ЖЭТФ, 2000, том 118, вып. 4 (10), стр. 893–905

КОЛЛАПС ВИХРЕВЫХ ЛИНИЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Е. А. Кузнецов**, В. П. Рубан***

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 мая 2000 г.

Предложен новый механизм коллапса в гидродинамике, связанный с «опрокидыванием» вихревых линий. В результате коллапса происходит формирование точечных особенностей поля завихренности — ротора обобщенного импульса. В точке коллапса величина завихренности $|\mathbf{\Omega}|$ растет как $(t_0 - t)^{-1}$, а ее пространственное распределение при $t \to t_0$ приближается к квазидвумерному: вдоль «мягкого» направления происходит сжатие по закону $l_1 \propto (t_0 - t)^{3/2}$, а по двум другим — «жестким» — направлениям — как $l_2 \propto (t_0 - t)^{1/2}$. Показано, что данный сценарий коллапса имеет место в ситуации общего положения для трехмерной интегрируемой гидродинамики с гамильтонианом $\mathcal{H} = \int |\mathbf{\Omega}| d\mathbf{r}$.

PACS: 47.15.Ki, 47.32.Cc

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема коллапса в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости как процесса образования особенности за конечное время является одной из центральных в теории развитой гидродинамической турбулентности. Хорошо известно, что особенности степенного типа продуцируют в коротковолновой области степенные хвосты в спектре турбулентности и поэтому коллапсы важны с точки зрения колмогоровских спектров [1]. Классические примеры таких спектров — спектр Филлипса [2] для ветрового волнения и спектр Кадомцева—Петвиашвили акустической турбулентности [3]. В первом случае в качестве особенностей выступают «барашки» — заострения поверхности, а во втором случае — скачки плотности (ударные волны).

Вопрос о коллапсе в гидродинамике стоит давно. Например, Сафман в 1981 г. [4] рассматривал эту проблему как одну из центральных в гидродинамике (см. также статьи [6] и ссылки там), хотя, как нам кажется, еще Л. Ф. Ричардсон и А. Н. Колмогоров должны были понимать важность этой проблемы. Несмотря на столь долгую историю этого вопроса, значительного понимания природы коллапса в гидродинамике до сих пор нет, хотя на сегодняшний момент имеется достаточно много численных экспериментов, свидетельствующих в пользу его существования (о чем еще речь пойдет ниже). Что касается теории, то здесь существенных результатов нет, как нет и единого мнения о самом предмете — коллапсе в несжимаемой гидродинамике: высказываются соображения о том, что коллапс вообще невозможен (см., например, разд. 7.8 книги [5] и ссылки там). В теории единственное, на наш взгляд, исключение представляет работа Захарова 1988 г. [7] (более подробная публикация появилась в 1999 г. [8]), в которой построена последовательная теория коллапса двух антипараллельных вихревых нитей конечной, но малой толщины в квазидвумерном приближении, когда течение в основном двумерно, а зависимость вдоль третьей координаты является медленной (об этом см. также [9]).

Значительные достижения по коллапсу в гидродинамике относятся к численному моделированию уравнений Эйлера. Достаточно много численных экспериментов свидетельствуют в пользу того, что величина завихренности $|\mathbf{\Omega}|$ обращается в бесконечность в отдельных точках за конечное время. Из работ [10–13] следует, что $|\mathbf{\Omega}|$ растет в точке коллапса как $(t_0 - t)^{-1}$, где t_0 — время коллапса. При этом согласно [10, 13] пространственный масштаб коллапсирующего распределения сокращается как $(t_0 - t)^{1/2}$. В последней работе Керра [14] сообщается об анизотропии коллапсирующей области. Обработка численных данных дала два масшта-

*E-mail: kuznetso@itp.ac.ru
**E-mail: ruban@itp.ac.ru

ба, один из которых сокращается корневым образом: $l_1 \propto (t_0 - t)^{1/2}$, а другой уменьшается линейно со временем: $l_2 \propto t_0 - t$. Следует отметить, что в большинстве известных численных экспериментов начальное течение обладало определенной симметрией либо было близко к симметричному, вследствие чего появлялось несколько особенностей. Так, например, в [10] рассматривалась эволюция двух антипараллельных вихревых трубок, когда коллапс обязан неустойчивости Кроу [15], ведущей на нелинейной стадии уже при учете вязкости к пересоединению вихревых линий. Как следствие этого коллапс наблюдался в двух симметричных точках.

В данной работе мы предлагаем новый механизм образования коллапса, связанный с «опрокидыванием» непрерывного распределения вихревых линий. Важно, что этот механизм не связан ни с какой симметрией начального распределения, а сам коллапс возможен в одной отдельной точке. По-видимому, именно такой режим наблюдался в численном счете [16]. Данный механизм возникновения коллапса полностью укладывается в классическую теорию катастроф [17]. Коллапс представляет собой процесс образования каустики для соленоидального векторного поля, каковым является завихренность. Понять, каким образом возникает коллапс непосредственно в эйлеровом описании, представляется весьма сложным. Это связано, во-первых, с наличием скрытой симметрии в уравнениях Эйлера — симметрии лагранжева вида переобозначения лагранжевых маркеров (*relabeling symmetry*) (подробнее об этом см. обзоры [18, 19]). Эта симметрия порождает сохраняющуюся в каждой лагранжевой точке векторную величину — инвариант Коши, который выражается через ротор скорости и матрицу Якоби отображения от эйлеровых переменных к лагранжевым, и по этой причине сильно нелокален в терминах скорости жидкости. Инвариант Коши, с одной стороны, известен как инвариант, характеризующий свойство вмороженности вихревых линий в жидкость, с другой, все законы сохранения для завихренности: теорема Кельвина, инвариант Эртеля, топологический инвариант Хопфа, характеризующий заузленность течения, являются простым следствием этого инварианта. Вмороженность вихревых линий означает, что жидкие частицы приклеены к данной вихревой линии и никогда ее не покидают. Разрушение вмороженности возможно только за счет вязкости, т. е. вне рамок идеальной гидродинамики. Поэтому следующим естественным шагом в описании вихревого движения стало введение смешанного лагранжево-эйлерова описания, когда основным объектом выступает вихревая линия [20, 21]. Каждая вихревая линия нумеруется своим (двумерным) лагранжевым маркером, а третья координата служит параметром, задающим кривую. Это представление, названное нами представлением вихревых линий, является ключевым для описания коллапса в гидродинамике как процесса формирования каустики бездивергентного поля ротора скорости.

План статьи следующий. В разд. 2 вводится представление вихревых линий и разъясняется его смысл. Раздел 3 посвящен трехмерной интегрируемой гидродинамике, введенной нами в работе [20]. Ее гамильтониан необычен — выражается через модуль $|\boldsymbol{\Omega}|$:

$$\mathcal{H} = \int |\boldsymbol{\Omega}| d\mathbf{r}. \qquad (1)$$

Данная модель может быть проинтегрирована с помощью представления вихревых линий и метода обратной задачи рассеяния. В представлении вихревых линий гамильтониан (1) распадается на сумму гамильтонианов невзаимодействующих вихревых линий. Динамика каждой вихревой линии описывается точно интегрируемым одномерным уравнением Ландау—Лифшица для гейзенберговского ферромагнетика или его калибровочно-эквивалентным аналогом — нелинейным уравнением Шредингера. Интегрируемая гидродинамика, таким образом, есть гидродинамика свободных вихревых нитей. Как для гидродинамики свободных частиц — гидродинамики с нулевым давлением (см., например, [22]), так и для для интегрируемой гидродинамики типичным является возникновение особенности типа каустики. Для гидродинамики с нулевым давлением плотность в каустике обращается в бесконечность. Плотность, однако, — скалярная характеристика в отличие от бездивергентного векторного поля $\boldsymbol{\Omega}$. Последнее обстоятельство накладывает определенные ограничения на структуру поля вблизи особенности. Как показано в разд. 4, структура особенности сильно анизотропна, приобретает блинообразную форму. Пространственное распределение вблизи точки коллапса при $t \to t_0$ приближается к квазидвумерному: вдоль «мягкого» направления сжатие происходит по закону $l_1 \propto (t_0 - t)^{3/2}$, а по двум другим — «жестким» — направлениям как $l_2 \propto (t_0 - t)^{1/2}$. В точке коллапса завихренность лежит в плоскости «блина», а ее величина $|\boldsymbol{\Omega}|$ растет как $(t_0 - t)^{-1}$. Это поведение соответствует ситуации общего положения. В вырожденном случае, чему посвящен последний раздел статьи, рассмотрен коллапс топологически нетривиального осесимметричного распределения завихренности — так называемого отображения Хопфа, когда любые две вихревые линии зацеплены один раз. В этом случае в точке коллапса два собственных значения матрицы Якоби обращаются в нуль, вследствие чего завихренность в точке коллапса, оказывается, имеет более сильную сингулярность: $|\boldsymbol{\Omega}| \propto (t_0 - t)^{-2}$. Заключение посвящено обсуждению численных экспериментов по наблюдению коллапса для гидродинамики Эйлера и их соответствию теории, представленной в данной работе.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИХРЕВЫХ ЛИНИЙ

Рассмотрим уравнения гидродинамического типа

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left[\operatorname{rot}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{\Omega}\right], \tag{2}$$

где $\mathcal{H}\{\boldsymbol{\Omega}\}$ — гамильтониан системы, $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot}\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ — поле обобщенной завихренности, представляющее собой ротор канонического импульса $\mathbf{p}$. Векторное поле

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot}(\delta\mathcal{H}/\delta\Omega) \tag{3}$$

есть не что иное, как скорость жидкости. По определению, $\operatorname{div}\ \mathbf{v} = 0$, т. е. мы имеем дело с несжимаемой средой. Если гамильтониан совпадает с кинетической энергией жидкости,

$$\mathcal{H} = \int \frac{\mathbf{p}^2}{2} d\mathbf{r} = \iint \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}_1)\cdot\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}_2)}{8\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

то выражение (3) задает обычное соотношение $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ между скоростью $\mathbf{v}$ и завихренностью $\boldsymbol{\Omega}$, а уравнение (2) превращается в уравнение Эйлера для завихренности $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v} \times \Omega], \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

Важным свойством уравнений (2) является вмороженность вихря в жидкость, согласно чему все лагранжевы частицы при $t > 0$ остаются на своей собственной вихревой линии. Поэтому естественным представляется введение смешанного лагранжево-эйлерова описания в терминах вихревых линий, когда каждая вихревая линия нумеруется своим (двумерным) лагранжевым маркером ν, принадлежащим некоторому двумерному многообразию $\mathcal{N}$, а параметр s, задающий каждую вихревую линию, имеет смысл эйлеровой переменной. В представлении вихревых линий $\boldsymbol{\Omega}$ имеет вид [20]

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{\mathcal{N}} \Omega_0(\nu) d^2\nu \times \\ \times \int \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{R}(s, \nu, t)\right) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} ds. \tag{4}$$

Здесь каждой вихревой линии ν соответствует замкнутая кривая $\mathbf{r} = \mathbf{R}(s, \nu, t)$, так что $\mathbf{R}_s = \partial\mathbf{R}/\partial s$ — ее касательный вектор. Величина $\Omega_0(\nu)$, являясь лагранжевым инвариантом, характеризует мощность каждой вихревой линии. Впрочем, без ограничения общности эту функцию можно полагать равной единице, что достигается подходящим переопределением маркеров ν и заменой ориентации линий на противоположную в тех областях многообразия $\mathcal{N}$, где $\Omega_0(\nu) < 0$. Поэтому в дальнейшем изложении множитель $\Omega_0(\nu)$ в соответствующих формулах будем опускать. В случае произвольной топологии вихревых линий обобщением (4) служит формула

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(\mathbf{a}, t))(\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a}) \cdot \nabla_{\mathbf{a}}) \times \\ \times \mathbf{R}(\mathbf{a}, t) d^3\mathbf{a}, \tag{5}$$

в которой $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{0}(\mathbf{a})$ — лагранжев инвариант Коши, характеризующий свойство вмороженности. При этом условие $\operatorname{div}_{\mathbf{a}} \boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a}) = 0$ гарантирует поперечность поля $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t)$: $\operatorname{div}\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) = 0$. В выражении (5) вектор $(\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a})\nabla_a)\mathbf{R}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{b}$ есть касательный вектор к вихревой линии в точке

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(\mathbf{a}, t). \tag{6}$$

В качестве параметра s в представлении (4), например, может служить элемент дуги вихревой линии начального поля $\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a})$, поперечные к этой линии компоненты вектора $\mathbf{a}$ можно взять в качестве параметра ν.

После интегрирования в (5) по переменным $\mathbf{a}$ вектор $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}, t)$ выражается через якобиан отображения (6) $J = \det||\partial\mathbf{R}/\partial\mathbf{a}||$ и инвариант Коши $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{0}(\mathbf{a})$:

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}) = \frac{1}{J}(\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a}) \cdot \nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}(\mathbf{a}). \tag{7}$$

Важно подчеркнуть, что в этом выражении якобиан не предполагается равным единице: $J \neq 1$. Принципиально, что это не противоречит условию несжимаемости поля скорости.

Уравнения движения для вихревых линий получаются после подстановки (5) в уравнение вмороженности (2) [20, 21]:

$$[\{(\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a})\cdot\nabla_a)\mathbf{R}(\mathbf{a},t)\}\times \times\{\mathbf{R}_t(\mathbf{a},t)-\mathbf{v}(\mathbf{R}(\mathbf{a},t),t)\}]=0. \quad (8)$$

Это уравнение движения описывает поперечную динамику вихревых линий, так как любые движения вдоль кривой не приводит к ее изменению. В частности, отсюда можно понять, почему на якобиан J не накладывается никаких ограничений, обязанных условию несжимаемости. Напомним, что при переходе от эйлерова описания к полностью лагражеву якобиан $J\equiv 1$. При переходе же к смешанному лагранжево-эйлерову описанию согласно уравнениям движений (8) в отображении (6) исключается движение лагранжевых частиц вдоль вихревых линий. Именно по этой причине якобиан уже не обязан быть равным единице. Это обстоятельство является главным и, как мы увидим в дальнейшем, в основном этим объясняется, почему возможен коллапс в гидродинамике.

Уравнение (8), как показано в [20, 21], может быть записано в гамильтоновой форме:

$$[\{(\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a})\cdot\nabla_a)\mathbf{R}(\mathbf{a},t)\}\times\mathbf{R}_t(\mathbf{a})]= = \left.\frac{\delta\mathcal{H}\{\boldsymbol{\Omega}\{\mathbf{R}\}\}}{\delta\mathbf{R}(\mathbf{a})}\right|_{\boldsymbol{\Omega}_0}. \quad (9)$$

Это уравнение описывает движение вихревых нитей для систем с произвольным гамильтонианом — функционалом, зависящим только от $\Omega(\mathbf{r},t)$.

Полезно иметь в виду, что выражения для таких важных характеристик системы, как ее импульс $\mathbf{P}=\int\mathbf{p}\,d\mathbf{r}$ и угловой момент $\mathbf{M}=\int[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]d\mathbf{r}$, будучи преобразованы путем интегрирования по частям к такому виду, где вместо $\mathbf{p}$ фигурирует завихренность $\boldsymbol{\Omega}=\operatorname{rot}\mathbf{p}$, и переписаны затем в терминах вихревых линий, имеют следующий вид:

$$\mathbf{P}\sim\frac{1}{2}\int[\mathbf{r}\times\Omega]d\mathbf{r}= =\int\limits_{\mathcal{N}} d^2\nu\cdot\frac{1}{2}\int[\mathbf{R}\times\mathbf{R}_s]ds, \quad (10)$$

$$\mathbf{M}\sim\frac{1}{3}\int[\mathbf{r}\times[\mathbf{r}\times\Omega]]d\mathbf{r}= =\int\limits_{\mathcal{N}} d^2\nu\cdot\frac{1}{3}\int[\mathbf{R}\times[\mathbf{R}\times\mathbf{R}_s]]ds. \quad (11)$$

Знаки «$\sim$» в этих соотношениях означают, что равенства имеют место с точностью до интегралов по бесконечно удаленной поверхности. Мы видим здесь, что импульс и угловой момент системы складываются из импульсов и угловых моментов каждой вихревой нити, причем импульс замкнутой линии равен ориентированной площади поверхности, натянутой на контур.

Легко проверяется, что при сдвиге $\mathbf{R}$ на постоянный вектор $\mathbf{R}_0$,

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R}'=\mathbf{R}_0+\mathbf{R},$$

импульс $\mathbf{P}$ остается неизменными, а момент импульса $\mathbf{M}$ испытывает хорошо известное преобразование:

$$\mathbf{M}\to\mathbf{M}'=[\mathbf{R}_0\times\mathbf{P}]+\mathbf{M}. \quad (12)$$

3. ИНТЕГРИРУЕМАЯ ГИДРОДИНАМИКА

В этом и двух следующих разделах мы покажем, каким образом и почему возможен коллапс в трехмерной интегрируемой гидродинамике. Эта модель была введена нами в работе [20]. Ее гамильтониан выражается через модуль $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r},t)$:

$$\mathcal{H}=\int|\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r})|d\mathbf{r}, \quad (13)$$

а уравнения движения совпадают с уравнением вмороженности (2) с обобщенной скоростью

$$\mathbf{v}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau},$$

где $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\Omega}/\Omega$ — единичный вектор, касательный к вихревой линии. Полагая все вихревые линии замкнутыми, выбирая их маркировку таким образом, чтобы $\Omega_0(\nu)=1$, и подставляя представление (4) в (13), легко видеть, что гамильтониан распадается на сумму гамильтонианов вихревых линий[1)]:

$$\mathcal{H}\{\mathbf{R}\}=\int d^2\nu\int\left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial s}\right|ds. \quad (14)$$

Стоящий здесь интеграл по s представляет собой длину вихревой нити с индексом ν. Уравнение движения для вектора $\mathbf{R}(\nu,s)$ согласно (9) будет локальным по этим переменным — оно не содержит взаимодействия с другими вихрями:

$$[\mathbf{R}_s\times\mathbf{R}_t]=[\boldsymbol{\tau}\times[\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau}_s]]. \quad (15)$$

[1)] Отметим, что это свойство является общим для всех систем, у которых гамильтониан имеет вид $\mathcal{H}= =\int F(\tau,(\tau\nabla)\tau,(\tau\nabla)^2\tau,\ldots)|\boldsymbol{\Omega}|d\mathbf{r}$. Для иллюстрации идеи о коллапсе вихревых линий мы выбрали из данного класса наиболее простой пример (13), который к тому же обладает определенным физическим смыслом.

Благодаря этому обстоятельству сохраняются не только полные энергия, импульс и угловой момент системы, но и соответствующие геометрические инварианты каждой вихревой линии: ее длина

$$\mathcal{H}(\nu) = \int |\mathbf{R}_s(\nu)| ds,$$

импульс

$$\mathbf{P}(\nu) = \frac{1}{2} \int [\mathbf{R}(\nu) \times \mathbf{R}_s(\nu)] ds,$$

угловой момент

$$\mathbf{M}(\nu) = \frac{1}{3} \int [\mathbf{R}(\nu) \times [\mathbf{R}(\nu) \times \mathbf{R}_s(\nu)]] ds.$$

Уравнение (15) инвариантно относительно замен $s \to \tilde{s}(s,t)$. Поэтому его можно разрешить относительно $\mathbf{R}_t$ с точностью до сдвига вдоль вихревой нити — преобразования, не изменяющего завихренность $\mathbf{\Omega}$. Это означает, что для нахождения $\mathbf{\Omega}$ достаточно найти одно какое-либо решение следующего из (15) уравнения

$$|\mathbf{R}_s| \mathbf{R}_t = [\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau}_s] + \beta \mathbf{R}_s \qquad (16)$$

при некотором значении β. Возникающее отсюда уравнение для $\boldsymbol{\tau}$ как функции длины нити l ($dl = |\mathbf{R}_s| ds$) и времени t (при выборе $\beta = 0$) сводится [20] к интегрируемому одномерному уравнению Ландау—Лифшица для гейзенберговского ферромагнетика:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = \left[\boldsymbol{\tau} \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{\tau}}{\partial l^2} \right], \qquad (17)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — функции длины нити l и времени t. В свою очередь это уравнение калибровочно-эквивалентно нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) [23]

$$i\psi_t + \psi_{ll} + 2|\psi|^2 \psi = 0 \qquad (18)$$

и может быть сведено к нему с помощью преобразования Хасимото [24]:

$$\psi(l,t) = \kappa(l,t) \exp \left[i \int^{l} \chi(\tilde{l}, t) d\tilde{l} \right],$$

где $\kappa(l,t)$ — кривизна, а $\chi(l,t)$ — кручение линии.

Рассматриваемая система с гамильтонианом (13) имеет прямое отношение к гидродинамике. Как известно [25, 26], локальная аппроксимация для тонкой вихревой нити в предположении малости отношения толщины нити к характерному продольному масштабу приводит к гамильтониану вида (14) одной нити. Суть этого приближения состоит в замене логарифмического взаимодействия на константу. Когда толщины вихревых филаментов малы по сравнению с расстоянием между ними, гамильтониан вихревых нитей в том же самом предположении будет суммой гамильтонианов, что в «непрерывном» пределе дает гамильтониан (13).

Таким образом, мы имеем модель трехмерной точно интегрируемой гидродинамики — гидродинамики свободных вихрей. При этом каждый из вихрей представляет собой нелинейный объект со своей внутренней динамикой. Как мы увидим ниже, в рамках этой модели возможно появление особенностей. Оно обусловлено пересечением вихревых линий — явлением, родственным опрокидыванию волн в газодинамике.

3.1. Стационарные вихри

Рассмотрим теперь простейшие решения уравнения (15) — стационарное распространение замкнутой вихревой линии: $\mathbf{R}_t = \mathbf{V} \equiv \mathrm{const}$. В этом случае скорость $\mathbf{V}$ определяется из решения уравнения

$$[\mathbf{R}_s \times \mathbf{V}] = [\boldsymbol{\tau} \times [\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau}_s]]. \qquad (19)$$

Легко проверить, что это уравнение следует из вариационного принципа

$$\delta(\mathcal{H}(\nu) - \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}(\nu)) = 0, \qquad (20)$$

т. е. решение (19) представляет собой стационарную точку гамильтониана при фиксированном импульсе $\mathbf{P}(\nu)$. Уравнение (19) просто интегрируется. Легко видеть, что (19) может быть переписано через бинормаль $\mathbf{b}$ и кривизну кривой κ в виде

$$[\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{V}] = \kappa [\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{b}], \qquad (21)$$

откуда имеем

$$\mathbf{V} = \kappa \mathbf{b}. \qquad (22)$$

Постоянство скорости $\mathbf{V}$ в этом выражении означает постоянство кривизны κ, т. е. вихревая линия представляет собой кольцо радиусом $r = 1/\kappa$, и

$$V = 1/r. \qquad (23)$$

При этом направление движения кольца перпендикулярно его плоскости. Интересно отметить, что точный ответ для скорости тонкого вихревого кольца ([27]), имеющего толщину $d \ll r$, с логарифмической точностью ($\sim \lg(r/d)$) совпадает с (22), что, как отмечалось ранее, как раз и отличает данную модель от уравнения Эйлера.

Примечательно также, что полученное решение в виде кольца устойчиво, причем устойчиво по Ляпунову. Импульс $\mathbf{P}$ вихревого кольца представляет собой ориентированную площадь, натянутую на вихревой контур:

$$\mathbf{P} = S\mathbf{n},$$

где S — величина площади, а $\mathbf{n}$ — ее нормаль. Поскольку гамильтониан нити совпадает с ее длиной, максимальное значение импульса или, что то же самое, максимальная величина площади, при фиксированной длине контура, очевидно, достигается для замкнутой кривой в виде окружности. Это и есть доказательство устойчивости по Ляпунову решения (22) в виде вихревого кольца.

4. КОЛЛАПС

Полученное решение (22), (23) позволяет выписать простейшие отображения $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\nu, s, t)$.

Пусть все замкнутые вихревые линии ориентированы одинаково, например вдоль оси z, и имеют вид окружностей. Поскольку, как будет видно в дальнейшем, коллапс в этой модели — явление чисто локальное, для построения отображения достаточно ограничиться рассмотрением некоторой вихревой трубки, которую можно представлять себе в виде тора. Пусть кольцевые вихревые линии непрерывно распределены внутри трубки. Каждую вихревую линию внутри трубки будем нумеровать двумерным параметром ν, который будет пробегать все точки поперечного сечения трубки при $t = 0$. В качестве параметра s — третьей независимой переменной — возьмем элемент дуги s: $ds = rd\phi$, где ϕ полярный угол вокруг оси z. Тогда искомое отображение с помощью (22) запишется в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0(\nu) + r(\nu)\cos\phi\,\mathbf{e}_x + r(\nu)\sin\phi\,\mathbf{e}_y + V(\nu)t\mathbf{e}_z. \quad (24)$$

В этой формуле $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы соответствующих осей.

Для этого отображения легко проверить, что якобиан преобразования меняется линейно со временем:

$$J = \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\nu_1, \nu_2, s))} = J_0(\nu, s) + A(\nu, s)t. \quad (25)$$

Здесь $A(\nu, s)$ — коэффициент, линейно зависящий от производных скорости по ν, J_0 — начальное значение якобиана.

Зависимость J (25) от времени означает, что для каждой фиксированной пары ν и s всегда существует такой момент времени $t = \tilde{t}(\nu, s)$ ($t > 0$ или $t < 0$), когда якобиан обратится в нуль:

$$J(\nu, s, t) = 0.$$

Обозначим через t_0 минимальное значение функции $t = \tilde{t}(\nu, s)$ при $t > 0$. И пусть этот минимум достигается в некоторой точке $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$ (здесь мы обозначили точку (ν_1, ν_2, s) как $\mathbf{a}$). Очевидно, что при $t = t_0$

$$\left.\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \mathbf{a}}\right|_{a=a_0} = 0$$

или

$$\nabla_a J(\mathbf{a}, t)|_{a=a_0} = 0, \quad (26)$$

поскольку

$$\nabla_a J(\mathbf{a}, t)|_{a=a_0} + \frac{\partial J(\mathbf{a}, t)}{\partial t}\left.\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \mathbf{a}}\right|_{a=a_0} = 0.$$

Ясно также, что при $t = t_0$ тензор вторых производных J относительно $\mathbf{a}$,

$$2\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 J}{\partial a_i \partial a_j},$$

будет положительно-определенным в точке $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$. Отсюда нетрудно получить, как якобиан ведет себя в малой окрестности $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$. Разложение якобиана вблизи этой точки (в ситуации общего положения) при $t \to t_0$ имеет вид

$$J(\mathbf{a}, t) = \alpha(t_0 - t) + \gamma_{ij}\Delta a_i \Delta a_j + ..., \quad (27)$$

где

$$\alpha = -\left.\frac{\partial J(\mathbf{a}, t)}{\partial t}\right|_{t=t_0, a=a_0} > 0, \quad \Delta\mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0.$$

Это — главные члены разложения якобиана[2)].

Геометрически данное разложение соответствует достаточно простой картине. Поверхность $J = J(\mathbf{a}, t)$ деформируется со временем так, что ее минимум достигает плоскости $J = 0$ при $t = t_0$ в точке $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$, где имеет место касание поверхности $J = J(\mathbf{a}, t)$. Очевидно, что для гладких отображений в ситуации общего положения поверхности $J = J(\mathbf{a}, t)$ и $J = 0$ касаются в отдельной точке. В вырожденных ситуациях касание возможно в

[2)] Например, член, содержащий смешанную производную по времени и пространственной координате, в общем случае представляет малую добавку к первому члену (27).

нескольких точках одновременно или даже на целой кривой. К вырожденному случаю относится также ситуация, когда два собственных значения матрицы Якоби $\hat{J}$ обращаются в нуль одновременно в точке коллапса (такой пример будет рассмотрен нами в следующем разделе). Тогда по соответствующим направлениям в (27) необходимо удерживать следующие члены разложения. Повторяем, что все эти случаи не относятся к ситуации общего положения.

В соответствии с (7) обращение якобиана в нуль в точке касания означает появление особенности для завихренности при $t = t_0$:

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\Omega_0(\nu)\mathbf{R}_s}{\alpha(t_0 - t) + \gamma_{ij}\Delta a_i \Delta a_j}. \tag{28}$$

Важно, что числитель в этой дроби — тангенциальный к вихревой линии вектор — по своему геометрическому смыслу не обращается в нуль в точке касания (это опять же в невырожденном случае). Таким образом, в точке касания завихренность обращается в бесконечность по закону $(t_0 - t)^{-1}$, а размер коллапсирующего распределения в координатах $\mathbf{a}$ сужается как $\sqrt{t_0 - t}$.

Данный тип коллапса возникает в результате опрокидывания вихревых линий, когда одна вихревая линия догоняет другую. В трехмерной невырожденной ситуации это впервые возникает всегда в отдельной точке.

Как будет видно из дальнейшего, для данного типа коллапса зависимость (28) для $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}, t)$, полученная для частного начального распределения, в действительности представляет собой общий ответ, который годится не только для интегрируемой гидродинамики, но также применим к другим системам вида (2), допускающим квазиинерционный режим коллапса. Каким критериям должен удовлетворять гамильтониан конкретной системы, чтобы можно было утверждать, что квазиинерционный коллапс реализуется по крайней мере при некоторых начальных условиях, либо что такой коллапс в данной системе вообще невозможен? Ответ на этот вопрос пока неизвестен, что представляет обширное поле деятельности для будущих исследований.

4.1. Нестационарные вихри

Рассмотрим теперь интегрируемую гидродинамику в общем случае, когда замкнутые вихревые линии не являются окружностями. В этом случае каждому вихревому контуру можно поставить в соответствие определенную вихревую линию в виде кольца. Естественный путь — ввести (среднее) направление $\mathbf{n}$, а также среднюю площадь контура $S = \pi r_0^2$ с помощью выражения для импульса вихревой линии:

$$\mathbf{P} = \mathbf{n}S.$$

При этом положение $\mathbf{R}_0$ центра кольца меняется линейно со временем. Соответствующая средняя скорость движения $\mathbf{V}_0$ замкнутой вихревой линии обязана быть направлена вдоль импульса, чтобы выполнялся закон сохранения углового момента. Значение средней скорости, вообще говоря, является функцией фундаментальных интегралов движения линии, не зависящих от выбора начала координат. Таковыми являются гамильтониан (т. е. длина L), импульс и проекция углового момента на направление импульса. При этом увеличение размеров контура в λ раз должно приводить к уменьшению скорости в λ раз:

$$\mathbf{V}_0 = \frac{8}{\pi^2}\frac{\mathbf{P}}{L^3}U\left(\frac{16\pi^2 P^2}{L^4}, \frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}}{L^5}\right). \tag{29}$$

Точный вид функции $U(\xi, \eta)$, первый из аргументов которой задает меру «скомканности» вихревой линии и меняется в пределах $0 \le \xi \le 1$, а второй определяет меру зеркальной асимметрии, нам пока неизвестен. В более-менее разумном приближении, не приводящем к чрезмерным ошибкам, можно полагать, что $U(\xi, \eta) \sim U(1, 0) = 1$.

После введения средних характеристик можно представить $\mathbf{R}(\nu, s, t)$ в виде суммы $\tilde{\mathbf{R}}(\nu, s, t)$ и $\delta\mathbf{r}(\nu, s, t)$:

$$\mathbf{R}(\nu, s, t) = \tilde{\mathbf{R}}(\nu, s, t) + \delta\mathbf{r}(\nu, s, t), \tag{30}$$

где среднее значение $\tilde{\mathbf{R}}(\nu, s, t)$ дается соотношением

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}(\nu, s, t) &= \mathbf{R}_0 + r_0\cos\phi'\,\mathbf{e}'_x + r_0\sin\phi'\,\mathbf{e}'_y, \\ \dot{\mathbf{R}}_0 &= V_0\mathbf{n}, \end{aligned} \tag{31}$$

а ϕ' — полярный угол в плоскости, перпендикулярной к локальной оси z', направленной вдоль единичного вектора $\mathbf{n}$, связь между r_0 и V_0 дается формулой (29). Вектор-функция $\delta\mathbf{r}(\nu, s, t)$ описывает отклонения (вообще говоря, немалые) от среднего значения $\tilde{\mathbf{R}}(\nu, s, t)$.

Введенное посредством соотношений (29)–(31) разделение среднего и осцилляторного движений для каждого вихревого контура показывает, что отображение $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\nu, s, t)$ при каждом фиксированном значении $\mathbf{a} = (\nu, s)$ представляет собой линейно растущую функцию времени с нелинейными осцилляциями, которые описываются с помощью уравнения Ландау—Лифшица (17) или его калибровочно-эквивалентного аналога (18). Линейная зависимость отражает тот факт, что рассматриваемая модель есть модель свободных вихрей. Поэтому коллапс возникает в результате «наезда» одного вихря на другой, при этом в силу непрерывности $\mathbf{\Omega}$ между двумя «крайними» вихрями происходит обращение значения завихренности в бесконечность. Похожая ситуация имеет место для рассмотренной в [22] модели образования крупномасштабных структур во Вселенной. В основе этой модели лежит предположение об изначально пылевидном распределении массы, когда ее поведение может быть описано с помощью уравнений гидродинамики для плотности ρ и скорости $\mathbf{v}$ с нулевым давлением:

$$\rho_t + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0, \tag{32}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = 0. \tag{33}$$

Интегрирование этой системы в лагранжевых переменных дает, что все частицы свободные, двигаются с постоянной скоростью:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{v}(\mathbf{a})t, \tag{34}$$

а плотность ρ выражается через начальное значение ρ_0 и якобиан отображения (34):

$$\rho(\mathbf{r},t) = \frac{\rho_0(\mathbf{a})}{J}. \tag{35}$$

Появление крупномасштабных (значительно плотных) структур в рамках этой модели связано с явлением опрокидывания — за счет особенностей плотности благодаря обращению в нуль якобиана J отображения (34). В ситуации общего положения эти структуры имеют блинообразную форму и могут быть рассмотрены в качестве протогалактик. Формула аналогичная (35), как мы видели выше, имеет место для завихренности $\mathbf{\Omega}$ (см. (7)). Имеется, однако, одно отличие от (35), связанное с векторным характером поля $\mathbf{\Omega}$ — его поперечностью. Это, пожалуй, единственное различие, хотя и существенное.

В данной задаче нас будет интересовать структура особенности при $t \to t_0$, но $t < t_0$, т. е. в некотором смысле на начальной стадии коллапса, а не на его развитой стадии, которая несомненно имеет свое значение для астрофизических приложений, но остается далеко не ясной для несжимаемой гидродинамики, когда на малых масштабах необходим учет вязкости.

4.2. Структура особенности

Рассмотрим более подробно, какова структура коллапсирующей области в ситуации общего положения. Во-первых, из сказанного выше становится ясным, что распределение для завихренности вблизи особенности при $t \to t_0$ будет задаваться прежним выражением (28). Во-вторых, структура особенности будет в основном определяться якобианом — знаменателем в (28). Числитель $(\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})\cdot\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}$ — вектор, тангенциальный к вихревой линии, следует взять в точке $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$ и $t = t_0$ и считать его постоянным.

Согласно (28), якобиан содержит положительно-определенную симметричную матрицу γ_{ij}. Эта матрица при $t < t_0$ предполагается невырожденной: все ее собственные значения положительны, а сама она может быть приведена к диагональному виду. Отсюда немедленно следует, что сжатие по всем трем главным направлениям в $\mathbf{a}$-пространстве будет идти по одному и тому же закону $l_a \propto \sqrt{t_0 - t}$. Соответственно, вблизи сингулярной точки $\mathbf{\Omega}$ будет иметь автомодельную асимптотику:

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r},t) = \frac{\Omega_0(\nu)\mathbf{R}_s}{(t_0 - t)(\alpha + \gamma_{ij}\eta_i\eta_j)}, \tag{36}$$

где $\eta = \Delta\mathbf{a}/\sqrt{t_0 - t}$ — автомодельная переменная в $\mathbf{a}$-пространстве. Однако (36) не означает, что сжатие и в $\mathbf{r}$-пространстве будет таким же.

Обращение якобиана в нуль в точке коллапса означает обращение в нуль одного из собственных значений матрицы Якоби (в невырожденной ситуации). Это собственное значение (обозначим его через λ_1), как легко видеть, совпадает в окрестности точки коллапса с точностью до постоянного множителя (произведения двух других собственных значений $\lambda_2\lambda_3$) с самим якобианом (27).

Представим матрицу Якоби $\hat{J}$ в виде разложения по собственным векторам прямой ($\hat{J}|\psi^{(n)}\rangle = \lambda_n|\psi^{(n)}\rangle$) и сопряженной ($\langle\tilde{\psi}^{(n)}|\hat{J} = \lambda_n\langle\tilde{\psi}^{(n)}|$) спектральных задач:

$$J_{ik} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial a_i} = \sum_{n=1}^{3} \lambda_n \psi_i^{(n)} \tilde{\psi}_k^{(n)}. \tag{37}$$

Здесь два репера собственных векторов прямой и сопряженной спектральных задач взаимно ортогональны:

$$\langle\tilde{\psi}^{(n)}|\psi^{(m)}\rangle = \delta_{nm}.$$

В окрестности точки $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$ два собственных значения $\lambda_{2,3}$ можно считать постоянными, а

$$\lambda_1 \equiv \frac{J}{\lambda_2\lambda_3} = \frac{\alpha(t_0 - t) + \gamma_{ij}a_i a_j}{\lambda_2\lambda_3}.$$

Здесь для простоты записи мы поместили начало координат в точку $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$. Что касается собственных векторов, то и их можно в этой окрестности считать постоянными.

Разложим далее векторы $\mathbf{x}$ и ∇_a в (37) по соответствующим базисам, обозначая соответствующие проекции через X_n и A_n:

$$X_n = \langle \mathbf{x}|\psi^{(n)}\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial A_n} = \langle \tilde{\psi}^{(n)}|\nabla_a\rangle.$$

Вектор $\mathbf{a}$ при этом записывается через проекции A_n следующим образом:

$$a_\alpha = \sum_n \psi_\alpha^{(n)} |\tilde{\psi}^{(n)}|^2 A_n.$$

В результате (37) перепишется в виде

$$\frac{\partial X_1}{\partial A_1} = \tau + \Gamma_{mn} A_m A_n, \tag{38}$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial A_2} = \lambda_2, \quad \frac{\partial X_3}{\partial A_3} = \lambda_3. \tag{39}$$

Здесь

$$\Gamma_{mn} = \gamma_{\alpha\beta}\psi_\alpha^{(n)}\psi_\beta^{(m)}|\tilde{\psi}^{(\mathbf{n})}|^2|\tilde{\psi}^{(\mathbf{m})}|^2(\lambda_2\lambda_3)^{-1},$$

$$\tau = \alpha(t_0 - t)(\lambda_2\lambda_3)^{-1}.$$

Отсюда сразу следует, что по второму (X_2) и третьему (X_3) — «жестким» — направлениям сжатие происходит точно так же, как и во вспомогательном $\mathbf{a}$-пространстве, т. е. $\propto \sqrt{\tau}$, а вдоль «мягкого» направления X_1 — как $\tau^{3/2}$. Соответственно, в новых автомодельных переменных $\xi_1 = X_1/\tau^{3/2}$, $\xi_2 = X_2/\tau^{1/2}$, $\xi_3 = X_3/\tau^{1/2}$ интегрирование системы (39) дает для ξ_2, ξ_3 линейную зависимость от η, а для ξ_1 — кубическую зависимость:

$$\xi_1 = (1 + \Gamma_{ij}\eta_i\eta_j)\eta_1 + \Gamma_{1i}\eta_i\eta_1^2 + \frac{1}{3}\Gamma_{11}\eta_1^3, \quad i,j = 2,3, \tag{40}$$

$$\xi_2 = \lambda_2\eta_2, \quad \xi_3 = \lambda_3\eta_3. \tag{41}$$

Соотношения (40), (41) вместе с (36) определяют неявную зависимость $\mathbf{\Omega}$ от времени и координат. Наличие двух различных автомодельностей показывает, что при приближении t к t_0 пространственное распределение $\mathbf{\Omega}$ становится сильно сплюснутым в первом направлении, принимая блинообразную форму. Направление поля $\mathbf{\Omega}$ при этом определяется из условие несжимаемости: $\operatorname{div}\mathbf{\Omega} = 0$. Оно в главном порядке накладывает ограничение на направление тангенциального вектора $\mathbf{R}_s$ в точке коллапса:

$$(\mathbf{R}_s(\mathbf{a_0}, t)\cdot\nabla(1/J)) + \ldots = 0. \tag{42}$$

Очевидно, что градиент от J при $t \to t_0$ в главном приближении определяется мягким направлением:

$$\nabla J \approx \tau^{-3/2}\frac{\partial J}{\partial \xi_1}\mathbf{e}_1.$$

Вклад от других направлений при этом мал по параметру τ.

Отсюда в силу (42) следует, что вектор $\mathbf{R}_s$, а соответственно, и поле $\mathbf{\Omega}$ ортогональны мягкому направлению, т. е. лежат в плоскости «блина», что согласуется с «поперечностью» движения самих вихревых линий (ср. с (8)).

5. ПРИМЕР КОЛЛАПСА В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

В предыдущем разделе мы рассмотрели коллапс в невырожденной ситуации, когда только одно собственное значение матрицы Якоби в точке касания обращается в нуль. Сейчас мы рассмотрим пример коллапса, когда два собственных значения матрицы Якоби одновременно обращаются в нуль в точке коллапса. Речь пойдет о начальном распределении завихренности с нетривиальной топологией вихревых линий со степенью зацепления, равной единице. Это — специальное распределение, оно строится с помощью отображения Хопфа. Для отыскания соответствующего поля $\mathbf{\Omega}$ существует несколько эквивалентных способов. Мы будем придерживаться способа, указанного в работе [28].

Следуя этой работе, представим поле $\mathbf{\Omega}$ через $\mathbf{n}$-поле ($\mathbf{n}^2 = 1$):

$$\Omega_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{1}{32}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n}\cdot[\partial_\alpha \times \partial_\gamma \mathbf{n}]), \tag{43}$$

где $\mathbf{n}$-поле будем предполагать гладким и имеющим на бесконечности $r \to \infty$ значение $\mathbf{n} = \mathbf{e}$.

Легко проверяется, что каждой точке $\mathbf{n} = \mathbf{n_0}$ на единичной сфере $\mathcal{S}^2$ соответствует, согласно (43), вихревая линия. Действительно, представляя единичный вектор $\mathbf{n}$ через сферические углы θ и φ, можно $\mathbf{\Omega}$ записать в виде

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{16}[\nabla\varphi \times \nabla\cos\theta], \tag{44}$$

так что переменные φ и $\cos\theta$ выступают в качестве переменных Клебша. Таким образом, каждая вихревая линия в этом случае совпадает с пересечением двух поверхностей, $\varphi = \mathrm{const}$ и $\cos\theta = \mathrm{const}$, т. е. прообразом точки на сфере $\mathcal{R}^3$ является замкнутая вихревая линия. Индексом Хопфа N отображения $\mathcal{R}^3 \to \mathcal{S}^2$ называется (целое) число зацеплений двух вихревых линий — прообразов двух точек на единичной сфере. Отображение Хопфа (с индексом $N = 1$) строится с помощью следующей формулы:

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = U(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\sigma})U^{\dagger}, \quad U = \frac{1+i(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})}{1-i(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})}, \qquad (45)$$

где σ — матрицы Паули.

Выражая отсюда вектор $\mathbf{n}$ и подставляя затем в (43), получаем (см. [29])

$$\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{e}(1-a^2) + 2\mathbf{a}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}) + 2[\mathbf{e}\times\mathbf{a}]}{(1+a^2)^3}. \qquad (46)$$

Силовые линии данного поля, как показано в работе [29], являются окружностями, причем любые две линии оказываются единожды зацепленными друг с другом. По этим причинам образование особенности неизбежно. Данное поле не имеет особых точек, а его абсолютная величина зависит только от $|\mathbf{a}|$. Единичный вектор $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{a})$ всюду определен, что весьма удобно с точки зрения применения нашей модели. Для $\boldsymbol{\tau}$ имеем следующую зависимость:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{e}(1-a^2) + 2\mathbf{a}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}) + 2[\mathbf{e}\times\mathbf{a}]}{(1+a^2)}. \qquad (47)$$

Скорость каждого кольца связана с бинормалью $\mathbf{b}(\nu)$ и радиусом $r(\nu)$ соотношением

$$\mathbf{V}(\nu) = \mathbf{b}(\nu)/r(\nu).$$

Радиусы колец $r(\nu)$ и их ориентации $\mathbf{b}(\nu)$ при этом являются интегралами движения. Меняются только положения центров колец, причем это движение происходит с постоянной для каждого кольца скоростью.

В данной задаче вместо переменных ν и s удобно сразу использовать переменные $\mathbf{a}$, через которые отображение $\mathbf{R}(\mathbf{a}, t)$ записывается в виде

$$\mathbf{R}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{a} + t\mathbf{V}(\mathbf{a}), \qquad (48)$$

где скорость $\mathbf{V}(\mathbf{a})$ выражается через касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ посредством соотношения

$$\mathbf{V}(\mathbf{a}) = [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{a}) \times (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{a})\cdot\nabla_{\mathbf{a}})\boldsymbol{\tau}(\mathbf{a})]. \qquad (49)$$

Отсюда можно вычислить якобиан

$$J(\mathbf{a}, t) = \det\left\|\hat{I} + t\left(\frac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{a})}{\partial\mathbf{a}}\right)\right\|. \qquad (50)$$

Отметим, что скорость каждого кольца неизменна вдоль вихревой линии. Поэтому детерминант матрицы $\partial\mathbf{V}(\mathbf{a})/\partial\mathbf{a}$, определяющий коэффициент при t^3 в выражении для якобиана J, равен нулю. В результате J имеет квадратичную зависимость по времени t:

$$J = 1 + tc_1(\mathbf{a}) + t^2 c_2(\mathbf{a}).$$

Образованию особенности соответствует обращение в нуль данного выражения. Коэффициенты c_1 и c_2 определяют момент коллапса t_0, который является минимальным положительным корнем уравнения

$$\min_{\mathbf{a}} J(\mathbf{a}, t_0) \equiv J_{min}(t_0) = 0.$$

Вычисления по формулам (47), (49) и (50) приводят к выражениям

$$\mathbf{V}(\mathbf{a}) = \\ = \frac{-2}{(1+a^2)^2}\left([\mathbf{e}\times\mathbf{a}](1-a^2) + 2\mathbf{a}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}) - 2\mathbf{e}a^2\right), \qquad (51)$$

$$J(\mathbf{a}, t) = \\ \frac{(1+a^2)^3 - 8ta_3(1+a^2) + 4t^2(1+a_3^2-a_1^2-a_2^2)}{(1+a^2)^3}, \qquad (52)$$

где a_3 — проекция вектора $\mathbf{a}$ на ось $\mathbf{e}$.

Анализируя последнее выражение, можно показать, что при $t < 1$ минимум якобиана следует искать на оси симметрии, т. е. при $a_1 = 0, a_2 = 0$. В этом случае

$$J_{axis} = \frac{(1-a_3^2)^2 + 4(t-a_3)^2}{(1+a_3^2)^2}, \qquad (53)$$

откуда видно, что особенность имеет место при $t_0 = 1$, $a_3 = 1$, причем якобиан обращается в нуль по квадратичной асимптотике. Таким образом, в данном примере $|\Omega|_{max} \propto (t_0 - t)^{-2}$. Легко проверяется также, что матрица Якоби в точке касания имеет два нулевых собственных значения, собственные векторы которых лежат в плоскости, перпендикулярной оси $\mathbf{e}$. В окрестности коллапса поле $\boldsymbol{\Omega}$ направлено вдоль вектора $\mathbf{e}$. Сжатие по этому направлению линейно по времени $l_3 \propto (t_0 - t)$, а в перпендикулярной плоскости — более быстрое, по закону $l_{1,2} \propto (t_0 - t)^{3/2}$. В результате структура особенности оказывается сильно вытянутой вдоль оси анизотропии.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассматривая гидродинамическую модель с гамильтонианом $\mathcal{H} = \int|\boldsymbol{\Omega}|d\mathbf{r}$, мы пришли к выводу, что каждая вихревая линия в данной системе движется независимо от остальных. Именно это свойство делает возможным образование сингулярностей в зависимости поля обобщенной завихренности $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r},t)$ за конечное время из гладких начальных данных. Типичная особенность рассматриваемого типа выглядит как бесконечное сгущение вихревых линий в окрестности некоторой точки. Коллапс, таким образом, в интегрируемой гидродинамике имеет чисто инерционное происхождение. Если предположить, что такой тип коллапса возможен в гидродинамике Эйлера, то асимптотика завихренности вблизи особенности — точки опрокидывания вихрей — будет в невырожденной ситуации задаваться формулами (28) или (36), что ясно уже из общих соображений, т. е. ротор скорости обращается в бесконечность как $(t_0-t)^{-1}$. Именно такая зависимость в сингулярной точке наблюдается практически во всех численных экспериментах, в том числе и здесь цитированных [6, 10–14]. Однако не все эксперименты относятся к численному интегрированию уравнения Эйлера непрерывных распределений. Первые численные эксперименты [6] (о развитии этого направления см. [12]) относились к коллапсу двух антипараллельных вихревых филаментов, которые, как было показано в [15], линейно неустойчивы относительно поперечных возмущений. Теория коллапса для тонких вихревых нитей как нелинейной стадии неустойчивости Кроу была разработана Захаровым [7, 8] (см. также [9]). Ее выводы хорошо согласуются с численными экспериментами вплоть до расстояний, сравнимых с размером кора филаментов. В этом случае расстояние между вихревыми нитями сокращается как $\sqrt{t_0-t}$. При меньших расстояниях коры вихревых филаментов теряют свою круглую форму. Они становятся плоскими, а сам процесс притяжения нитей замедляется [30, 31]. Эта же тенденция наблюдается и в численных экспериментах Керра [10], на наш взгляд, наиболее продвинутых для задачи пересоединения, где в отличие от [6] рассматривается коллапс двух антипараллельных вихрей, но непрерывно распределенных. Эти эксперименты помимо естественного сокращения среднего расстояния между распределенными вихрями впервые показали образование двух сингулярностей в двух симметричных точках (разумеется, что о сингулярностях здесь можно говорить только условно, в меру численных возможностей). При этом при приближении к моменту коллапса наблюдался взрывной рост максимальной величины завихренности по закону $(t_0-t)^{-1}$. По последним сообщениям Керра [14], обработка численных данных дала два масштаба, один из которых сокращается корневым образом: $l_1 \propto (t_0-t)^{1/2}$, а другой уменьшается линейно со временем: $l_2 \propto t_0 - t$.

В работе [11] была предпринята успешная попытка наблюдения коллапса для начального условия, не обладающего низкой симметрией. Начальная завихренность была сосредоточена в окрестности цилиндра, при этом она была промодулирована по углу так, что простейшие симметрии отсутствовали. В этом эксперименте, в котором достигнуто наилучшее на данный момент пространственно-временное разрешение, наблюдалось возникновение отдельной коллапсирующей области с ростом завихренности в центре по закону $(t_0-t)^{-1}$.

Таким образом, результаты всех существующих численных экспериментов для идеальной гидродинамики укладываются в представление о коллапсе как процессе формирования каустики бездивергентного поля ротора скорости. Имеется полное соответствие с поведением максимума завихренности. Относительно пространственной структуры коллапсирующей области имеется лишь качественное согласие — в пользу этого говорят результаты работ [30, 31], где наблюдалось поджатие кора вихря на начальной стадии пересоединения (в пренебрежении вязкостью), а также результаты Керра. Все это позволяет утверждать, что представленный здесь сценарий коллапса как сгущения вихревых линий в окрестности некоторой точки выглядит вполне правдоподобным. Повторяем, что если такой сценарий имеет место, то поведение завихренности в окрестности сингулярной точки определяется соотношением (28) или (36). Структура этой области должна быть сильно анизотропной: по одному из перпендикулярных к завихренности направлений происходит более быстрое сжатие ($\propto \tau^{3/2}$), чем по двум другим ($\propto \tau^{1/2}$). Распределение становится близким к двумерному, сильно напоминающему тангенциальный разрыв. Скорость течения в этой области аппроксимируется с хорошей точностью линейной зависимостью:

$$v_\perp \sim \Omega_{max} X_1,$$

т. е. течение представляет собой течение с линейным широм (*shear flow*). Данный тип коллапса по существующей классификации [32] относится к слабым: энергия, попадаемая в особенность (при учете вязкости), стремится к нулю при уменьшении вязкости ν. Интересно отметить, что и сам темп диссипации энергии $\sim \int \Omega^2 d\mathbf{r}$ от коллапсирующей области также стремится к нулю при вязкости $\nu \to 0$.

Следует еще раз отметить, что, в отличие от рассмотренной выше модели свободных вихрей, в настоящей эйлеровской гидродинамике вихревые линии взаимодействуют между собой попарно в соответствии с гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{Euler} = \\ = \frac{1}{8\pi}\iint \frac{\mathbf{R}_s(\nu,s)\cdot\mathbf{R}_\xi(\mu,\xi)}{|\mathbf{R}(\nu,s)-\mathbf{R}(\mu,\xi)|}d^2\nu ds\, d^2\mu d\xi. \quad (54)$$

С точки зрения исследования проблемы коллапса принципиально важно, что функция взаимодействия (функция Грина оператора Лапласа) имеет особенность при равных аргументах $\mathbf{R}(\nu,s)\to\mathbf{R}(\mu,\xi)$. Если бы этой особенности не было и функция взаимодействия была бы полностью регулярной, то любое начальное распределение вихревых линий, топологически эквивалентное некоторому гладкому полю $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$, в том числе очень сингулярное, порождало бы достаточно гладкое поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Поэтому произвольная начальная сингулярность поля обобщенной завихренности не могла бы «рассосаться» в следующие моменты времени, она могла бы только переноситься потоком жидкости. Поскольку уравнения движения идеальной среды обратимы во времени, отсюда следует, что и образоваться из гладких начальных данных через конечное время сингулярность также не могла бы. Таким образом, само существование коллапса вихревых линий и его возможные типы зависят в системах с квадратичными по $\mathbf{\Omega}$ гамильтонианами от асимптотики функции взаимодействия $G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ (более точно — от ее производных) при $\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_2$. Например, для лучшего понимания проблемы коллапса в гидродинамике имеет смысл исследовать такие системы, у которых функции взаимодействия имеют асимптотики $G\propto|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^{-q}$, причем показатель q не обязательно равен единице.

Каково влияние вязкости на структуру коллапсирующей области, а особенно на пост-коллапсной стадии? Как данный тип коллапса влияет на структуру турбулентных спектров? Это далеко не полный перечень наиболее важных вопросов, требующих своего исследования. Представляет также интерес численная проверка нашей гипотезы об инерционном характере коллапса непосредственно для идеальной гидродинамики как в эйлеровых переменных, так и в представлении вихревых линий.

Обсуждения с В. Е. Захаровым, Р. З. Сагдеевым, В. В. Лебедевым, Г. Е. Фальковичем, А. Цинобером, И. Голдхиршем (I. Goldhirsch), Н. Забуским (N. Zabusky), Дж. Херрингом (J. Herring), Р. Керром (R. Kerr), Р. Пельцем (R. Pelz) многих вопросов, затронутых в данной работе, были весьма полезными. Авторы благодарны им за это. Данная работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 00-01-00929) и Программой поддержки ведущих научных школ России (грант 00-15-96007). Один из авторов (В. П. Р.) благодарит за финансовую помощь также фонд Landau Postdoc Scholarship (KFA, Forschungszentrum, Juelich, Germany).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **30**, 9 (1941).
2. О. М. Филлипс, в сб. *Ветровые волны*, Изд-во иностр. лит., Москва (1962), с. 219.
3. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ДАН СССР **208**, 794 (1973).
4. P. G. Saffman, J. Fluid Mech. **106**, 49 (1981).
5. U. Frisch, *Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Univ. Press (1995) (перевод У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова*, ФАСИС, Москва (1998).
6. A. Pumir and E. D. Siggia, in *Topological Fluid Mechanics*, eds. H. K. Moffatt and A. Tsinober, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990), p. 469; Phys. Fluids A **4**, 1472 (1992).
7. В. Е. Захаров, УФН **155**, 529 (1988).
8. V. E. Zakharov, in *Lecture Notes in Physics: Nonlinear MHD Waves and Turbulence*, eds. T. Passot and P. L. Sulem, Springer, Berlin (1999), p. 369.
9. R. Klein, A. Maida, and K. Damodaran, J. Fluid Mech. **228**, 201 (1995).
10. R. M. Kerr, Phys. Fluids A, **4**, 2845 (1993).
11. R. Grauer, C. Marliani, and K. Germaschewski, Phys. Rev. Lett. **80**, 4177 (1998).
12. R. B. Pelz, Phys. Rev. E **55**, 1617 (1997).
13. O. N. Boratav and R. B. Pelz, Phys. Fluids **6**, 2757 (1994).
14. R. M. Kerr, *Trends in Math.*, Birkhauser Verlag, Basel, Switzerland (1999), p. 41.
15. S. C. Crow, Amer. Inst. Aeronaut. Astronaut. J. **8**, 2172 (1970).
16. Ya. G. Sinai, private communication (1999).

17. В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, Знание, Москва (1981); *Математические методы классической механики*, Наука, Москва (1984).

18. R. Salmon, Ann. Rev. Fluid Mech. **20**, 225 (1988).

19. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **137**, 1137 (1997).

20. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **67**, 1015 (1998).

21. E. A. Kuznetsov and V. P. Ruban, Phys. Rev. E **61**, 831 (2000).

22. V. I. Arnold, S. F. Shandarin, and Ya. B. Zeldovich, Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. **20**, 111 (1982).

23. В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, ТМФ **38**, 26 (1979).

24. R. Hasimoto, J. Fluid Mech. **51**, 477 (1972).

25. L. S. Da Rios, Rend. Circ. Mat. Palerno **22**, 117 (1906).

26. R. Betchov, J. Fluid Mech. **22**, 471 (1965).

27. H. Lamb, *Hydrodynamics* (6th ed.), Cambridge Univ. Press, Cambridge (1932).

28. E. A. Kuznetsov and A. V. Mikhailov, Phys. Lett. A **77**, 37 (1980).

29. А. М. Камчатнов, ЖЭТФ **82**, 117 (1982).

30. M. V. Melander and F. Hussain, Phys. Fluids A **1**, 633 (1989).

31. M. J. Shelley, D. J. Meiron, and S. A. Orszag, J. Fluid Mech. **246**, 613 (1993).

32. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986).