

# ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Г. В. Пермитин, А. И. Смирнов\*

Институт прикладной физики Российской академии наук  
603600, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 17 мая 2000 г.

В безабберрационном приближении квазиоптики получено уравнение параболического типа для огибающей пакета электромагнитных волн, распространяющегося вдоль геометрического луча в плавно неоднородной изотропной среде с временной дисперсией. Приведена его функция Грина, параметры которой находятся интегрированием системы дифференциальных уравнений в обыкновенных производных. Проанализированы эффекты совместного влияния рефракции, дифракции и дисперсии на эволюцию пакета, приводящие, в частности, к прецессии волн огибающей вокруг бинормали к трассе распространения.

PACS: 41.20.Jb, 42.25.-p

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Процесс распространения волновых пакетов в плавно неоднородных средах при определенных условиях допускает приближенное квазиоптическое описание с помощью укороченного уравнения параболического типа для волн «огibaющих» (комплексных амплитуд). Для этого необходимо, с одной стороны, чтобы характерные масштабы огибающей (как поперечные к направлению распространения,  $\Lambda_{\perp}$ , так и продольные,  $\Lambda_{\parallel}$ ) были много больше длины «несущей волны»  $\lambda$ . Эти условия эквивалентны ограничениям на ширины углового и частотного спектров процесса:  $\Delta k_{\perp}/k \ll 1$ ,  $\Delta\omega/\omega \ll 1$ . С другой стороны, поперечные размеры пакета  $\Lambda_{\perp}$  должны быть малы в масштабе неоднородности среды  $L_{\varepsilon}$ . Ограничения сверху на продольные размеры пакета (или, другими словами, на длительности импульсов  $T_p$ ) для квазиоптики несущественны, и при  $T_p \rightarrow \infty$  допустим непрерывный переход к стационарным или нестационарным волновым пучкам. Стационарные пучки ( $\Delta\omega = 0$ ) в неоднородных средах достаточно подробно исследованы в работе [1]. Кро-

ме того, для применимости квазиоптики требуется, чтобы в пределах частотной полосы  $\Delta\omega$  дисперсионная кривая среды достаточно хорошо аппроксимировалась параболой.

В волновой механике Эренфестом доказана теорема, согласно которой центр пакета движется вдоль квазиклассической траектории. Будем считать (по аналогии), что и пакет электромагнитных волн распространяется с групповой скоростью  $v_g$  вдоль некоторого (криволинейного) луча геометрической оптики  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c(s)$  (называемого в дальнейшем опорным). При этом волновое поле можно представить в виде

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \exp \left[ -i\omega t + i\phi(\mathbf{r}) \right], \quad (1.1)$$

где  $\omega$  — центральная частота пакета, а  $\phi$  — фаза «несущей волны»,  $A(t, \mathbf{r})$  — комплексная огибающая. В однородных средах в качестве несущей выбирается собственная мода системы — как правило, плоская монохроматическая волна. В неоднородных средах выделяют несущую, не являющуюся собственной волной, но имеющую плоские фазовые фронты ( $\phi = \text{const}$ ), нормальные к опорному лучу, вдоль которого  $\phi(\mathbf{r}_c)$  вычисляется в приближении геометрической оптики.

\*E-mail: smirnov@appl.sci-nnov.ru

Благодаря малым (в масштабе  $L_\epsilon$ ) размерам пакета сохраняются характерные для однородных сред тенденции к его поперечной «диффузии»<sup>1)</sup> из-за дифракции, и к продольной, обусловленной дисперсией [2–4]. Расплывание пакета сопровождается фазовой и амплитудной модуляцией огибающей. Однако для неоднородных сред характерно еще одно проявление дисперсии — поперечный развал пакета вследствие зависимости кривизны лучей от частоты. Рефракционная (или «ньютоновская») дисперсия<sup>2)</sup> в малоугловом приближении приводит к взаимосвязи между поперечной и продольной структурами поля [6].

Дифракционные и дисперсионные эффекты в неоднородных средах конкурируют с рефракционными, проявляющимися не только в отмеченном выше искривлении траектории движения пакета, но и в его поперечной фокусировке (или дефокусировке)<sup>3)</sup>. Квазиоптике фокусирующих систем посвящено значительное число работ, относящихся, в первую очередь, к оптическим линиям<sup>4)</sup>, а также к линзоподобным средам (см., например, [9–11]) типа профилированных оптических волокон. Нельзя не отметить и квантовомеханический аналог фокусирующих систем — линейный осциллятор [12].

Полученное в данной статье квазиоптическое уравнение для огибающей пакета в произвольной плавно неоднородной среде оказывается почти таким же, как и в линзоподобной. Отличие заключается в появлении дополнительного оператора (аналогичного оператору вращения в уравнении Шредингера для электрона в магнитном поле [12]), приводящего к неожиданному интерференционному явлению — волновой прецессии пакета вокруг бинормали к трассе распространения.

<sup>1)</sup> Аналогия дифракционных явлений с диффузией уходит к работам Т. Юнга (Th. Young, 1800 г.) и получила широкое распространение в квазиоптике (М. А. Леонтович, В. А. Фок, 1944–46 г.г.) [5]. Волновой аналог, конечно, принципиально отличается от обычной диффузии (частиц или тепла) своей обратимостью — инвариантностью относительно замены  $t \rightarrow -t$  и направления распространения на противоположное.

<sup>2)</sup> Собственно, термин «дисперсия» был введен в физику Ньютоном как раз при описании развала пучка естественного света в цветной спектр при рефракции в кусочно-однородной среде — призме.

<sup>3)</sup> Кстати, кривизна трассы распространения приводит к дополнительной фокусировке [7].

<sup>4)</sup> Малоугловое (или параксиальное) приближение дифракционной теории оптических систем было развито задолго до внедрения в физику термина «квазиоптика». Довольно подробное изложение этой теории можно найти в [8].

## 2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЙ АМПЛИТУДЫ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

В стационарной изотропной диэлектрической (без магнитной восприимчивости) среде с временной дисперсией уравнения Максвелла приводятся к виду [13]

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

где напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и вектор индукции  $\mathbf{D}$  связаны соотношением

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \int_0^\infty \hat{\epsilon}(\tau, \mathbf{r}) \mathbf{E}(t - \tau, \mathbf{r}) d\tau. \quad (2.2)$$

Для квазигармонических процессов

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \tilde{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \\ \mathbf{D} &= \tilde{\mathbf{D}}(t, \mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где комплексные амплитуды  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}$  — медленные в масштабе  $1/\omega$  функции, материальное уравнение (2.2) может быть представлено (см., например, [4]) в дифференциальной форме:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \tilde{\mathbf{E}} + i \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} + \dots \quad (2.4)$$

Ряд (2.4) является разложением по малому параметру  $\mu \sim \Delta\omega/\delta\omega$ , равному отношению ширины спектра процесса  $\Delta\omega$  к характерному дисперсионному масштабу диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\omega, \mathbf{r})$ .

Во втором приближении теории дисперсии [4] уравнение (2.1) с точностью до членов  $\sim \mu^2$  трансформируется в следующее уравнение для комплексной амплитуды электрического поля:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \left( \omega^2 \epsilon \tilde{\mathbf{E}} + i \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega^2 \epsilon}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (2.5)$$

Для волнового пакета с узким угловым спектром уравнение (2.5) может быть укорочено и сведено к уравнению параболического типа в криволинейной системе координат, опирающейся на центральный (и в пространственном, и в спектральном смысле) луч геометрической оптики.

### 3. СИСТЕМА КООРДИНАТ, СВЯЗАННАЯ С ОПОРНЫМ ЛУЧОМ

Канонические (гамильтоновы) уравнения луча в неоднородной изотропной среде имеют вид [14]

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\zeta} = \frac{1}{2}\nabla\varepsilon(\omega, \mathbf{r}), \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки на луче,  $\mathbf{p}$  — нормированный на  $k_0 = \omega/c$  текущий волновой вектор  $\mathbf{k} = sk_0\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})} = k_0\mathbf{p}$  ( $\mathbf{s}$  — единичный вектор, касательный к лучу), переменная  $\zeta$  связана с длиной дуги луча  $s$  соотношением  $d\zeta = ds/\sqrt{\varepsilon}$ .

Пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c(\zeta)$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_c(\zeta)$  — некоторое решение уравнения (3.1). Выберем его в качестве опорной траектории для криволинейной системы координат. (В дальнейшем все величины и производные от них, вычисляемые в точках на опорном луче, будут помечаться нижним индексом  $c$ .)

Геометрические характеристики опорного луча — трехгранник Дарбу  $(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{m})$ , кривизна  $K$ , кручение  $T$  — однозначно определяются в каждой его точке направлением распространения  $\mathbf{s}$ , локальными значениями диэлектрической проницаемости и ее производных по направлениям [1, 14]. Главная нормаль  $\mathbf{n}$  к лучу лежит в плоскости  $\{\mathbf{s}, \nabla\varepsilon\}$ , бинормаль равна  $\mathbf{m} = \mathbf{s} \times \mathbf{n}$ . Кривизна луча и его кручение выражаются следующими формулами:

$$K = \left[ \frac{\partial\varepsilon}{\partial n} / 2\varepsilon \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_c}, \quad T = \left[ \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial s \partial m} / \frac{\partial\varepsilon}{\partial n} \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_c}. \quad (3.2)$$

Нормаль и бинормаль являются функциями длины вдоль луча  $(\mathbf{n}(s), \mathbf{m}(s))$ , но эта зависимость не имеет отношения к формулам (3.2), в которые входят производные по направлениям в фиксированной точке.

Система координат, связанная с  $(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{m})$ , является (при  $T \neq 0$ ) аффинной (что видно из формул Френе—Серре:  $d\mathbf{n}/ds = -K\mathbf{s} + T\mathbf{m}$ ,  $d\mathbf{m}/ds = -T\mathbf{n}$ ). Однако можно ввести ортогональную систему  $(s, \xi_1, \xi_2)$ , базис которой  $(\mathbf{s}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$  поворачивается относительно  $(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{m})$  в соответствии с правилом параллельного (в смысле Леви-Чивита) переноса вектора вдоль кривой:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{n} \cos \theta + \mathbf{m} \sin \theta, \\ \mathbf{g}_2 &= \mathbf{m} \cos \theta - \mathbf{n} \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{ds} &= -T. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Коэффициенты Ламе такой системы координат равны

$$h_1 = h_2 = 1, \quad h_s = h = 1 - K(\xi_1 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta).$$

Как известно [14, 15], в приближении геометрической оптики вектор поляризации электрического поля  $\mathbf{e}$  вращается относительно  $\mathbf{n}$  в точном соответствии с (3.3) — так называемый закон Рытова. В квазиоптическом приближении, как будет показано ниже, закон Рытова остается справедливым. Это означает, что проекции вектора поляризации на орты  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  постоянны и могут быть вынесены из-под операторов дифференцирования.

### 4. УРАВНЕНИЕ КВАЗИОПТИКИ ДЛЯ ОГИБАЮЩЕЙ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА (БЕЗАБЕРРАЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Пусть вдоль опорного луча распространяется волновой пакет, характерные пространственные и временные масштабы которого удовлетворяют сформулированным выше ограничениям:  $\Lambda_\perp, \Lambda_\parallel \gg \lambda(\mathbf{r})$ ,  $\Lambda_\perp \ll L_\varepsilon$ ,  $\Delta\omega \ll \delta\omega$ ,  $\omega$ . Как видно, задача содержит несколько малых безразмерных параметров, которые в принципе могут существенно отличаться друг от друга по величине. Но поскольку безабберационное приближение квазиоптики является квадратичным по каждому из этих параметров, будем условно обозначать их одной буквой  $\mu$ :

$$\mu \sim \frac{\lambda}{\Lambda_\perp}, \quad \frac{\lambda}{\Lambda_\parallel}, \quad \frac{\Lambda_\perp}{L_\varepsilon}, \quad \frac{\Delta\omega}{\delta\omega}, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega}.$$

Запишем комплексную амплитуду электрического поля в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}) = E_\perp(t, \mathbf{r})\mathbf{e}_\perp + E_\parallel(t, \mathbf{r})\mathbf{s}, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{e}_\perp = a\mathbf{g}_1 + b\mathbf{g}_2$  — вектор поляризации ( $a$  и  $b$  — комплексные в общем случае числа ( $|a|^2 + |b|^2 = 1$ )). В тех ситуациях, когда волновой пакет имеет неоднородную по поперечным координатам поляризацию, он может быть представлен в виде суперпозиции двух волновых пакетов с однородными взаимно ортогональными поляризациями (линейными, круговыми или эллиптическими).

Подставляя (4.1) в (2.5) и расписывая дифференциальные операторы во введенной выше криволинейной системе координат  $(s, \xi_1, \xi_2)$ , получаем (с точностью до кубичных по  $\mu$  слагаемых) следующее уравнение для поперечной составляющей электрического поля  $E_\perp$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial E_\perp}{\partial s} \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( h \frac{\partial E_\perp}{\partial \xi_m} \right) - \frac{1}{c^2} \times \\ & \times \left( \omega^2 \varepsilon E_\perp + i \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega} \frac{\partial E_\perp}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 E_\perp}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь предполагается суммирование по повторяющемуся индексу  $m = 1, 2$ .

Вектор  $\mathbf{e}_\perp$  в том же приближении (с точностью до  $\mu^3$ ) постоянен в ортогональной системе координат  $(s, \xi_1, \xi_2)$  (т. е. поворачивается относительно естественного трехгранника в соответствии с законом Рывова).

Продольная составляющая поля  $E_\parallel(t, \mathbf{r})$  находится из условия  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ :

$$ik\varepsilon E_\parallel \approx -\text{div}(\varepsilon E_\perp \mathbf{e}_\perp).$$

Пренебрегая рассеянием под углами  $\beta_s \gg \mu$  к трассе распространения и выделяя в поле  $E_\perp$  быстроосциллирующий множитель, можно перейти от (4.2) к уравнению параболического типа для медленной и плавной огибающей пакета  $W(t, \mathbf{r})$ :

$$E_\perp = (\varepsilon_c(s))^{-1/4} W(t, \mathbf{r}) \times \exp \left[ ik_0 \int_0^s \sqrt{\varepsilon_c(s')} ds' \right]. \quad (4.3)$$

В первом по  $\mu$  приближении волновой пакет сползает без искажения формы вдоль луча с групповой скоростью  $v_g$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) W = O(\mu^2),$$

$$v_g(s) = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \left[ \frac{\partial \sqrt{\omega^2 \varepsilon_c(\omega)}}{\partial \omega} \right]^{-1}.$$

Выписывая члены второго порядка малости по  $\mu$ , удобно перейти от  $(s, t)$  к учитывающим этот снос переменным  $(\tau, \varsigma)$ :

$$d\varsigma = ds/\sqrt{\varepsilon_c}, \quad d\tau = dt - ds/v_g, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varsigma} = \sqrt{\varepsilon_c} \left( \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Такой выбор переменных адекватен следующему способу наблюдения. В плоскости  $s = \text{const}$  расположены приемники, дающие развертку сигнала во времени. Начало отсчета локального времени  $\tau$  сдвинуто на величину группового запаздывания

$$t_c(s) = \int_0^s \frac{ds'}{v_g(s')}.$$

Подставляя (4.3) в (4.2) и удерживая слагаемые

не выше второго порядка малости, получаем следующее укороченное уравнение параболического типа:

$$2ik_0 \left( \frac{\partial W}{\partial \varsigma} + k_0 \delta_p(\varsigma) \xi_p \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2} + \gamma(\varsigma) \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - k_0^2 \alpha_{pq}(\varsigma) \xi_p \xi_q W = 0, \quad (4.5)$$

где

$$\gamma(\varsigma) = \frac{1}{v_g^2} \left[ 1 - \frac{v_g^2}{2c^2} \frac{\partial^2 \omega^2 \varepsilon}{\partial \omega^2} \right]_{r=r_c} = \frac{k}{v_g^2} \frac{\partial v_g}{\partial \omega},$$

$$\delta_p(\varsigma) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi_p \partial \omega} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_p} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right]_{r=r_c} = \varepsilon \frac{\partial K}{\partial \omega} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_p),$$

$$\alpha_{pq}(\varsigma) = \left[ \frac{3}{4\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_p} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_q} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi_p \partial \xi_q} \right]_{r=r_c}, \quad p, q = 1, 2.$$

Смысл приближения, в котором написано уравнение (4.5), можно пояснить, обратившись к аналогии неоднородной среды с оптической линией, состоящей из дискретных фазовых корректоров: линейных (призм), квадратичных (идеальных линз) и более высокого порядка, ответственных за aberrации (кубические, сферические и т. д.)<sup>5)</sup>. Линейные корректоры автоматически устраняются переходом в связанную с лучом криволинейную систему координат. Однако в (4.5) от «призм» остался след в виде оператора  $\delta_m \xi_m \partial_\tau$ , учитывающего во втором порядке по  $\mu$  рефракционную дисперсию. Хотя приближение (4.5) не игнорирует один из видов aberrаций — астигматизм, оно тем не менее называется в квазиоптике безабберационным.

Квадратичная форма  $U_{eff} = \alpha_{pq} \xi_p \xi_q$ , определяющая оптические свойства линз, в каждом сечении  $\varsigma = \text{const}$  поворотом в плоскости  $(\xi_1, \xi_2)$  на угол  $\varphi(\varsigma)$  может быть приведена к каноническому виду:

$$U_{eff} = \alpha_1(\varsigma) \bar{\xi}_1^2 + \alpha_2(\varsigma) \bar{\xi}_2^2.$$

Направления осей  $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$  называются главными направлениями астигматической линзы. От скорости поворота главных направлений при смещении вдоль

<sup>5)</sup> Линия из идеальных линз описывается тем же уравнением (4.5) с  $\alpha_{pq}(z) = \sum_i \alpha_{pq}(z) \Delta z_i \delta(z - z_i)$ .

линии  $T^* = d\varphi/d\zeta$  существенным образом зависит поведение волнового пучка или пакета<sup>6)</sup>.

Если степень скрученности линии велика ( $|T^*|^2 \gg |\alpha_1|, |\alpha_2|$ ), то можно провести усреднение по периоду поворота линз и перейти к эффективной аксиально симметричной оптической линии. Очевидность этого утверждения следует из эквивалентности двух одинаковых, ортогональных, прижатых друг к другу тонких цилиндрических линз аксиально-симметричной:

$$\exp\left(\frac{ikx^2}{2F}\right) \exp\left(\frac{iky^2}{2F}\right) = \exp\left(\frac{ikr^2}{2F}\right).$$

Когда выполнено обратное неравенство  $|T^*|^2 \ll \ll |\alpha_1|, |\alpha_2|$ , шир оптической линии может быть учтен в адиабатическом приближении.

Наиболее интересен промежуточный случай  $\alpha_1 < |T^*|^2 < \alpha_2$ . При таком соотношении параметров возникает параметрическая неустойчивость волнового пакета (аналогичная параметрическому резонансу маятника). По одному из направлений (которое поворачивается при смещении по  $\zeta$ ) размеры пакета экспоненциально нарастают, причем дефокусировка имеет место в локально фокусирующей системе:  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ . В ортогональном направлении кручение, наоборот, усиливает фокусировку, и размеры пакета осциллируют. Этот эффект подробно рассмотрен в работе о волновых пучках [1].

### 5. ФУНКЦИЯ ГРИНА КВАЗИОПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Уравнение (4.5) обладает замечательным свойством — его функция Грина совершенно строго находится в приближении геометрической оптики [1]. Соответствующая (4.5) система лучевых уравнений оказывается линейной, что делает тривиальной задачу «нацеливания» луча, выходящего из произвольной точки источника ( $\zeta' = 0, \xi', \tau'$ ), в произвольную точку наблюдения ( $\zeta, \xi, \tau$ ) и последующего вычисления фазы и амплитуды функции Грина  $G(\zeta', \xi', \tau'; \zeta, \xi, \tau)$ . Однако асимметрия коэффициентов (4.5) не позволяет расписать эту процедуру в достаточно компактной форме. Поэтому воспользуем-

<sup>6)</sup> Степень «скрученности» оптической линии (или ее «шир») мы обозначили той же самой буквой, что и кручение траектории распространения  $T$  (снабдив для отличия звездочкой). Кручение опорного луча всегда приводит к шире эквивалентной линзовой системы, но он может иметь место ( $T^* \neq 0$ ) и при  $T = 0$ .

ся тем обстоятельством, что коэффициенты уравнения (4.5) не зависят явным образом от  $\tau$ , и применим метод Фурье, т. е. будем искать решение в виде разложения по парциальным монохроматическим пучкам (на частотах  $\omega + \Omega$ ). Представляя огибающую пакета в виде

$$W(\zeta, \xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{W}(\zeta, \xi_1, \xi_2, \Omega) \exp(-i\Omega\tau) d\Omega, \quad (5.1)$$

получаем

$$2ik_0 \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial \xi_2^2} - k_0^2 \left( \alpha_{mn} \xi_m \xi_n - 2\delta_m \xi_m \Omega + c^2 \gamma \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \widetilde{W} = 0. \quad (5.2)$$

Выражение в круглых скобках приводится к квадратичной форме следующей заменой переменных:

$$\eta_m = \xi_m + q_m(\zeta)\Omega, \quad V(\zeta, \eta_1, \eta_2, \Omega) = \widetilde{W} \exp(ik_0\Phi),$$

$$\Phi = (\dot{q}_1 \xi_1 + \dot{q}_2 \xi_2)\Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \int_0^\zeta \beta(\zeta) d\zeta, \quad (5.3)$$

$$\beta = \frac{\gamma}{k_0^2} - \alpha_{mn} q_m q_n + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2,$$

где точкой сверху обозначена производная по  $\zeta$ . Параметры  $q_m$ , характеризующие поперечное смещение парциальных пучков с отличными от  $\omega$  частотами, являются вынужденным решением системы

$$\ddot{q}_m + \alpha_{mn}(\zeta)q_n = -\delta_m(\zeta) \quad (5.4)$$

с нулевыми начальными условиями  $q_m(0) = \dot{q}_m(0) = 0$ .

В результате замены (5.3) уравнение (5.2) приводится к виду

$$2ik_0 \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_2^2} - k_0^2 \alpha_{mn}(\zeta) \eta_m \eta_n V = 0. \quad (5.5)$$

В начальном сечении  $\zeta = 0$  функция  $V(\zeta, \eta, \Omega)$  совпадает с  $\widetilde{W}_0 = \widetilde{W}(\zeta = 0, \xi, \Omega)$ , так как  $\eta_m|_{\zeta=0} = \xi_m, \Phi|_{\zeta=0} = 0$ .

Парциальные пучки на частотах  $\omega + \Omega$  описываются одним и тем же уравнением (5.5), коэффициенты которого не зависят от частотного сдвига  $\Omega$ . Но это не означает, конечно, что все пучки идентичны.

Зависимость от частоты в их поля входит через переменные  $\eta_{1,2}$  и (параметрически) через начальные условия  $\widetilde{W}_0(\xi, \Omega)$ .

Уравнение (5.5) достаточно подробно исследовано в [1], где приведены его решения в виде разложений по функциям Грина, по локально плоским волнам и по функциям Эрмита. Полагая, что функции  $V(\varsigma, \eta, \Omega)$  найдены тем или иным способом, можно представить выражение для комплексной амплитуды пакета в виде

$$W(\varsigma, \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\varsigma, \xi + q\Omega, \Omega) \times \exp[-ik_0\Phi(\varsigma, \xi, \Omega) - i\Omega\tau] d\Omega, \quad (5.6)$$

где символами  $\xi, q$  обозначены двумерные векторы  $(\xi_1, \xi_2), (q_1, q_2)$ .

Представление поля в виде суперпозиции стационарных волновых пучков весьма наглядно и позволяет предсказать некоторые физические эффекты. Довольно очевиден развал пакета в поперечном направлении из-за рефракционной дисперсии (зависимости кривизны лучей от частоты). При этом продольная (временная) структура его огибающей и поперечная оказываются взаимосвязанными — дифракция влияет на продольное дисперсионное расплывание [6]. Следует отметить, что при строгом волновом описании явления дифракции и дисперсии связаны даже в однородной среде — так называемый эффект Вольфа [16], выходящий, однако, за рамки применимости безабберрационного приближения квазиоптики.

Функция Грина (5.5), полученная в [1], имеет вид

$$G_V(\varsigma, \eta', \eta) = \frac{k_0}{2\pi i \sqrt{D_S}} \exp \left\{ \frac{ik_0}{2} S_{mk}^{-1} \times \left( P_{mn} \eta'_k \eta'_n - 2\eta_m \eta'_k + \dot{S}_{nk} \eta_n \eta_m \right) \right\}, \quad (5.7)$$

где  $(\varsigma = 0, \eta')$  — точка источника,  $(\varsigma, \eta)$  — точка наблюдения,  $D_S = \det \|\hat{S}\|$ . Матрицы  $\hat{P}$  и  $\hat{S}$  определяют произвольный (в малоугловом приближении, конечно) луч  $\eta_m = P_{mn} \eta'_n + S_{mn} \dot{\eta}'_n$ , выходящий из плоскости исходной апертуры  $(\varsigma = 0)$ , и являются решениями одинаковых дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{P}_{mn} + \alpha_{mk} P_{kn} &= 0, \\ \ddot{S}_{mn} + \alpha_{mk} S_{kn} &= 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

но с разными начальными условиями

$$P_{mn}(0) = \delta_{mn}, \quad \dot{P}_{mn}(0) = 0,$$

$$S_{mn}(0) = 0, \quad \dot{S}_{mn}(0) = \delta_{mn}.$$

Функция Грина квазиоптического уравнения (4.5) для огибающей пакета (т.е. решение с начальными условиями  $W_0 = \delta(\xi - \xi')\delta(\tau - \tau')$ ) получается подстановкой в (5.6) функции  $V(\varsigma, \eta, \Omega) = G_V \exp(i\Omega\tau')$ , где экспоненциальный фактор — фурье-образ  $\delta$ -импульса. После интегрирования по  $\Omega$  имеем

$$G_W = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{k_0}{\sqrt{iD_S B}} \times \exp \left\{ \frac{ik_0}{2} S_{mk}^{-1} (P_{mn} \xi'_k \xi'_n - 2\xi_m \xi'_k + \dot{S}_{nk} \xi_m \xi_n) - \frac{i}{2B} \left[ \tau - \tau' + k_0 \left( \dot{q}_i \xi_i + S_{mk}^{-1} q_m \xi'_k - \frac{1}{2} S_{mk}^{-1} \dot{S}_{nk} (\xi_m q_n + \xi_n q_m) \right) \right]^2 \right\}, \quad (5.9)$$

где

$$B = k_0 \left( S_{mk}^{-1} \dot{S}_{nk} q_m q_n - \int_0^\varsigma \beta(\varsigma) d\varsigma \right).$$

Если вспомнить, что  $W(\varsigma, \xi, \tau)$  является медленной и плавной огибающей волнового пакета, то, казалось бы, функция точечного источника  $G_W$  не имеет никакого физического смысла. Вообще говоря, это не совсем так. В некоторой окрестности опорного луча  $G_W$  достаточно хорошо аппроксимирует функцию Грина строгого волнового уравнения. Но главным свойством  $G_W$  является возможность представления решения (4.5) в виде интегрального разложения:

$$W(\varsigma, \xi, \tau) = \int G_W(\xi', \tau'; \varsigma, \xi, \tau) \times W_0(\xi', \tau') d\xi'_1 d\xi'_2 d\tau', \quad (5.10)$$

где  $W_0(\xi, \tau) = W(\varsigma = 0, \xi, \tau)$ .

Таким образом, задача Коши уравнения (4.5) в частных производных сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1), (5.4), (5.8) (не зависящих от вида  $W_0(\xi, \tau)$ ) с последующим вычислением интеграла (5.10) в любых сечениях трассы распространения  $\varsigma = \varsigma^*$  для «произвольных»<sup>7)</sup> начальных распределений  $W_0(\xi, \tau)$ . Такая процедура удобна при численных

<sup>7)</sup> Слово «произвольных» заключено в кавычки по следующей причине. Формально для любой функции  $W_0(\xi, \tau)$  (5.10) является решением уравнения (4.5). Однако физический смысл имеют лишь начальные условия, удовлетворяющие сформулированным в начале статьи ограничениям.

расчетах волновых полей на компьютере, но недостаточно прозрачна для аналитических исследований, направленных на выявление характерных особенностей распространения пакетов в неоднородных средах. Частично об этих особенностях, общих как для пакетов, так и для пучков, говорилось в конце разд. 4. Ниже речь пойдет еще об одном эффекте, специфичном для коротких пакетов ( $\Lambda_{\parallel} \ll L_{\varepsilon}$ ).

### 6. ВОЛНОВАЯ ПРЕЦЕССИЯ ПАКЕТА В СРЕДАХ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

В данном разделе рассмотрен частный случай распространения короткого волнового пакета вдоль плоской траектории в среде с отрицательной дисперсией групповой скорости ( $\partial v_g / \partial \lambda < 0$ ,  $\gamma > 0$ ). При этом  $T = 0$ ,  $\mathbf{g}_1 = \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{g}_2 = \mathbf{m} = \text{const}$ ,  $\alpha_{12} = 0$ ,  $\delta_2 = 0$  и уравнение (4.5) допускает разделение переменных:

$$W(\varsigma, \xi_1, \xi_2) = W_1(\varsigma, \xi_1, \tau)W_2(\varsigma, \xi_2),$$

$$2ik_0 \left( \frac{\partial W_1}{\partial \varsigma} + k_0 \delta(\varsigma) \xi_1 \frac{\partial W_1}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi_1^2} + \gamma(\varsigma) \frac{\partial^2 W_1}{\partial \tau^2} - k_0^2 \alpha_1(\varsigma) \xi_1^2 W_1 = 0, \quad (6.1)$$

$$2ik_0 \frac{\partial W_2}{\partial \varsigma} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi_2^2} - k_0^2 \alpha_2(\varsigma) \xi_2^2 W_2 = 0, \quad (6.2)$$

$$\delta = \varepsilon \frac{\partial K}{\partial \omega}, \quad \alpha_1 = 3\varepsilon K^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial m^2}.$$

Как видим, в ситуациях, когда переменные в (4.5) делятся, задача о трехмерном волновом пакете сводится к решению уравнения (6.2) для двумерного волнового пучка и уравнения (6.1) для двумерного пакета. Формально (6.1) можно рассматривать как уравнение для трехмерного волнового пучка ( $\varsigma$  — продольная,  $\xi$  и  $\tau$  — поперечные координаты), распространяющегося в линзоподобной среде. При этом эффективная распределенная линза является цилиндрической (собирающей в плоскости  $(\mathbf{n}, \mathbf{s})$  при  $\alpha_1 > 0$ , а при  $\alpha_1 < 0$  — рассеивающей<sup>8)</sup>). По временной координате  $\tau$  эквивалентная линза не обладает ни фокусирующими, ни дефокусирующими свойствами.

<sup>8)</sup> Отрицательный знак  $\alpha_1$  имеет место при распространении пакета вдоль так называемого луча Педерсена. Этот случай не очень интересен с практической точки зрения, так как сигнал вдоль луча Педерсена экспоненциально ослабевает.

Если бы в (6.1) отсутствовал оператор  $\hat{G} = \xi_1 \partial_{\tau}$ , то было бы возможно дальнейшее разделение переменных и полное расщепление (в приближении квазиоптики) дифракционных и дисперсионных эффектов, как в однородной среде. Оператор  $\hat{G}$ , пропорциональный  $\partial K / \partial \omega$ , ответствен за ньютоновскую дисперсию волн в неоднородных средах и связывает продольную эволюцию пакета с поперечной, причем характер этой взаимосвязи существенно зависит от знака  $\gamma$ . При  $\gamma > 0$  дифференциальные операторы в (6.1) можно симметризовать заменой переменных:

$$\sqrt{\varepsilon} d\varsigma = ds, \quad \xi_1 = u_1, \quad \tau = -\sqrt{\gamma} u_2,$$

$$W = \left( \frac{1}{\gamma} \right)^{1/4} \Psi(s, u_1, u_2) \times \exp \left\{ ik \left( \frac{\dot{\gamma}}{4\gamma} u_2^2 + \varkappa(s) u_1 u_2 \right) \right\},$$

$$k = k_0 \sqrt{\varepsilon}, \quad \varkappa(s) = \frac{k}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\partial K}{\partial \omega},$$

где точкой сверху обозначена производная по длине дуги  $s$ , а координата  $u_2$  направлена вдоль вектора групповой скорости. После такой замены (6.1) приводится к виду

$$2ik \left( \frac{\partial \Psi}{\partial s} - \varkappa(s) e_{mn} u_m \frac{\partial \Psi}{\partial u_n} \right) + \Delta_u \Psi - k^2 \beta_{mn}(s) u_m u_n \Psi = 0, \quad (6.3)$$

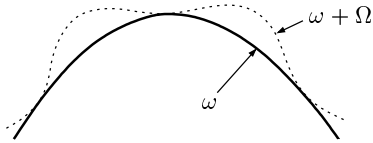
$$e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_{11} = 3(K^2 - \varkappa^2) - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2},$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{3\varkappa \dot{\gamma}}{4\gamma} + \frac{1}{2} \dot{\varkappa},$$

$$\beta_{22} = \varkappa^2 + \frac{\ddot{\gamma}}{2\gamma} - \frac{3\dot{\gamma}^2}{4\gamma^2}.$$

Переход к новым переменным в (6.3) адекватен как бы мгновенному «фотографированию» распределений поля. Такой способ наблюдения, видимо, труднее реализовать в экспериментах, чем развертку сигнала во времени, но он более удобен для словесного описания метаморфоз огибающей волнового поля.

После симметризации оператора  $\hat{G} = \xi_1 \partial_{\tau}$  в (6.3) появился квадратичный фазовый корректор, пропорциональный  $\varkappa^2$ , играющий роль фокусирующей в плоскости  $(u_2, s)$  линзы, т. е. осуществляющий компрессию пакета в продольном направлении. При



**Рис. 1.** Осцилляции центрального луча парциального волнового пучка (штриховая линия) на частоте  $\omega + \Omega$  относительно опорной траектории (сплошная линия), описываемые уравнением  $\xi = q\Omega$ ,  $\ddot{q} + \alpha q = -\delta$

этом «оптическая сила» эффективной линзы в плоскости  $(u_1, s)$  оказалась ослабленной<sup>9)</sup>.

Компенсация продольной диффузии пакета кажется довольно парадоксальной. Действительно, в однородной среде с  $\gamma > 0$  высокочастотные гармоники спектра пакета распространяются с большими групповыми скоростями, благодаря чему пакет расплывается и оказывается частотно-модулированным (текущая частота на переднем фронте импульса выше, а на заднем — ниже средней). Пакет в прямолинейном волновом канале расплывается еще быстрее, так как к дисперсии среды добавляется еще и волноводная (того же типа). Искривление волнового канала приводит к дополнительной фокусировке [7], канал сужается, и его волноводная дисперсия еще более усиливается. За счет чего же вдруг возникает компенсация продольной диффузии? Все дело в поперечной рефракционной дисперсии. Траектории стационарной фазы высокочастотных гармоник отклоняются от опорной и проходят более длинный путь до касания с ней. В результате возникает дополнительное запаздывание высокочастотных составляющих сигнала и, как следствие, компенсация продольной диффузии пакета. Рисунок 1 иллюстрирует этот компенсационный механизм на примере двумерного ( $\partial/\partial\xi_2 = 0$ ) пакета. На рис. 1 видно, что рефракционная (поперечная) дисперсия не приводит в фокусирующих средах к регулярному уходу пакета от опорной траектории.

Оператор  $\hat{D} \sim \epsilon_{mnl} u_m \partial/\partial u_n$  в (6.3) аналогичен оператору проекции момента импульса в квантовой механике (в цилиндрических координатах  $\hat{D} \sim \partial/\partial\varphi$ ). Очевидно, что от него можно освободиться переходом во вращающуюся с «угловой скоростью»  $-\varkappa(s)$  систему координат  $(x_1, x_2)$ :

<sup>9)</sup> На зависимость тензора  $\beta_{mn}$  от  $\dot{\gamma}$  и  $\dot{\varkappa}$  можно не обращать особого внимания, так как она является следом неоднородной перенормировки масштабов и не приводит ни к продольной компрессии пакета, ни к его расплыванию.

$$x_m = R_{mn}(\vartheta)u_n, \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\varkappa = -\frac{1}{2}k v_g \frac{\partial K}{\partial \omega} \bigg/ \sqrt{k \frac{\partial v_g}{\partial \omega}},$$

$$2ik \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \Delta \Psi - k^2 a_{mn}(s)x_m x_n \Psi = 0, \quad (6.5)$$

$$a_{mn} = R_{mp}(\vartheta)R_{nq}(\vartheta)\beta_{pq}.$$

Таким образом, двумерный пакет описывается таким же уравнением, как и волновая функция электрона в параболической потенциальной яме. Правда, яма вращается с «частотой»  $-\varkappa$ , меняя в общем случае свою глубину и эксцентриситет. Решение (6.5) подробно исследовано в [1].

Если снова перейти в систему координат  $(u_1, u_2)$ , связанную с нормалью  $\mathbf{n}$ , то на эволюционную картину распространения пакета, изменения его поперечных и продольных размеров наложится вращение структуры огибающей. Так как  $\mathbf{n}$  поворачивается при движении вдоль опорного луча с угловой скоростью  $\Omega_n = v_g K \mathbf{m}$ , скорость поворота огибающей волнового пакета относительно среды равна

$$\Omega_p = \left(1 + \frac{\varkappa}{K}\right) \Omega_n. \quad (6.6)$$

Для того чтобы выделить волновую прецессию<sup>10)</sup> в чистом виде, освободившись от сопутствующих эффектов (пульсаций поперечных размеров, продольного расплывания), приведем в качестве примера пакет, захваченный плазменным кольцевым волновым каналом.

### 6.1. Пакет в кольцевом канале

Рассмотрим распространение пакета в аксиально-симметричной изотропной плазме, примерная зависимость диэлектрической проницаемости которой от радиуса,  $\epsilon(\omega, r) = 1 - \omega_p^2(r)/\omega^2$ , изображена на рис. 2.

<sup>10)</sup> Термин «прецессия» применяется для описания весьма разнородных явлений, так или иначе связанных с наложением одного вращения на другое: устойчивость волчка, эволюция орбиты Меркурия, предвращение (букв. перевод *praecessio*) равноденствий... Волновая прецессия не выпадает из этого ряда, так как речь идет о вращении структуры огибающей пакета на фоне поворота в пространстве направления распространения.



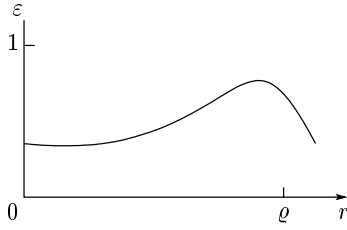


Рис. 2. Радиальный профиль диэлектрической проницаемости в кольцевом плазменном волновом канале

Такая среда является волновым каналом для мод, распространяющихся в азимутальном направлении и локализованных в окрестности луча  $r = \rho$ , радиус которого определяется соотношением  $\epsilon'(\rho) + 2\epsilon/\rho = 0$ . Если выбрать этот луч в качестве опорного для криволинейной системы координат ( $s = \rho\varphi, \xi = \rho - r$ ), то коэффициенты (6.1) и (6.3) окажутся константами:

$$\gamma = \frac{1}{v_g^2} \left( 1 - \frac{v_g^2}{c^2} \right), \quad v_g = c\sqrt{\epsilon(\rho)},$$

$$\delta = -\frac{2}{\rho\omega}, \quad \alpha_1 = \epsilon \left( \frac{3}{\rho^2} + \alpha \right),$$

$$\alpha = -\frac{\epsilon''(\rho)}{2\epsilon(\rho)} > 0, \quad \varkappa = -\frac{1}{\rho\sqrt{1 - v_g^2/c^2}}, \quad (6.7)$$

$$\beta_{11} = \alpha - \frac{3}{\gamma c^2 \rho^2}, \quad \beta_{22} = \frac{1}{\gamma v_g^2 \rho^2}, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = 0.$$

Видно, что среда из-за дисперсии оказывается «потенциальной ямой» для пакета не только в радиальном, но и в азимутальном направлении. При выполнении равенства

$$\alpha = \frac{1 + 3v_g^2/c^2}{\rho^2(1 - v_g^2/c^2)}$$

эта «яма» становится симметричной ( $\beta_{mn} = \beta\delta_{mn}$ ) и, следовательно, инвариантной относительно преобразования поворота (6.4). Учитывая данное обстоятельство, можно переписать уравнение двумерного волнового пакета (6.5) в виде

$$2i\frac{\partial Q}{\partial \ell} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2} - (y_1^2 + y_2^2)Q = 0, \quad (6.8)$$

где введены безразмерные координаты

$$\ell = \frac{s}{\rho\sqrt{1 - v_g^2/c^2}},$$

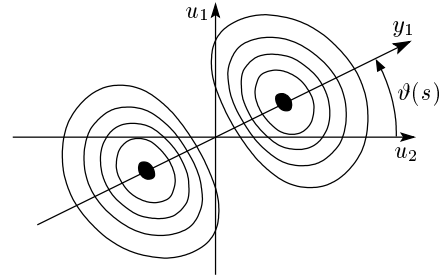


Рис. 3. Волновая прецессия моды  $Q_{10}$ , структура которой в направлении оси  $y_1$  описывается первой функцией Эрмита, а в направлении  $y_2$  — нулевой:  $Q_{10} \sim y_1 \exp(-y_1^2/2 - y_2^2/2) \exp(-2i\ell)$

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{k/\rho}}{(1 - v_g^2/c^2)^{1/4}} x_{1,2}.$$

Свойства уравнения (6.8), имеющего вид уравнения Шредингера для двумерного линейного осциллятора, хорошо изучены. Его решения можно представить в виде суперпозиции стационарных мод (описываемых двумерными функциями Эрмита), которые в координатном представлении  $(u_1, u_2)$  прецессируют без искажения своей формы (рис. 3).

Угловая скорость огибающей волнового пакета (6.6) относительно среды как в рассмотренном здесь примере, так и в общем случае изотропной неоднородной плазмы, может быть представлена в виде

$$\Omega_p = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - v_g^2/c^2}} \right) \Omega_n, \quad (6.9)$$

где  $\Omega_n$  — скорость поворота главной нормали  $\mathbf{n}$  к опорному лучу.

### 6.2. Аналогия с прецессией Томаса

Выражение (6.9) имеет достаточно простой геометрический смысл в четырехмерном пространстве-времени. Нетрудно показать, что  $\Omega_p$  совпадает с угловой скоростью поворота вектора при его псевдопараллельном переносе вдоль мировой линии (или луча пространственно-временной геометрической оптики). Пусть материальная точка (или центр пакета) движется по окружности радиуса  $a$  с угловой скоростью  $\Omega_n$  (тангенциальная при этом равна  $v = \Omega_n a$ ). Введем в рассмотрение мнимую переменную  $z = ut, u = ic$ . Тогда мировая линия частицы будет описываться уравнением спирали в пространстве с формально евклидовой метрикой:

$$x = a \cos(\Omega_n t), \quad y = a \sin(\Omega_n t), \quad z = ut.$$

Элемент длины и кручение такой кривой равны соответственно

$$ds = \sqrt{u^2 + v^2} dt, \quad T = \frac{1}{a} \frac{uv}{u^2 + v^2}.$$

Около нее можно ввести ортогональную криволинейную систему координат, базис которой будет поворачиваться в соответствии с законом Рытова (3.3), имеющим в новых обозначениях вид

$$\frac{d\theta}{dt} = -T\sqrt{u^2 + v^2} = -\frac{\Omega_n}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.10)$$

Описание физических процессов в связанной с мировой линией ортогональной системе координат эквивалентно переходу в сопровождающую частицу (пакет) неинерциальную систему отсчета  $S'$  с диагональным метрическим тензором  $g^{ik}$ . Условие  $g^{0k} = 0$  ( $k \neq 0$ ) свидетельствует об отсутствии в  $S'$  поля сил Кориолиса. Это дало повод Томасу [17] (см. также [18]) утверждать, что ось гироскопа с тремя степенями свободы должна покоиться в  $S'$ , а в лабораторной системе отсчета прецессировать с частотой  $\Omega_p$ .

Вопрос о том, как должны реагировать реальные гироскопы на геометрические свойства мировых линий их точек подвеса, остается до сих пор дискуссионным. Что же касается волновых пакетов, то «адекватная реакция» свойственна лишь тем из них, которым довелось распространяться в неоднородной плазме. Нетрудно показать, что в мире Минковского плазма — единственная (для электромагнитных волн) изотропная среда. Запишем условие коллинеарности двух четырехмерных векторов — волнового ( $k_0, \mathbf{k}$ ) и групповой скорости ( $\tilde{\gamma}; \tilde{\gamma}\mathbf{v}_g/c$ ), где  $\tilde{\gamma} = (1 - v_g^2/c^2)^{-1/2}$  — в виде

$$\frac{k}{k_0} = \frac{v_g}{c} \rightarrow \omega \frac{\partial \omega}{\partial k} = c^2 k \rightarrow \omega^2 = c^2 k^2 + \omega_0^2, \quad (6.11)$$

где  $\omega_0^2$  — константа интегрирования; она должна быть положительной в силу релятивистского принципа причинности ( $v_g < c$ ). Последнее из равенств (6.11) — закон дисперсии электромагнитных волн в плазме и быстрых волн де Бройля.

В общем случае волновая прецессия не относится к релятивистским эффектам и проявляется при сколь угодно медленных движениях. Так, например, пакет ленгмюровских (продольных) волн в плазме, закон дисперсии которых имеет вид  $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 V_{Te}^2$  ( $V_{Te} \ll c$ ), прецессирует с частотой  $\Omega_p$ , определяемой тем же выражением (6.9), в котором, однако, надо провести замену  $c \rightarrow \sqrt{3}V_{Te}$ . В средах с положительной дисперсией групповой скорости волновая прецессия вообще отсутствует.

Вращение заменяется «поворотом на мнимый угол» (как в преобразованиях Лоренца), а рефракционная (поперечная) дисперсия приводит к усилению продольной диффузии пакета.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное в безабберационном приближении квазиоптики (БПК) уравнение (4.5) весьма удобно для описания квазигармонических полей волновых пакетов и нестационарных пучков в произвольных (без той или иной симметрии) плавно неоднородных средах. Оно позволяет пересчитывать волновой процесс из одного сечения криволинейной трассы пространства  $s = s_b$  в любое другое  $s = s_e$  ( $s_e \geq s_b$ ) без необходимости вычисления полей в промежуточных областях. На интервале  $s \in (s_b, s_e)$  достаточно проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих параметры функции Грина или собственных функций других разложений (например, по локально плоским волнам [1] или по обобщенным трехмерным функциям Эрмита [19]).

Вопрос о пределах применимости БПК нетривиален. В работе приведены лишь необходимые локальные ограничения на характерные пространственные и временные масштабы процессов, нарушения которых могут быть обнаружены без выхода за рамки приближения (4.5). Однако существуют более коварные, постепенно накапливающиеся, интегральные нарушения БПК. Заметить их можно лишь путем сравнения с результатами более строгой теории. Подобная трудно преодолимая проблема получения достаточных условий применимости характерна и для геометрической оптики, и для ее обобщений типа метода эталонных функций Кравцова—Людвига [14] или метода Маслова [20]. Квазиоптика, надо сказать, обладает тем преимуществом перед другими коротковолновыми асимптотиками, что для нее, если и не проторен, то по крайней мере намечен путь не только выявления интегральных нарушений, но и их устранения.

Для оптических систем развита весьма мощная дифракционная теория аббераций (ДТА) [8]. Она представляет волновое поле в виде интегральной свертки «идеального изображения» (безабберационного приближения  $W$ ) с так называемой функцией пропускания системы  $F$ . При этом результат ДТА может сколь угодно сильно отличаться от  $W$  как в количественном, так и в качественном (структурном) отношении. Квазиоптика адаптивна к обобщению ДТА на произвольные плавно неоднородные

среды (требования к малости aberrаций дискретных фазовых корректоров заменяются их плавностью). Пример такого обобщения для частного случая двумерных волновых пучков предпринят в [21], где показано, что параметры функции пропускания  $F$  (так же, как и функции Грина) находятся интегрированием расширенной системы дифференциальных уравнений в обыкновенных производных.

Таким образом, (4.5) является не только уравнением для приближенного описания волновых полей. Его решения остаются информативными даже за рамками их непосредственной применимости. Следует отметить, конечно, что неоднородные среды типа ионосферы, магнитосферы или плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза существенно отличаются от оптических линий и световодов, изготовление которых относится к сфере высоких технологий. Aberrации эквивалентных таким средам «призм» и «линз», как правило, сильны и разнообразны. Более того, они даже не до конца проклассифицированы. Поэтому буквальный перенос ДТА в квазиоптику неоднородных сред невозможен. Создание квазиоптического аналога ДТА требует дополнительных обоснований и несколько иных подходов.

К достоинствам уравнений квазиоптики можно отнести также их толерантность к обобщениям на нелинейные (исходно неоднородные) среды. Только при этом опорная траектория оказывается зависящей от интенсивности и структуры волнового поля [22–24].

В заключение заметим, что применимость уравнения (4.5) не ограничивается рамками электродинамики — с точностью до обозначений оно справедливо для волн произвольной природы.

Авторы признательны В. Б. Гильденбургу, В. Е. Семенову и участникам семинара школы М. А. Миллера за полезные замечания. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 98-02-17019 и № 00-15-96734).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Пермитин, А. И. Смирнов, ЖЭТФ **109**, 736 (1996).
2. Л. А. Островский, ЖЭТФ **51**, 1189 (1966).
3. А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Изв. вузов. Радиофизика **10**, 539 (1967).
4. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных импульсов*, Наука, Москва (1988).
5. И. Г. Кондратьев, Г. Д. Малюжинец, *Дифракция волн*, в кн. *Физическая энциклопедия*, Сов. энцикл., Москва (1988), т. 1, с. 664.
6. А. И. Смирнов, Изв. вузов. Радиофизика **24**, 1503 (1981).
7. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, Москва (1972).
8. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).
9. В. И. Таланов, Дисс.... докт. физ.-матем. наук, ГГУ, НИРФИ, Горький (1967).
10. Х. Хаус, *Волны и поля в оптоэлектронике*, Мир, Москва (1988).
11. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fibre Optics*, Academ. Press, New York (1989).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
14. Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов, *Геометрическая оптика неоднородных сред*, Наука, Москва (1980).
15. С. М. Рытов, ДАН СССР **18**, 263 (1938).
16. E. Wolf, Phys. Rev. Lett. **56**, 1370 (1986). Ю. Е. Дьяков, КЭ **20**, 1068 (1993).
17. L. H. Thomas, *The Kinematics of an Electron with an Axis*, Phil. Mag., Jan. (1927).
18. M. Möller, *Theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford (1972). J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, New York (1975).
19. G. V. Pereverzev, Phys. Plasmas **5**, 3529 (1998).
20. В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Наука, Москва (1988).
21. И. Г. Кондратьев, Г. В. Пермитин, А. И. Смирнов, Изв. вузов. Радиофизика **23**, 1195 (1980).
22. А. И. Смирнов, Г. М. Фрайман, ЖЭТФ **83**, 1287 (1982).
23. Е. В. Ванин, А. И. Смирнов, ЖЭТФ **110**, 1136 (1996).
24. А. И. Смирнов, Физика плазмы **17**, 811 (1987).