tilde u_k(\mathbf{r},t)\}$. Тогда для величины $\langle S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\rho)\rangle$ получаем уравнение

$$\begin{aligned}\langle S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\rho)\rangle&=\hat N_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)P(t';\rho)\theta(t-t')-\\ &-\sigma_{\mathbf{u}}^2\int\limits_{t'}^t d\tau\int d\mathbf{r}''\int\limits_0^t dt''\frac{\partial}{\partial r_k}B_{kj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')\times\\ &\times\langle S_{ij}(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}',t';\mathbf{r}'',t'';\rho)\rangle+\\ &+\sigma_{\mathbf{u}}^2\int\limits_{t'}^t d\tau\int d\mathbf{r}''\int\limits_0^t dt''\frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')}{\partial r_k}\times\\ &\times\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\langle S_{ij}(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}',t';\mathbf{r}'',t'';\rho)\rangle.\end{aligned} \tag{72}$$

Для функции $\langle S_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\mathbf{r}'',t'')\rangle$ используем приближенное выражение

$$\begin{aligned}&\langle S_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\mathbf{r}'',t'';\rho)\rangle=\\ &=\hat N_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)\langle S_j(\mathbf{r},t';\mathbf{r}'',t'';\rho)\rangle\theta(t-t')\theta(t'-t'')+\\ &+\hat N_j(\mathbf{r},\mathbf{r}'';\rho)\langle S_i(\mathbf{r},t'';\mathbf{r}',t';\rho)\rangle\theta(t-t'')\theta(t''-t'),\end{aligned} \tag{73}$$

соответствующее пренебрежению вариационными производными третьего порядка в (70). С учетом этого приближения уравнение (72) можно записать в виде замкнутого интегрального уравнения:

$$\begin{aligned}\langle S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\rho)\rangle&=\hat N_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)P(t;\rho)\theta(t-t')-\\ -\sigma_{\mathbf{u}}^2\hat N_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)&\int\limits_{t'}^t d\tau\int d\mathbf{r}''\int\limits_0^\tau dt''\frac{\partial B_{lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')}{\partial r_l}\times\\ &\times\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\langle S_j(\mathbf{r},\tau;\mathbf{r}'',t'';\rho)\rangle-\end{aligned}$$

$$
-\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\int\limits_{t'}^{t}d\tau\int d\mathbf{r}''\int\limits_{0}^{t'}dt''\frac{\partial}{\partial r_l}B_{lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')\times
\times\hat{N}_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)\left\langle S_j(\mathbf{r},t';\mathbf{r}'',t'';\rho)\right\rangle-
-\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\int\limits_{t'}^{t}d\tau\int d\mathbf{r}''\int\limits_{t'}^{\tau}dt''\frac{\partial}{\partial r_l}B_{lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')\times
\times\hat{N}_j(\mathbf{r},\mathbf{r}'';\rho)\left\langle S_i(\mathbf{r},t'';\mathbf{r}',t';\rho)\right\rangle+
+\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\int\limits_{t'}^{t}d\tau\int d\mathbf{r}''\int\limits_{0}^{t'}dt''\frac{\partial B_{lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')}{\partial r_l}\times
\times\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\hat{N}_i(\mathbf{r},\mathbf{r}';\rho)\left\langle S_j(\mathbf{r},t';\mathbf{r}'',t'';\rho)\right\rangle+
+\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\int\limits_{t'}^{t}d\tau\int d\mathbf{r}''\int\limits_{t'}^{\tau}dt''\frac{\partial B_{lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'',\tau-t'')}{\partial r_l}\times
\times\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\hat{N}_j(\mathbf{r},\mathbf{r}'';\rho)\left\langle S_i(\mathbf{r},t'';\mathbf{r}',t';\rho)\right\rangle. \quad (74)
$$

Решая уравнение (74) для $\langle S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\rho)\rangle$ методом последовательных приближений по параметру $\sigma_{\mathbf{u}}^2$ с точностью до малых членов (при этом временные аргументы t_i у функций $P(t_i;\rho)$ можно заменить на t) и интегрируя по $\mathbf{r}''$, получаем при $t>t'$

$$
\langle S_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\rho)\rangle=
=\hat{T}_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\rho)P(t;\rho)\theta(t-t'), \quad (75)
$$

где оператор $\hat{T}_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\rho)$ определяется равенством

$$
\hat{T}_i(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t';\rho)=\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho+
+\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\int\limits_{t'}^{t}d\tau\int\limits_{0}^{\tau}dt''\times
\times\frac{\partial B_{lj}(0,\tau-t'')}{\partial r_l\partial r_j}\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\rho+
+\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\frac{\partial^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_i\partial r_l}\int\limits_{t'}^{t}d\tau\int\limits_{0}^{t'}dt''\times
\times\frac{\partial B_{lj}(0,\tau-t'')}{\partial r_j}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\rho+
+\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\frac{\partial^3\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_i\partial r_j\partial r_l}\int\limits_{t'}^{t}d\tau\int\limits_{t'}^{\tau}dt''B_{lj}(0,\tau-t'')\frac{\partial}{\partial\rho}\rho+
+\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\frac{\partial^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_i\partial r_l}\int\limits_{t'}^{t}d\tau\int\limits_{t'}^{\tau}dt''\times
\times\frac{\partial B_{lj}(0,\tau-t'')}{\partial r_j}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\rho-
-\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\int\limits_{t'}^{t}d\tau\int\limits_{0}^{t'}dt''\frac{\partial B_{lj}(0,\tau-t'')}{\partial r_l\partial r_j}\times
\times\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\rho-
-\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\frac{\partial^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_i\partial r_j}\int\limits_{t'}^{t}d\tau\int\limits_{t'}^{\tau}dt''\frac{\partial B_{lj}(0,\tau-t'')}{\partial r_l}\times
\times\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\rho-
-\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_i}\int\limits_{t'}^{t}d\tau\int\limits_{t'}^{\tau}dt''\frac{\partial^2 B_{lj}(0,\tau-t'')}{\partial r_l\partial r_j}\times
\times\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\rho. \quad (76)
$$

Подставляя (76) в (71) и выполняя интегрирование по $\mathbf{r}'$, получаем уравнение

$$
\frac{\partial}{\partial t}P(t;\rho)=-\sigma_{\mathbf{u}}^{2}\int\limits_{0}^{t}dt'\frac{\partial^2 B_{ki}(0,t')}{\partial r_k\partial r_i}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho^2P(t;\rho)-
-\sigma_{\mathbf{u}}^{4}\int\limits_{0}^{t}dt'\frac{\partial^2 B_{ki}(0,t')}{\partial r_k\partial r_i}\int\limits_{0}^{t'}d\tau\int\limits_{\tau}^{t}dt''\times
\times\frac{\partial^2 B_{lj}(0,t''-\tau)}{\partial r_l\partial r_j}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho^2P(t;\rho)+
+\sigma_{\mathbf{u}}^{4}\int\limits_{0}^{t}dt'\frac{\partial^3 B_{ki}(0,t')}{\partial r_k\partial r_i\partial r_l}\int\limits_{0}^{t'}d\tau\int\limits_{t'}^{t}dt''\times
\times\frac{\partial B_{lj}(0,t''-\tau)}{\partial r_j}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\rho P(t;\rho)-
-\sigma_{\mathbf{u}}^{4}\int\limits_{0}^{t}dt'\frac{\partial^4 B_{ki}(0,t')}{\partial r_k\partial r_i\partial r_j\partial r_l}\int\limits_{0}^{t'}d\tau\int\limits_{\tau}^{t'}dt''\times
\times B_{lj}(0,t''-\tau)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho^2P(t;\rho)-
-\sigma_{\mathbf{u}}^{4}\int\limits_{0}^{t}dt'\frac{\partial^3 B_{ki}(0,t')}{\partial r_k\partial r_i\partial r_l}\int\limits_{0}^{t'}d\tau\int\limits_{\tau}^{t'}dt''\times
\times\frac{\partial B_{lj}(0,t''-\tau)}{\partial r_j}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho^2P(t;\rho)+
$$

$$+\sigma_{\mathbf{u}}^4 \int\limits_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(0,t')}{\partial r_k \partial r_i} \int\limits_0^{t'} d\tau \int\limits_\tau^t dt'' \times$$
$$\times \frac{\partial^2 B_{lj}(0,t''-\tau)}{\partial r_l \partial r_j} \left(1+\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\rho P(t;\rho). \quad (77)$$

Используя теперь спектральное представление (33) и выполняя интегрирование по времени в коэффициентах уравнения для больших времен, получаем окончательное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t;\rho) = \tilde{D}_N^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\rho^2 P(t;\rho) + \tilde{D}_N^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\rho P(t;\rho), \quad (78)$$

где N — размерность пространства и

$$\begin{aligned} \tilde{D}_N^{(2)} &= \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 k_{1k} k_{1i} k_{1l} (k_{1j} - k_{2j}) F_{ki}(\mathbf{k}_1) \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2), \\ \tilde{D}_N^{(3)} &= -\sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 k_{1k} k_{1i} k_{1l} k_{2j} F_{ki}(\mathbf{k}_1) \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \quad (79)$$

Уравнение (78) справедливо как для изотропных, так и для неизотропных флуктуаций поля скоростей. Следовательно, в случайных изотропных сжимаемых волновых полях распределение вероятностей $P(t;\rho)$ в рассматриваемом приближении является логнормальным и должна осуществляться кластеризация поля примеси (см. [4–7]). При этом для коэффициента $\tilde{D}_N^{(2)}$ с учетом формулы (60) получаем выражение

$$\tilde{D}_N^{(2)} = \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2N} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\omega^2(k_1)} k_1^4 F^p(k_1) \times \times [F^s(k_1)(N-1) + F^p(k_1)] \int d\mathbf{k}_2 \delta(\omega_1 - \omega_2).$$

В случае анизотропного поля скоростей решение уравнения (78) выражается через функцию Эйри логарифма плотности. При этом в области малых значений ρ решение уравнения принимает отрицательные значения. Однако область больших плотностей, а следовательно, и моментные функции поля $\rho(\mathbf{r},t)$ описываются правильно. Некоторое изменение функции распределения в области больших плотностей не препятствует кластеризации поля примеси.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, учет первых неисчезающих поправок к уравнению для плотности вероятностей как диффундирующих частиц, так и самого поля пассивной консервативной примеси в случайных волновых полях приводит к отличным от нуля коэффициентам переноса. Для сжимаемых анизотропных волновых полей скорости возникают средний перенос частиц (стоксов дрейф) и анизотропия распределения вероятностей положения лагранжевых частиц. В этом случае также осуществляется кластеризация поля пассивной консервативной примеси. Следует отметить, однако, что эти процессы протекают на разных пространственных масштабах, что выражается различными степенями волновых векторов $\mathbf{k}_i$ в коэффициентах диффузии в уравнениях (56) и (78). Так, мелкомасштабные флуктуации поля скоростей оказывают на кластеризацию примеси в эйлеровом описании существенно большее влияние, чем на диффузию лагранжевых частиц. Если волновое поле имеет достаточно широкий спектр, например, затухающий степенным образом при достаточно больших значениях волновых чисел, как это характерно для турбулентности, возможно появление расходимости в выражениях для коэффициентов диффузии (79). При этом может быть рассчитан и вклад резонансных эффектов в коэффициент диффузии (59).

Авторы признательны рецензенту за сделанные замечания. Учет этих замечаний привел к значительному увеличению Введения. Однако, как надеются авторы, стало более ясным место данного исследования в огромной области анализа стохастических динамических систем.

Данная работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 98-05-64479, 99-05-64350 и 00-15-98608).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).

2. А. Дж. Лихтенберг, М. А. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1984).

3. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах*, Наука, Москва (1980).

4. В. И. Кляцкин, УФН **164**, 531 (1994).

5. В. И. Кляцкин, А. И. Саичев, ЖЭТФ **111**, 1297 (1997).

6. В. И. Кляцкин, Д. Гурарий, УФН **169**, 171 (1999).

7. В. И. Кляцкин, Изв. АН. Физ. атм. и океана **36**, 177 (2000).

8. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. ВУЗов, Радиофизика **14**, 1400 (1971).

9. V. I. Klyatskin, in *Mathematics of Random Media, Lectures in Appl. Math.*, eds. W. Kohler, B. S. White, AMS, Providence RI (1991), Vol. 27, p. 447.

10. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидродинамика*, Наука, Москва, т. 1 (1965), т. 2 (1967).

11. Г. Е. Уленбек, УФН **103**, 275 (1971).

12. K. Herterich and R. J. Hasselmann, Phys. Oceanogr. **12**, 704 (1982).

13. B. J. Sanderson and A. Okubo, J. Geophys. Res. **93**, 3570 (1988).

14. R. L. Walterscheid and W. K. Hocking, J. Atmosph. Sc. **48**, 2213 (1991).

15. G. I. Taylor, Proc. London Math. Soc. **20**, 196 (1921).