

ЭФФЕКТИВНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ КРУГОВОЙ ФОРМЫ

*Б. Я. Балагуров**

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 мая 2000 г.

Рассмотрена задача о проводимости двумерной системы с периодическим расположением круговых включений двух типов. Предложен последовательный метод вычисления электропроводности и других эффективных характеристик этой модели, применимый при произвольных концентрациях компонент. Комплексный потенциал вне включений выражен через дзета-функцию Вейерштрасса и ее производные. Для неизвестных коэффициентов, входящих в общее выражение для потенциала, получена бесконечная система алгебраических уравнений, из которой при малых концентрациях включений следует вириальное разложение для проводимости. Численный анализ этой системы уравнений дает принципиальную возможность исследовать различные эффективные характеристики модели (в том числе коэффициент Холла и термоэдс) во всей области изменения входящих в задачу параметров.

PACS: 41.20.Cv, 81.90.+c

1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении явлений переноса в неоднородных средах основное внимание уделяется двухкомпонентным системам (композитам) как наиболее простым для анализа. Однако и в этом случае уже решение «простейшей» задачи о проводимости (диэлектрической проницаемости, теплопроводности, стационарной диффузии т. п.) наталкивается на практически непреодолимые математические трудности для неупорядоченных систем. Поэтому имеющиеся для электропроводности таких сред результаты получены, в основном, с помощью модельных и численных экспериментов. Еще более сложными являются задачи о термоэлектрических, гальваномагнитных, термогальваномагнитных и т. п. свойствах таких систем. Тем не менее в исследовании электрофизических характеристик двухкомпонентных сред достигнут определенный прогресс, особенно значительный в двумерном случае.

Из результатов, полученных для двухкомпонент-

ных сред, отметим следующие. Это, прежде всего, описание критического поведения проводимости систем с фазовым переходом металл–диэлектрик в рамках гипотезы подобия [1, 2]. В двумерном случае установлены соотношения, связывающие эффективные проводимости исходной и так называемой взаимной систем [3, 4] (см. также [5]). Аналитическое решение задачи о проводимости дано для ряда двумерных двоякопериодических моделей [6–8] методами ТФКП. Для двумерной случайно-неоднородной системы с критическим составом найдены проводимость [4], гальваномагнитные [9] и термоэлектрические [5] характеристики. Наконец, в двумерном случае установлен изоморфизм задач о термоэлектрических, гальваномагнитных и термогальваномагнитных свойствах с задачей о проводимости [10, 11]. Соответствующие соотношения изоморфизма [10, 11] позволяют по известной эффективной проводимости некоторой двумерной системы вычислить ее основные электрофизические характеристики и, тем самым, дать полное описание всей совокупности стационарных явлении переноса в такой системе. Ряд результатов получен и для трехмерных сред — см.,

*E-mail: vkashin@deom.chph.ras.ru

например, [1, 2, 10, 12–16].

Иная ситуация в исследовании многокомпонентных сред, гораздо более разнообразных по своим характеристикам, чем двухкомпонентные. Хотя часть результатов из [3–5, 14, 15] и других работ переносится на многокомпонентные системы, тем не менее теория их свойств находится в зачаточном состоянии. В этом случае отсутствуют как общие результаты типа соотношения изоморфизма, так и последовательные расчеты конкретных моделей. В то же время изучение многокомпонентных (в частности, трехкомпонентных) систем представляет как общефизический, так и прикладной интерес. Естественно начинать исследование таких объектов с рассмотрения более простых для анализа периодических моделей.

Определенный шаг в этом направлении сделан в работе [17], где рассмотрена задача о проводимости двумерной трехкомпонентной модели, являющейся обобщением модели Рэлея [18] — изотропной матрицы с регулярным расположением (в шахматном порядке) круговых включений двух типов, имеющих разные радиусы и различные проводимости. Однако метод, предложенный в [17], изначально является приближенным и может использоваться только при малых концентрациях включений. Но и в этом случае нельзя указать точную границу применимости соответствующего вириального разложения для эффективной проводимости. Тем более этот подход непригоден при немалых концентрациях.

В настоящей работе задача о проводимости двумерной трехкомпонентной модели, рассмотренной в [17], решена методом работы [8]. Дана последовательная схема вычисления проводимости и других эффективных характеристик этой модели, пригодная при произвольных концентрациях компонент. Комплексный потенциал задачи вне включений выражен, как и в [8], через дзета-функцию Вейерштрасса [19, 20] и ее производные. Для неизвестных коэффициентов, входящих в общее выражение для потенциала, получена бесконечная система алгебраических уравнений. При малых концентрациях включений эта система решается итерациями, что позволяет находить в аналитическом виде точные вириальные разложения для проводимости и других величин. При произвольных концентрациях система уравнений для коэффициентов может быть решена численными методами, что дает принципиальную возможность исследовать различные эффективные характеристики рассматриваемой модели во всей области изменения входящих в задачу параметров.

В рамках задачи о проводимости вычислены

также парциальные среднеквадратичные значения напряженности ψ_i электрического поля, непосредственно выражающиеся через производные от эффективной электропроводности σ_e по ее аргументам — проводимостям отдельных компонент [14] (см. также [8]). Эта связь позволяет изучить более тонкие детали поведения σ_e (например, в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик), чем при прямом вычислении эффективной проводимости. Знание величин ψ_i необходимо, кроме того, при рассмотрении задач о магнитосопротивлении в слабом магнитном поле, о низкочастотной диэлектрической проницаемости металлоэлектриков, о структурных флуктуациях напряженности электрического поля и плотности тока и т. д.

Кроме проводимости в работе рассмотрена задача о коэффициенте Холла в слабом магнитном поле \mathbf{H} . Холловская составляющая σ_{ae} эффективного тензора проводимости $\hat{\sigma}_e$ в линейном по \mathbf{H} приближении выражена через коэффициенты ξ_n и η_n , входящие в потенциал задачи о проводимости при $\mathbf{H} = 0$. Через те же коэффициенты выражается и термоэдс исследуемой модели в случае слабой термоэлектрической связи. Отметим также, что между различными величинами установлен ряд точных соотношений, использование которых позволяет контролировать правильность вычислений при численном анализе системы уравнений для коэффициентов ξ_n и η_n .

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ

Исследуемая модель представляет собой двумерную изотропную матрицу проводимости σ_1 с вклю-

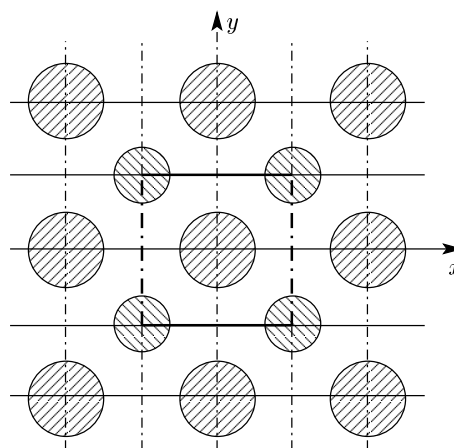


Рис. 1

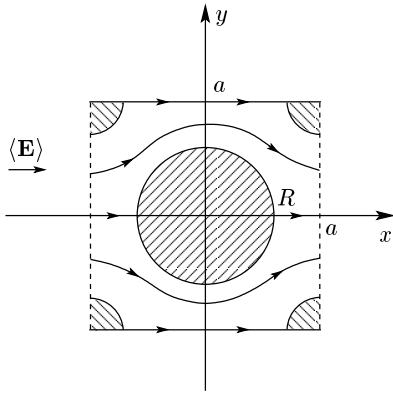


Рис. 2. Элементарная ячейка. Штриховые линии — эквипотенциали, сплошные со стрелками — линии тока

ключениями круговой формы двух типов, расположенных в шахматном порядке (рис. 1). Включения первого типа (радиуса R и проводимости σ_2) образуют квадратную решетку с периодом $2a$. Включения второго типа (радиуса ρ и проводимости σ_3) образуют такую же решетку, сдвинутую на половину периода по осям x и y . Таким образом, включения второго типа находятся в центрах квадратов, образованных включениями первого типа (и наоборот). Отметим, что описываемая модель отличается от предложенной в [17] только поворотом на 45° осей координат.

Рассмотрим ситуацию, когда средняя напряженность $\langle \mathbf{E} \rangle$ электрического поля направлена вдоль оси x . В этом случае напряженность $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y)$ кроме очевидной периодичности,

$$\mathbf{E}(x + 2a, y) = \mathbf{E}(x, y + 2a) = \mathbf{E}(x, y),$$

обладает определенной симметрией (ср. с [8]):

$$E_x(-x, y) = E_x(x, -y) = E_x(x, y),$$

$$E_y(-x, y) = E_y(x, -y) = -E_y(x, y).$$

При этом вертикальные границы элементарной ячейки (рис. 2) и прямая $x = 0$ являются эквипотенциалами, на которых $E_y = 0$, а горизонтальные и прямая $y = 0$ — линиями тока, на которых также $E_y = 0$.

Комплексный потенциал $\Phi_2(z)$ внутри включения проводимости σ_2 ($|z| < R$) с учетом симметрии электрического поля имеет вид

$$\Phi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} z^{2n+1}, \quad z = x + iy. \quad (1)$$

Соответственно внутри включения проводимости σ_3 с центром в точке $z_0 = (1 + i)a$ имеем ($|z - z_0| < \rho$)

$$\Phi_3(z) = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} (z - z_0)^{2n+1}. \quad (2)$$

Аналогичный вид имеют потенциалы внутри включений с центрами в точках $(1 - i)a$, $-(1 + i)a$ и $-(1 - i)a$, также принадлежащих элементарной ячейке, однако в дальнейшем они не понадобятся.

Вне включений комплексный потенциал $\Phi_1(z)$ может быть представлен как суперпозиция потенциалов двух квадратных решеток [8]:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = \varphi_0 + \beta z + \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \zeta^{(2n)}(z) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} \zeta^{(2n)}(z - z_0). \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса [19, 20], $\zeta^{(2n)}(z)$ — производная порядка $2n$ от $\zeta(z)$. В (3) φ_0 — константа, линейный по z член происходит от внешнего однородного электрического поля, слагаемые с $n = 0$ отвечают полю от наведенных дипольных моментов, члены с $n \geq 1$ — от высших мультиполей. Постоянные φ_0 , β , B_{2n} и D_{2n} в (3), а также A_{2n+1} , C_0 и C_{2n+1} в (1) и (2) при выбранном направлении $\langle \mathbf{E} \rangle$ вещественны. Используя известные свойства функций Вейерштрасса [19, 20], можно убедиться, что потенциал (3) удовлетворяет упомянутым выше условиям на границах элементарной ячейки и на ее осях симметрии. Отметим, что вещественный электрический потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ дается действительной частью $\Phi(z)$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \text{Re } \Phi(z),$$

а производная от функции $\Phi(z)$ связана с составляющими напряженности \mathbf{E} следующим образом:

$$\Phi'(z) = -E_x + iE_y.$$

Для рассматриваемой квадратной решетки с полупериодами в комплексной плоскости $\omega = a$ и $\omega' = ia$ (так называемый лемнискатический случай) имеем [19, 20]

$$\begin{aligned} \zeta(z + 2a) &= \zeta(z) + \frac{\pi}{2a}, \\ \zeta(z + 2ia) &= \zeta(z) - i\frac{\pi}{2a}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$g_2 = \frac{1}{a^4} \left[K \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]^4, \quad g_3 = 0, \quad (5)$$

где g_2 и g_3 — инварианты функции Вейерштрасса, $K(1/\sqrt{2}) = 1.85407\dots$ — полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ с модулем $k = 1/\sqrt{2}$.

Электрические потенциалы $\varphi_i(\mathbf{r}) = \text{Re } \Phi_i(z)$ (где $i = 1, 2, 3$) должны удовлетворять обычным граничным условиям (см. следующий раздел), из которых определяются входящие в выражения (1)–(3) коэффициенты. При этой процедуре для функции $\zeta(z)$ используется разложение в окрестности точки $z = 0$ [20]:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{2k-1} z^{2k-1}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{g_2}{20}, & c_4 &= \frac{1}{3} c_2^2, \\ c_6 &= \frac{2}{3 \cdot 13} c_2^3, & c_8 &= \frac{5}{3 \cdot 13 \cdot 17} c_2^4, \quad \dots \end{aligned} \quad (7)$$

В лемнистическом случае все коэффициенты c_k с нечетными индексами равны нулю. Величины c_{2k} удовлетворяют рекуррентному соотношению [20]

$$c_{2k} = \frac{3}{(4k+1)(2k-3)} \sum_{m=1}^{k-1} c_{2m} c_{2k-2m}, \quad k \geq 2, \quad (8)$$

которое позволяет последовательно находить коэффициенты c_{2k} по мере роста индекса k .

Кроме (6) ниже понадобится еще и разложение функции $\zeta(z)$ в окрестности точки $z = z_0$ [20]:

$$\zeta(z) = \zeta(z_0) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{2k-1} (z - z_0)^{2k-1}, \quad (9)$$

где

$$\zeta(z_0) = (1-i) \frac{\pi}{4a}, \quad z_0 = (1+i)a, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d_2 &= -\frac{g_2}{4}, & d_4 &= \frac{1}{5} d_2^2, \\ d_6 &= \frac{2}{75} d_2^3, & d_8 &= \frac{1}{325} d_2^4, \quad \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты d_k с нечетными индексами равны нулю. Для величин d_{2k} также может быть установлено рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} d_{2k} &= \frac{3}{(2k-1)(4k-3)} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{k-1} d_{2m} d_{2k-2m}, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Равенство (12) получается при подстановке разложения (9) в дифференциальное уравнение [19, 20]

$$2\wp''(z) = 12\wp^2(z) - g_2,$$

где $\wp(z) = -\zeta'(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса. Связь коэффициентов d_{2k} с величинами c_{2k} из (6)–(8) установлена в разд. 8 — см. формулу (99).

Ситуация, когда средняя напряженность $\langle \mathbf{E} \rangle$ электрического поля направлена вдоль оси y , рассматривается аналогичным образом. Величины, относящиеся к этому случаю, будем снабжать сверху черточкой. Для комплексных потенциалов в областях с проводимостями σ_1 , σ_2 и σ_3 имеем соответственно

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1(z) &= \bar{\varphi}_0 - i \left\{ \bar{\beta}z - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{2n} \zeta^{(2n)}(z) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{D}_{2n} \zeta^{(2n)}(z - z_0) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\bar{\Phi}_2(z) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{2n+1} z^{2n+1}, \quad (14)$$

$$\bar{\Phi}_3(z) = \bar{C}_0 - i \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_{2n+1} (z - z_0)^{2n+1} \quad (15)$$

с теми же, что и в (1)–(3), обозначениями. Величины $\bar{\varphi}_0$, $\bar{\beta}$, \bar{B}_{2n} , \bar{D}_{2n} , \bar{A}_{2n+1} , \bar{C}_0 , \bar{C}_{2n+1} вещественны.

3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

На границе включения первого типа (проводимости σ_2) при $r = R$ должны выполняться обычные условия:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= h_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}, \quad h_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Электрический потенциал $\varphi_1(\mathbf{r}) = \text{Re } \Phi_1(z)$ в окрестности этого включения представим, используя для $\zeta(z)$ разложение (6), а для $\zeta(z - z_0)$ — разложение, следующее из (9):

$$\zeta(z - z_0) = -\zeta(z_0) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{2k-1} z^{2k-1}. \quad (17)$$

Для производной $\zeta^{(2n)}(z)$ используем формулу (A.2) из [8], а для $\zeta^{(2n)}(z - z_0)$ из (17) имеем

$$\begin{aligned} \zeta^{(2n)}(z - z_0) &= -\zeta(z_0) \delta_{n0} - \\ &- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2n+2m)!}{(2m+1)!} d_{n+m+1} z^{2m+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив разложения для $\zeta^{(2n)}(z)$ и $\zeta^{(2n)}(z - z_0)$ в (3), положив $z = r \exp(i\theta)$ и отделив действительную часть, получим выражение для $\varphi_1(\mathbf{r})$ в окрестности включения первого типа. Потенциал $\varphi_2(\mathbf{r}) = \text{Re } \Phi_2(z)$ легко находится из (1).

Используя полученные для $\varphi_1(\mathbf{r})$ и $\varphi_2(\mathbf{r})$ выражения, из (16) сходным с предложенным в [8] способом найдем

$$A_{2n+1} = \frac{2}{1 - h_2} \frac{(2n)!}{R^{4n+2}} B_{2n}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4a} D_0, \quad (19)$$

$$B_{2n} + \frac{1 - h_2}{1 + h_2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2n + 2m)!}{(2n)!(2n + 1)!} \times \\ \times R^{4n+2} (B_{2m} c_{n+m+1} + D_{2m} d_{n+m+1}) = \\ = \frac{1 - h_2}{1 + h_2} \beta R^2 \delta_{n0}. \quad (20)$$

В окрестности включения второго типа (проводимости σ_3) для $\zeta(z)$ и $\zeta(z - z_0)$ используем аналогичные разложения вблизи точки $z = z_0$ и полагаем $z - z_0 = r' \exp(i\theta')$. Из граничных условий при $r' = \rho$:

$$\varphi_1 = \varphi_3, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r'} = h_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial r'}, \quad h_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}, \quad (21)$$

получаем

$$\varphi_0 + \beta a + B_0 \frac{\pi}{4a} = C_0, \quad (22)$$

$$C_{2n+1} = \frac{2}{1 - h_3} \frac{(2n)!}{\rho^{4n+2}} D_{2n}, \quad (23)$$

$$D_{2n} + \frac{1 - h_3}{1 + h_3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2n + 2m)!}{(2n)!(2n + 1)!} \times \\ \times \rho^{4n+2} (B_{2m} d_{n+m+1} + D_{2m} c_{n+m+1}) = \\ = \frac{1 - h_3}{1 + h_3} \beta \rho^2 \delta_{n0}. \quad (24)$$

Введем вместо B_{2n} и D_{2n} «переменные» ξ_n и η_n согласно

$$B_{2n} = \beta \frac{R^{2n+2} \delta_2}{\sqrt{(2n)!(2n + 1)!}} \xi_n, \quad \delta_2 = \frac{1 - h_2}{1 + h_2}, \quad (25)$$

$$D_{2n} = \beta \frac{\rho^{2n+2} \delta_3}{\sqrt{(2n)!(2n + 1)!}} \eta_n, \quad \delta_3 = \frac{1 - h_3}{1 + h_3}. \quad (26)$$

Тогда уравнения (20) и (24) примут вид

$$\xi_n + \sum_{m=0}^{\infty} (M_{nm} \xi_m + P_{nm} \eta_m) = \delta_{n0}, \quad (27)$$

$$\eta_n + \sum_{m=0}^{\infty} (Q_{nm} \xi_m + N_{nm} \eta_m) = \delta_{n0}. \quad (28)$$

Здесь

$$M_{nm} = G_{nm} R^{2(n+m+1)} c_{n+m+1} \delta_2, \\ P_{nm} = G_{nm} R^{2n} \rho^{2m+2} d_{n+m+1} \delta_3, \\ Q_{nm} = G_{nm} \rho^{2n} R^{2m+2} d_{n+m+1} \delta_2, \\ N_{nm} = G_{nm} \rho^{2(n+m+1)} c_{n+m+1} \delta_3, \\ G_{nm} = \frac{(2n + 2m)!}{\sqrt{(2n)!(2n + 1)!(2m)!(2m + 1)!}}. \quad (29)$$

Матрицы \hat{M} и \hat{N} симметричны ($M_{nm} = M_{mn}$, $N_{nm} = N_{mn}$), а \hat{P} и \hat{Q} связаны соотношением

$$P_{nm} R^2 \delta_2 = Q_{mn} \rho^2 \delta_3. \quad (30)$$

Как отмечалось, коэффициенты c_k и d_k с нечетными индексами равны нулю. Поэтому матричные элементы M_{nm} , P_{nm} , Q_{nm} и N_{nm} отличны от нуля только в том случае, когда индексы n и m имеют различную четность. Коэффициенты A_{2n+1} и C_{2n+1} выражаются через ξ_n и η_n следующим образом:

$$A_{2n+1} = \frac{2\beta}{1 + h_2} \frac{1}{R^{2n}} \frac{1}{\sqrt{2n + 1}} \xi_n, \quad (31)$$

$$C_{2n+1} = \frac{2\beta}{1 + h_3} \frac{1}{\rho^{2n}} \frac{1}{\sqrt{2n + 1}} \eta_n. \quad (32)$$

Если ввести столбцы

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

то систему уравнений (27), (28) можно записать в более компактном («векторном») виде:

$$\mathbf{x}_n + \sum_{m=0}^{\infty} \hat{S}_{nm} \mathbf{x}_m = \mathbf{1} \cdot \delta_{n0}, \quad (34)$$

где

$$\hat{S}_{nm} = \begin{pmatrix} M_{nm} & P_{nm} \\ Q_{nm} & N_{nm} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Решая уравнение (34) итерациями — разложением по степеням матрицы \hat{S}_{nm} , — найдем формальное решение:

$$\mathbf{x}_n = \left\{ \delta_{n0} - \hat{S}_{n0} + \sum_m \hat{S}_{nm} \hat{S}_{m0} - \sum_{lm} \hat{S}_{nl} \hat{S}_{lm} \hat{S}_{m0} + \right. \\ \left. + \sum_{klm} \hat{S}_{nk} \hat{S}_{kl} \hat{S}_{lm} \hat{S}_{m0} - \dots \right\} \cdot \mathbf{1}. \quad (36)$$

Отсюда при $n = 0$ следует

$$\mathbf{x}_0 = \left\{ 1 + \sum_m \hat{S}_{0m} \hat{S}_{m0} + \sum_{klm} \hat{S}_{0k} \hat{S}_{kl} \hat{S}_{lm} \hat{S}_{m0} + \dots \right\} \cdot \mathbf{1}. \quad (37)$$

В (37) учтено, что \hat{S}_{nm} отлична от нуля, если n и m имеют различную четность.

Формулы (1)–(3) и (25)–(37) совместно с выражением для разности потенциалов U_x из (43) дают точное решение задачи об отыскании электрического потенциала в среде.

Аналогичным образом в случае, когда поле $\langle \mathbf{E} \rangle$ направлено вдоль оси y , находим

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0 &= \bar{D}_0 \frac{\pi}{4a}, \quad \bar{\varphi}_0 + \bar{\beta}a + \bar{B}_0 \frac{\pi}{4a} = \bar{C}_0, \\ \bar{A}_{2n+1} &= \frac{2\bar{\beta}}{1+h_2} \frac{1}{R^{2n}} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \bar{\xi}_n, \\ \bar{C}_{2n+1} &= \frac{2\bar{\beta}}{1+h_3} \frac{1}{\rho^{2n}} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \bar{\eta}_n, \\ \bar{B}_{2n} &= \bar{\beta} \frac{R^{2n+2} \delta_2}{\sqrt{(2n)!(2n+1)!}} \bar{\xi}_n, \\ \bar{D}_{2n} &= \bar{\beta} \frac{\rho^{2n+2} \delta_3}{\sqrt{(2n)!(2n+1)!}} \bar{\eta}_n. \end{aligned} \quad (38)$$

Величины $\bar{\xi}_n$ и $\bar{\eta}_n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_n - \sum_{m=0}^{\infty} (M_{nm} \bar{\xi}_m + P_{nm} \bar{\eta}_m) &= \delta_{n0}, \\ \bar{\eta}_n - \sum_{m=0}^{\infty} (Q_{nm} \bar{\xi}_m + N_{nm} \bar{\eta}_m) &= \delta_{n0} \end{aligned} \quad (39)$$

с теми же, что и в (27)–(29), матричными элементами M_{nm} , P_{nm} , Q_{nm} и N_{nm} . Система (39) в «векторной» форме имеет вид

$$\bar{\mathbf{x}}_n - \sum_{m=0}^{\infty} \hat{S}_{nm} \bar{\mathbf{x}}_m = \mathbf{1} \cdot \delta_{n0} \quad (40)$$

с матрицей \hat{S}_{nm} из (35).

Из (40) для $\bar{\mathbf{x}}_n$ следует разложение типа (36) с заменой $\hat{S}_{nm} \rightarrow -\hat{S}_{nm}$, так что

$$\bar{\xi}_n = (-1)^n \xi_n, \quad \bar{\eta}_n = (-1)^n \eta_n \quad (41)$$

и, в частности, $\bar{\xi}_0 = \xi_0$ и $\bar{\eta}_0 = \eta_0$. Соответственно из сравнения (38) с (25), (26) и (31), (32) с учетом (41) находим (при $\bar{\beta} = \beta$)

$$\begin{aligned} \bar{B}_{2n} &= (-1)^n B_{2n}, \quad \bar{D}_{2n} = (-1)^n D_{2n}, \\ \bar{A}_{2n+1} &= (-1)^n A_{2n+1}, \quad \bar{C}_{2n+1} = (-1)^n C_{2n+1}. \end{aligned} \quad (42)$$

4. ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Вычисляя с помощью комплексного потенциала $\Phi(z)$ падение напряжения U_x на элементарной ячейке и полный ток I_x через нее в направлении оси x , аналогично [8] получаем

$$U_x = -2a \left[\beta + (B_0 + D_0) \frac{\pi}{4a^2} \right], \quad (43)$$

$$I_x = -2\sigma_1 a \left[\beta - (B_0 + D_0) \frac{\pi}{4a^2} \right]. \quad (44)$$

Для эффективной проводимости $\sigma_e = I_x/U_x$ из (43), (44) находим

$$\sigma_e = \sigma_1 \frac{\beta - (B_0 + D_0) \pi / 4a^2}{\beta + (B_0 + D_0) \pi / 4a^2}. \quad (45)$$

Подставив в (45) в согласии с (25), (26)

$$B_0 = \xi_0 \beta R^2 \delta_2, \quad D_0 = \eta_0 \beta \rho^2 \delta_3,$$

для безразмерной эффективной проводимости $f = \sigma_e / \sigma_1$ получаем

$$f = \frac{1 - \xi_0 p_2 \delta_2 - \eta_0 p_3 \delta_3}{1 + \xi_0 p_2 \delta_2 + \eta_0 p_3 \delta_3}, \quad (46)$$

где $p_2 = \pi R^2 / (2a)^2$ и $p_3 = \pi \rho^2 / (2a)^2$ — концентрации соответственно второй и третьей компонент. Нетрудно убедиться, что это же выражение для f получается и в случае, когда поле $\langle \mathbf{E} \rangle$ направлено вдоль оси y . Таким образом, для вычисления эффективной проводимости рассматриваемой модели достаточно найти величины ξ_0 и η_0 .

При малых концентрациях включений (т. е. при $R \ll a$, $\rho \ll a$) коэффициенты ξ_n и η_n могут быть найдены из (36), (37) в виде вириальных рядов. Ограничиваясь ввиду громоздкости соответствующих разложений нижшим приближением, из (37) получаем

$$\mathbf{x}_0 = \left\{ 1 + \hat{S}_{01} \hat{S}_{10} + \dots \right\} \cdot \mathbf{1},$$

откуда

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 1 + \frac{1}{3} (R^8 c_2^2 \delta_2^2 + R^6 \rho^2 c_2 d_2 \delta_2 \delta_3 + \\ &+ R^2 \rho^6 d_2^2 \delta_2 \delta_3 + \rho^8 c_2 d_2 \delta_3^2) + \dots, \\ \eta_0 &= 1 + \frac{1}{3} (R^8 c_2 d_2 \delta_2^2 + R^6 \rho^2 d_2 \delta_2 \delta_3 + \\ &+ R^2 \rho^6 c_2 d_2 \delta_2 \delta_3 + \rho^8 c_2^2 \delta_3^2) + \dots \end{aligned} \quad (47)$$

Аналогичным образом из (36) следует

$$\mathbf{x}_1 = \{-S_{10} + \dots\} \cdot \mathbf{1},$$

откуда

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (R^4 c_2 \delta_2 + R^2 \rho^2 d_2 \delta_3) + \dots, \\ \eta_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (R^2 \rho^2 d_2 \delta_2 + \rho^4 c_2 \delta_3) + \dots \end{aligned} \quad (48)$$

При немалых R и ρ величины ξ_n и η_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) могут быть найдены с помощью численного решения системы уравнений (27), (28).

В двумерном случае имеет место соотношение взаимности [3, 4], которое связывает эффективные электропроводности исходной системы (с локальной проводимостью $\sigma(\mathbf{r})$) и так называемой взаимной системы (с локальной проводимостью $\lambda^2/\sigma(\mathbf{r})$):

$$\sigma_e(\{\sigma(\mathbf{r})\}) \sigma_e(\{\lambda^2/\sigma(\mathbf{r})\}) = \lambda^2.$$

Здесь λ — некоторая константа, являющаяся параметром соответствующего преобразования симметрии [5]. Соотношение взаимности в такой форме справедливо для изотропных двумерных систем с произвольной зависимостью $\sigma(\mathbf{r})$ от координат. В частности, для N -компонентного композита оно принимает вид

$$\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N) \sigma_e\left(\frac{\lambda^2}{\sigma_1}, \frac{\lambda^2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\lambda^2}{\sigma_N}\right) = \lambda^2. \quad (49)$$

Конкретное значение параметра λ фактически несущественно, так как для безразмерной эффективной проводимости f , определенной согласно

$$\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N) = \sigma_1 f(\sigma_2/\sigma_1, \dots, \sigma_N/\sigma_1),$$

он из соотношения взаимности выпадает:

$$\begin{aligned} f(h_2, \dots, h_N) f(1/h_2, \dots, 1/h_N) &= 1, \\ h_i &= \sigma_i/\sigma_1. \end{aligned} \quad (50)$$

Заметим, что переход к взаимной системе ($h_2 \rightarrow 1/h_2, h_3 \rightarrow 1/h_3, \dots$) эквивалентен заменам $\delta_2 \rightarrow -\delta_2, \delta_3 \rightarrow -\delta_3, \dots$, где $\delta_i = (1 - h_i)/(1 + h_i)$. Для рассматриваемой трехкомпонентной модели матрица \hat{S}_{nm} из (35) при этом меняет знак, а величины ξ_0 и η_0 остаются неизменными, так что, как следует из (46), f переходит в $1/f$ и соотношение взаимности (50) (при $N = 3$) выполняется автоматически.

5. ПАРЦИАЛЬНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

С эффективной проводимостью σ_e композита непосредственно связаны парциальные среднеквад-

ратичные значения напряженности электрического поля [8, 14]:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \langle \mathbf{e}^2 \rangle^{(i)} = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_i}, \\ \mathbf{e}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}(\mathbf{r})/|\langle \mathbf{E} \rangle|, \end{aligned} \quad (51)$$

где $\langle \dots \rangle^{(i)}$ — интеграл по объему (площади в двумерном случае) i -й компоненты, деленный на объем V образца. Из известного тождества $\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle \cdot \langle \mathbf{E} \rangle = \sigma_e (\langle \mathbf{E} \rangle)^2$ [4, 14] для N -компонентной среды следует соотношение

$$\sum_{i=1}^N h_i \psi_i = f \quad (52)$$

с ψ_i из (51) и h_i из (50). Отсюда для трехкомпонентной системы находим

$$\psi_1 = f - h_2 \psi_2 - h_3 \psi_3, \quad (53)$$

так что для рассматриваемой модели нет необходимости вычислять величину ψ_1 прямым расчетом с помощью (51).

Используя потенциалы (1) и (2), находим

$$\psi_i = \frac{4}{(1 + h_i)^2} \frac{p_i J_i}{\Delta^2}, \quad i = 2, 3, \quad (54)$$

$$J_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2, \quad J_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^2, \quad (55)$$

$$\Delta = 1 + \xi_0 p_2 \delta_2 + \eta_0 p_3 \delta_3. \quad (56)$$

Согласно (51), в данном случае должны выполняться равенства

$$\psi_2 = \frac{\partial f}{\partial h_2}, \quad \psi_3 = \frac{\partial f}{\partial h_3}. \quad (57)$$

Нетрудно убедиться, используя формулы (46)–(48), что соотношения (57) с точностью до R^8 и ρ^8 включительно выполняются. Однако справедливость равенств (57) для данной модели может быть доказана прямым расчетом и при произвольных R и ρ .

Дифференцирование (46) по h_2 дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h_2} &= \frac{4}{(1 + h_2)^2} \times \\ &\times \left[\left(\xi_0 + \frac{\partial \xi_0}{\partial \delta_2} \delta_2 \right) p_2 + \frac{\partial \eta_0}{\partial \delta_2} p_3 \delta_3 \right] \Delta^{-2}. \end{aligned} \quad (58)$$

Для справедливости первого равенства (57) с ψ_2 из (54) и $\partial f/\partial h_2$ из (58) должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial \delta_2} p_2 \delta_2 + \frac{\partial \eta_0}{\partial \delta_2} p_3 \delta_3 = p_2 (J_2 - \xi_0) \quad (59)$$

с J_2 из (55).

Запишем равенство (36) в виде

$$(\mathbf{x}_n)^\nu = \sum_\mu \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{n0}^{\nu\mu}, \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_n)^1 &= \xi_n, & (\mathbf{x}_n)^2 &= \eta_n, \\ (\hat{S})_{nm}^{11} &= M_{nm}, & (\hat{S})_{nm}^{12} &= P_{nm}, \\ (\hat{S})_{nm}^{21} &= Q_{nm}, & (\hat{S})_{nm}^{22} &= N_{nm}. \end{aligned}$$

Дифференцируя (60) (при $\nu = 1$ и $n = 0$) по δ_2 , найдем

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial \delta_2} \delta_2 = - \sum_\mu \left((1 + \hat{S})^{-1} \hat{V} (1 + \hat{S})^{-1} \right)_{00}^{1\mu} \quad (61)$$

и аналогичное выражение для $(\partial \eta_0 / \partial \delta_2) \delta_2$. В (61) матрица \hat{V} имеет вид

$$\hat{V}_{nm} = \begin{pmatrix} M_{nm} & 0 \\ Q_{nm} & 0 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Использование симметрии матричных элементов M_{nm} , N_{nm} и равенства (30) позволяет установить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{0n}^{11} &= \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{n0}^{11}, \\ \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{0n}^{12} &= \frac{p_3 \delta_3}{p_2 \delta_2} \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{n0}^{21}, \\ \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{0n}^{21} &= \frac{p_2 \delta_2}{p_3 \delta_3} \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{n0}^{12}, \\ \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{0n}^{22} &= \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{n0}^{22}. \end{aligned} \quad (63)$$

С учетом (63), определения ξ_n из (60) и равенства (30) выражение (61) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_0}{\partial \delta_2} \delta_2 &= - \sum_{nm} \left\{ \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{n0}^{11} M_{nm} + \right. \\ &\quad \left. + \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{n0}^{21} P_{mn} \right\} \xi_m. \end{aligned} \quad (64)$$

Аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_0}{\partial \delta_2} \delta_2 &= - \frac{p_2 \delta_2}{p_3 \delta_3} \sum_{nm} \left\{ \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{n0}^{12} M_{nm} + \right. \\ &\quad \left. + \left((1 + \hat{S})^{-1} \right)_{n0}^{22} P_{mn} \right\} \xi_m, \end{aligned} \quad (65)$$

так что с учетом определений ξ_n и η_n из (60) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_0}{\partial \delta_2} p_2 \delta_2 + \frac{\partial \eta_0}{\partial \delta_2} p_3 \delta_3 &= \\ &= -p_2 \sum_{nm} \{ \xi_n M_{nm} + \eta_n P_{mn} \} \xi_m. \end{aligned} \quad (66)$$

С другой стороны, умножив (27) на ξ_n и просуммировав по всем n , получим

$$J_2 = \xi_0 - \sum_{nm} (\xi_n M_{nm} + \eta_n P_{mn}) \xi_m. \quad (67)$$

Подстановка (66) и (67) в соотношение (59) превращает его в тождество. Аналогичным образом устанавливается справедливость для данной модели второго равенства (57).

Как отмечалось во Введении, знание величин ψ_i позволяет более детально изучить зависимость эффективной проводимости σ_e от ее аргументов. Кроме того, производные $\partial \sigma_e / \partial \sigma_i = \psi_i$ возникают, например, при рассмотрении задач о магнитосопротивлении в слабом магнитном поле и о низкочастотной диэлектрической проницаемости металлоэлектриков, а также при вычислении структурных флуктуаций напряженности электрического поля и плотности тока. При определенном соотношении между параметрами функции ψ_i появляются и в задаче о термоэдс (см. разд. 7).

6. КОЭФФИЦИЕНТ ХОЛЛА

Эффективный коэффициент Холла R_e в слабом магнитном поле \mathbf{H} выражается через недиагональную (холловскую) составляющую σ_{ae} тензора $\hat{\sigma}_e$ следующим образом:

$$R_e = \frac{1}{H} \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_e^2}.$$

Согласно [14], для величины σ_{ae} в линейном по \mathbf{H} приближении имеет место общее выражение

$$\sigma_{ae} = \frac{\langle \sigma_a [\mathbf{E}^{(x)} \times \mathbf{E}^{(y)}]_z \rangle}{\langle E_x^{(x)} \rangle \langle E_y^{(y)} \rangle}, \quad (68)$$

справедливое для произвольных неоднородных сред — как двумерных, так и трехмерных. В (68) $\langle \dots \rangle$ — среднее по объему (площади в двумерном случае) образца V , $\mathbf{E}^{(\nu)} = \mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r})$ — напряженность электрического поля в среде в отсутствие магнитного поля, где индекс ν означает, что среднее значение $\langle \mathbf{E}^{(\nu)} \rangle$ направлено вдоль оси ν ; через $[\dots]_z$ обозначена z -составляющая векторного произведения.

Для N -компонентной среды выражение (68) принимает вид

$$\sigma_{ae} = \sum_{i=1}^N \sigma_{ai} \varphi_i, \quad (69)$$

$$\varphi_i = \frac{\langle E_x^{(x)} E_y^{(y)} - E_y^{(x)} E_x^{(y)} \rangle^{(i)}}{\langle E_x^{(x)} \rangle \langle E_y^{(y)} \rangle}, \quad (70)$$

где $\langle \dots \rangle^{(i)}$ — то же, что и в (51). Как показано в [14], для величин $\mathbf{E}^{(\mu)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r})$ справедливо тождество

$$\langle \mathbf{E}^{(\mu)} \times \mathbf{E}^{(\nu)} \rangle = \langle \mathbf{E}^{(\mu)} \rangle \times \langle \mathbf{E}^{(\nu)} \rangle,$$

из которого в случае N -компонентной системы для функций φ_i следует «правило сумм»

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i = 1. \quad (71)$$

Для трехкомпонентной среды, исключая φ_1 с помощью (71), из (69) находим

$$\sigma_{ae} = \sigma_{a1} + (\sigma_{a2} - \sigma_{a1})\varphi_2 + (\sigma_{a3} - \sigma_{a1})\varphi_3. \quad (72)$$

В двумерном случае имеется еще одно тождество — для плотностей тока $\mathbf{j}^{(\mu)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}^{(\nu)}(\mathbf{r})$ [14]:

$$\langle [\mathbf{j}^{(\mu)} \times \mathbf{j}^{(\nu)}]_z \rangle = \left[\langle \mathbf{j}^{(\mu)} \rangle \times \langle \mathbf{j}^{(\nu)} \rangle \right]_z,$$

откуда следует соотношение, связывающее величины φ_i с эффективной проводимостью σ_e :

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \varphi_i = \sigma_e^2. \quad (73)$$

Для трехкомпонентной системы из (73) после исключению φ_1 с помощью (71) получаем

$$1 - (1 - h_2^2)\varphi_2 - (1 - h_3^2)\varphi_3 = f^2. \quad (74)$$

Равенство (74) позволяет в двумерном случае ограничиться вычислением только одной из функций φ_i , например, φ_2 .

Определяя из (1), (2) и (14), (15) напряженности $\mathbf{E}^{(x)}$, $\mathbf{E}^{(y)}$ и вычисляя входящие в определения φ_2 и φ_3 интегралы, получим для φ_i выражения вида (54) с заменой J_2 и J_3 на I_2 и I_3 , где

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \bar{\xi}_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n^2, \\ I_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \bar{\eta}_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta_n^2. \end{aligned} \quad (75)$$

В (75) учтены равенства (41). Заметим, что подстановка выражений для φ_2 и φ_3 в (74) приводит к равенству

$$I_2 p_2 \delta_2 + I_3 p_3 \delta_3 = \xi_0 p_2 \delta_2 + \eta_0 p_3 \delta_3, \quad (76)$$

которое может быть использовано для контроля правильности вычислений при численном решении системы уравнений (27), (28).

Покажем, что величины I_2 и I_3 из (75) удовлетворяют соотношению (76). Умножим (27) на $\bar{\xi}_n$, первое уравнение (39) — на ξ_n , сложим и просуммируем по всем n . В результате получим

$$I_2 = \xi_0 + \frac{1}{2} \sum_{nm} [(-1)^m - (-1)^n] P_{nm} \xi_n \eta_m. \quad (77)$$

Аналогичным образом найдем

$$I_3 = \eta_0 - \frac{1}{2} \sum_{nm} [(-1)^m - (-1)^n] Q_{mn} \xi_n \eta_m. \quad (78)$$

Подстановка (77) и (78) в (76) обращает последнее в тождество в силу равенства (30).

7. ТЕРМОЭДС

Согласно [15], эффективный коэффициент термоэдс α_e в случае слабой термоэлектрической связи ($T\sigma\alpha^2/\kappa \ll 1$, где κ — теплопроводность) дается выражением

$$\alpha_e = \frac{\langle \alpha \mathbf{j} \mathbf{G} \rangle}{\langle \mathbf{j} \rangle \cdot \langle \mathbf{G} \rangle}, \quad (79)$$

справедливым для произвольных изотропных сред. В (79) $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}$ — плотность электрического тока, $\mathbf{G} = -\nabla T$ — «напряженность» температурного поля, T — температура. Для N -компонентной системы из (79) следует

$$\alpha_e = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Psi_i, \quad (80)$$

где

$$\Psi_i = \frac{\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{G} \rangle^{(i)}}{\langle \mathbf{j} \rangle \cdot \langle \mathbf{G} \rangle} = \frac{\sigma_i \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{G} \rangle^{(i)}}{\sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \langle \mathbf{G} \rangle}. \quad (81)$$

Здесь $\langle \dots \rangle^{(i)}$ — то же, что и в (51), (70).

Для величин \mathbf{j} и \mathbf{G} справедливо тождество $\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{G} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle \cdot \langle \mathbf{G} \rangle$, откуда для функций Ψ_i следует «правило сумм»

$$\sum_{i=1}^N \Psi_i = 1. \quad (82)$$

Для плотности потока тепла $\mathbf{q} = \kappa(\mathbf{r})\mathbf{G}$, удовлетворяющей уравнению $\text{div } \mathbf{q} = 0$, и для напряженности

\mathbf{E} также имеет место тождество $\langle \mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{q} \rangle \cdot \langle \mathbf{E} \rangle$, причем $\langle \mathbf{q} \rangle = \kappa_e \langle \mathbf{G} \rangle$, где κ_e — эффективная теплопроводность. Из этого тождества следует цепочка равенств

$$\begin{aligned} \kappa_e \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \langle \mathbf{G} \rangle &= \langle \mathbf{q} \cdot \mathbf{E} \rangle = \sum_{i=1}^N \kappa_i \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{G} \rangle^{(i)} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\kappa_i}{\sigma_i} \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{G} \rangle^{(i)}, \end{aligned}$$

откуда получаем еще одно соотношение,

$$\sum_{i=1}^N \frac{\kappa_i}{\sigma_i} \Psi_i = \frac{\kappa_e}{\sigma_e}, \quad (83)$$

связывающее величины Ψ_i с эффективными проводимостью и теплопроводностью среды.

Для трехкомпонентной системы из (80) после исключения Ψ_1 с помощью (82) находим

$$\alpha_e = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \Psi_2 + (\alpha_3 - \alpha_1) \Psi_3. \quad (84)$$

Из (83) после той же процедуры получаем равенство

$$\left(\frac{\kappa_1}{\sigma_1} - \frac{\kappa_2}{\sigma_2} \right) \Psi_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\sigma_1} - \frac{\kappa_3}{\sigma_3} \right) \Psi_3 = \frac{\kappa_1}{\sigma_1} - \frac{\kappa_e}{\sigma_e}, \quad (85)$$

которое позволяет исключить из (84) Ψ_3 или Ψ_2 . Отметим, что для двухкомпонентной среды (при $\Psi_3 = 0$) из (84), (85) для α_e следует выражение, полученное в [10].

Задачи о теплопроводности и электропроводности в отсутствие термоэлектрических эффектов переходят друг в друга при перестановке $\kappa \leftrightarrow \sigma$. Поэтому результаты разд. 2–4 переносятся на задачу о теплопроводности заменами $\sigma_i \rightarrow \kappa_i$, $\sigma_e \rightarrow \kappa_e$; величины, относящиеся к этому случаю, будем отмечать двойной чертой.

Вычисляя билинейные характеристики $\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{G} \rangle^{(i)}$ (при $i = 2, 3$) с использованием потенциалов (1), (2) и соответствующих «температурных потенциалов», найдем

$$\Psi_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_e} \frac{4}{(1+h_{\sigma i})(1+h_{\kappa i})} \frac{p_i \bar{\bar{J}}_i}{\Delta_\sigma \Delta_\kappa}, \quad i = 2, 3, \quad (86)$$

где

$$\bar{\bar{J}}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \bar{\bar{\xi}}_n, \quad \bar{\bar{J}}_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \bar{\bar{\eta}}_n. \quad (87)$$

В (86) $h_{\sigma i} = \sigma_i / \sigma_1$, $h_{\kappa i} = \kappa_i / \kappa_1$, Δ_σ — то же, что и в (56), а выражение для Δ_κ следует из Δ_σ при заменах $\sigma_i \rightarrow \kappa_i$. Заметим, что при выполнении закона Видемана—Франца

$$\frac{\kappa_1}{\sigma_1} = \frac{\kappa_2}{\sigma_2} = \frac{\kappa_3}{\sigma_3}$$

имеем

$$h_{\kappa i} = h_{\sigma i}, \quad \Delta_\kappa = \Delta_\sigma, \quad \bar{\bar{J}}_i = J_i.$$

В этом случае для Ψ_i из (86), (87) получаем

$$\Psi_i = (\sigma_i / \sigma_e) \psi_i$$

с ψ_i из (54)–(56).

Подстановка в соотношение (85) величин Ψ_2 и Ψ_3 из (86), $\sigma_e = \sigma_1 f$ с f из (46) и аналогичного выражения для κ_e приводит к равенству

$$\begin{aligned} (\delta_{\kappa 2} - \delta_{\sigma 2}) p_2 \bar{\bar{J}}_2 + (\delta_{\kappa 3} - \delta_{\sigma 3}) p_3 \bar{\bar{J}}_3 = \\ = p_2 \left(\bar{\bar{\xi}}_0 \delta_{\kappa 2} - \xi_0 \delta_{\sigma 2} \right) + p_3 \left(\bar{\bar{\eta}}_0 \delta_{\kappa 3} - \eta_0 \delta_{\sigma 3} \right). \quad (88) \end{aligned}$$

Здесь

$$\delta_{\sigma i} = \frac{1 - h_{\sigma i}}{1 + h_{\sigma i}}, \quad \delta_{\kappa i} = \frac{1 - h_{\kappa i}}{1 + h_{\kappa i}}.$$

Умножим уравнение (27) на $\bar{\bar{\xi}}_n \delta_{\kappa 2}$, соответствующее уравнение для $\bar{\bar{\xi}}_n$ — на $\xi_n \delta_{\sigma 2}$, вычтем друг из друга и просуммируем по всем n . В результате получим

$$\begin{aligned} (\delta_{\kappa 2} - \delta_{\sigma 2}) \bar{\bar{J}}_2 = \\ = - \sum_{nm} \left(P_{nm} \delta_{\kappa 2} \bar{\bar{\xi}}_n \eta_m - \bar{\bar{P}}_{nm} \delta_{\sigma 2} \xi_n \bar{\bar{\eta}}_m \right) + \\ + \bar{\bar{\xi}}_0 \delta_{\kappa 2} - \xi_0 \delta_{\sigma 2}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом найдем

$$\begin{aligned} (\delta_{\kappa 3} - \delta_{\sigma 3}) \bar{\bar{J}}_3 = \sum_{nm} \left(\bar{\bar{Q}}_{mn} \delta_{\sigma 3} \bar{\bar{\xi}}_n \eta_m - Q_{mn} \delta_{\kappa 3} \xi_n \bar{\bar{\eta}}_m \right) + \\ + \bar{\bar{\eta}}_0 \delta_{\kappa 3} - \eta_0 \delta_{\sigma 3}. \end{aligned}$$

Подстановка полученных выражений для $\bar{\bar{J}}_2$ и $\bar{\bar{J}}_3$ в равенство (88) превращает его в тождество. Таким образом, соотношение (85) удовлетворяется найденным в работе решением задачи о проводимости. При численном анализе системы уравнений (27), (28) равенство (85) также может быть использовано для контроля правильности вычислений.

8. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

В заключение рассмотрим четыре частных случая, когда некоторые локальные характеристики модели имеют конкретные значения или они связаны какими-то соотношениями.

1. В пределе $\rho \rightarrow 0$ модель становится двухкомпонентной. При этом $P_{nm} = Q_{nm} = N_{nm} = 0$, так что $\eta_n = \delta_{n0}$, $D_{2n} = 0$ и выражения (1), (3), (27), (46)

и др. переходят в соответствующие формулы работы [8]. Отличие в виде матричных элементов M_{nm} связано с различным определением величин ξ_n .

2. При $\delta_3 \rightarrow 0$ модель также становится двухкомпонентной, однако включения второго типа формально сохраняются ($\rho \neq 0$), хотя их свойства не отличаются от свойств первой компоненты ($\sigma_3 = \sigma_1$). В этом случае имеем $P_{nm} = N_{nm} = 0$, так что уравнение (27) переходит в соответствующее равенство из [8], а из (28) находим

$$\eta_n = \delta_{n0} - \sum_{m=0}^{\infty} Q_{nm} \xi_m.$$

Подстановка этого выражения в (32) (при $h_3 = 1$) с учетом явного вида Q_{nm} из (29) и определения (25) дает

$$C_{2n+1} = \beta \delta_{n0} - \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m} \frac{(2n+2m)!}{(2n+1)!} d_{n+m+1}. \quad (89)$$

Как следует из (26), коэффициенты $D_{2n} = 0$ при $\delta_3 = 0$. Нетрудно убедиться, что разложение комплексного потенциала (3) (при $D_{2n} = 0$) в окрестности точки $z = z_0$ (с учетом равенства (9)) и выражение (2) с C_{2n+1} из (89) совпадают. Эффективная проводимость (45), (46), как и в предыдущем предельном случае, совпадает с соответствующей формулой из [8] с $\alpha = 1/\xi_0$.

3. В более сложном случае $\rho \rightarrow R$, $\sigma_3 \rightarrow \sigma_2$ рассматриваемая трехкомпонентная модель переходит в двухкомпонентную, отличающуюся от исследованной в [8] только периодом решетки ($2\tilde{a} = \sqrt{2}a$ вместо $2a$) — см. рис. 1 с координатными осями, повернутыми на 45° . Покажем, что в такой системе координат найденное в настоящей работе решение в пределе $\rho \rightarrow R$, $\delta_3 \rightarrow \delta_2$ совпадает с полученным в [8].

При $\rho = R$ и $\delta_3 = \delta_2$ имеем $N_{nm} = M_{nm}$ и $Q_{nm} = P_{nm}$. В этом случае, вычитая (28) из (27), для «переменной» $\xi_n - \eta_n$ получим однородную систему уравнений с отличным от нуля детерминантом. Как известно, такая система имеет только нулевое решение, так что $\eta_n = \xi_n$, (при этом $D_{2n} = B_{2n}$), где ξ_n удовлетворяет уравнению

$$\xi_n + \sum_{m=0}^{\infty} (M_{nm} + P_{nm}) \xi_m = \delta_{n0}. \quad (90)$$

Направим $\langle \mathbf{E} \rangle$ по диагонали квадранта; соответствующий

комплексный потенциал $\tilde{\Phi}_1(z)$ дается суперпозицией выражений (3) и (13) при $\bar{\beta} = \beta$:

$$\tilde{\Phi}_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_1(z) - \bar{\Phi}_1(z)] = \beta z e^{i\pi/4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-i(-1)^n}{\sqrt{2}} B_{2n} \left\{ \zeta^{(2n)}(z) + \zeta^{(2n)}(z-z_0) \right\}. \quad (91)$$

Здесь учтены равенства $D_{2n} = B_{2n}$ и $\bar{B}_{2n} = (-1)^n \times B_{2n}$ — см. (42); несущественные для дальнейшего константы φ_0 и $\bar{\varphi}_0$ опущены. Далее, используя формулу сложения и соотношение однородности для дзета-функции Вейерштрасса [19, 20], а также очевидные равенства

$$\begin{aligned} \wp(z_0) = 0, \quad \wp'(z_0) = 0, \quad \zeta(iz) = -i\zeta(z), \\ \wp(iz) = -\wp(z), \quad \wp'(iz) = i\wp'(z), \end{aligned}$$

справедливые в рассматриваемом лемнистическом случае, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \zeta(z) + \zeta(z-z_0) = -\zeta(z_0) + e^{i\pi/4} \tilde{\zeta}(\tilde{z}), \\ \tilde{z} = z e^{i\pi/4}. \end{aligned} \quad (92)$$

Здесь $\zeta(z)$ и $\zeta(z-z_0)$ — дзета-функции с полупериодами a и ia , а $\tilde{\zeta}(\tilde{z})$ — с полупериодами $\tilde{a} = a/\sqrt{2}$ и $i\tilde{a} = ia/\sqrt{2}$. Перейдя в (91) к переменной \tilde{z} , с учетом (92) получим

$$\tilde{\Phi}_1(\tilde{z}) = \beta \tilde{z} + e^{i\pi/4} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{1-i(-1)^n}{\sqrt{2}} B_{2n} \tilde{\zeta}^{(2n)}(\tilde{z}). \quad (93)$$

В (93) также опущена несущественная константа.

Заметим, что разложение левой и правой частей (92) по степеням z и \tilde{z} с помощью равенств (6) и (17) приводит к соотношению

$$c_{2n} + d_{2n} = (-1)^n \tilde{c}_{2n}, \quad (94)$$

где \tilde{c}_{2n} отличается от c_{2n} заменой $a \rightarrow \tilde{a} = a/\sqrt{2}$. (В справедливости равенства (94) при $n = 1, 2, 3, \dots$ можно убедиться непосредственно, используя выражения для c_{2n} и d_{2n} из (7) и (11).) С учетом (94) уравнение (90) принимает вид

$$\xi_n + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{(n+m+1)/2} \tilde{M}_{nm} \xi_m = \delta_{n0}, \quad (95)$$

где матричный элемент \tilde{M}_{nm} отличается от M_{nm} из (29) только заменой $c_{n+m+1} \rightarrow \tilde{c}_{n+m+1}$, т. е. \tilde{M}_{nm} относится к квадратной решетке с полупериодом $\tilde{a} = a/\sqrt{2}$.

Нетрудно видеть, что введение «переменных» $\tilde{\xi}_n$ согласно $\xi_{4k} = \tilde{\xi}_{4k}$, $\xi_{4k+1} = -\tilde{\xi}_{4k+1}$, $\xi_{4k+2} = -\tilde{\xi}_{4k+2}$, $\xi_{4k+3} = \tilde{\xi}_{4k+3}$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, приводит систему уравнений (95) к виду

$$\tilde{\xi}_n + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{M}_{nm} \tilde{\xi}_m = \delta_{n0}. \quad (96)$$

При этом для потенциала (93) получаем окончательное выражение

$$\tilde{\Phi}_1(\tilde{z}) = \beta \tilde{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_{2n} \tilde{\zeta}^{(2n)}(\tilde{z}). \quad (97)$$

Аналогичным образом для включения с центром в точке $z = 0$ при $\rho = R$ и $h_3 = h_2$ находим

$$\tilde{\Phi}_2(\tilde{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_2(z) - \bar{\Phi}_2(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_{2n+1} \tilde{z}^{2n+1}. \quad (98)$$

Точно такой же вид (с соответствующим сдвигом по \tilde{z}) принимает при $\rho = R$, $h_3 = h_2$ и потенциал $\tilde{\Phi}_3(\tilde{z})$. В выражениях (97) и (98) коэффициенты \tilde{B}_{2n} и \tilde{A}_{2n+1} связаны с величинами $\tilde{\xi}_n$ из (96) такими же по форме соотношениями, что и B_{2n} , A_{2n+1} с ξ_n — см. (25) и (31).

Таким образом, при $\rho = R$ и $\sigma_3 = \sigma_2$ комплексный потенциал в системе координат (\tilde{x}, \tilde{y}) , повернутой на 45° относительно (x, y) , принимает тот же вид, что и для двухкомпонентной модели, рассмотренной в [8], но для решетки с полупериодом $\tilde{a} = a/\sqrt{2}$.

Отметим, что соотношение (94) позволяет выразить коэффициент d_{2n} через c_{2n} . Как следует из (5)–(8), $c_{2n} \propto (c_2)^n \propto 1/a^{4n}$. Поэтому $\tilde{c}_{2n}/c_{2n} = (a/\tilde{a})^{4n} = 4^n$, и из (94) получаем

$$d_{2n} = [(-4)^n - 1] c_{2n}. \quad (99)$$

Это равенство дает возможность вычислять величины d_{2n} по известным коэффициентам c_{2n} .

4. В предельном случае $\rho = R$, $\delta_3 = -\delta_2$ (т.е. $h_3 = 1/h_2$ или $\sigma_2\sigma_3 = \sigma_1^2$) имеем $N_{nm} = -M_{nm}$, $P_{nm} = -Q_{nm}$, так что

$$\hat{S}_{nm} = \begin{pmatrix} M_{nm} & -Q_{nm} \\ Q_{nm} & -M_{nm} \end{pmatrix}.$$

Такую же структуру имеют все нечетные степени \hat{S} . Поэтому из (36) следует, что $\eta_{2k+1} = -\xi_{2k+1}$. Все четные степени \hat{S} также имеют одинаковую структуру (отличную от нечетных степеней \hat{S}) такую, что $\eta_{2k} = \xi_{2k}$. Следовательно, при $\rho = R$ и $\delta_3 = -\delta_2$

имеем $\eta_n = (-1)^n \xi_n$. В частности, $\eta_0 = \xi_0$, так что из (46) следует $f = 1$ или $\sigma_e = \sigma_1$. Это же заключение сделано в [17] на основе приближенного выражения для эффективной проводимости (диэлектрической проницаемости).

Заметим, что в общем случае равенство $f = 1$ имеет место при выполнении соотношения

$$\xi_0 R^2 \delta_2 + \eta_0 \rho^2 \delta_3 = 0.$$

Это дает возможность менять некоторые эффективные характеристики (коэффициент Холла, термоэдс и т.п.) такой системы, оставляя неизменной ее проводимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).
2. J. P. Straley, J. Phys. C **9**, 783 (1976).
3. J. V. Keller, J. Math. Phys. **5**, 548 (1964).
4. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
5. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **81**, 665 (1981).
6. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*, Наукова думка, Киев (1986).
7. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **79**, 1561 (1980).
8. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **117**, 978 (2000).
9. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 641 (1970).
10. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **85**, 568 (1983).
11. Б. Я. Балагуров, ФТТ **28**, 2068 (1986).
12. Б. И. Шкловский, ЖЭТФ **72**, 288 (1977).
13. D. J. Bergman and D. Stround, Phys. Rev. B **32**, 6097 (1985).
14. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **93**, 1888 (1987).
15. Б. Я. Балагуров, ФТП **21**, 1978 (1987).
16. Б. Я. Балагуров, ФТТ **30**, 3501 (1988).
17. Ю. П. Емец, ЖЭТФ **114**, 1121 (1998).
18. Lord Rayleigh, Phil. Mag. **34**, 481 (1892).
19. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 3, Наука, Москва (1967).
20. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, Наука, Москва (1979).