ЖЭТФ, 2001, том 119, вып. 2, стр. 396–402

СТРУКТУРА ВИХРЕВОЙ РЕШЕТКИ В АНИЗОТРОПНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Ю. Н. Овчинников[*]

Max-Planck-Institute for Physics Complex Systems
D-01187, Dresden, Germany

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117940, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 сентября 2000 г.

Исследована структура вихревой решетки в анизотропных сверхпроводниках при произвольной температуре в магнитных полях, близких к критическому. В общем случае возникает ромбоэдрическая структура с углом при вершине, зависящим от температуры, величины магнитного поля и материальных констант. Важным фактором является малая (2%) разница свободных энергий треугольной и квадратной решеток в сильном поле в приближении Гинзбурга–Ландау. Этот фактор сохраняется и в анизотропном случае.

PACS: 74.60.Ec

1. ВВЕДЕНИЕ

В изотропных сверхпроводниках второго рода переход в сверхпроводящее состояние в магнитном поле происходит как фазовый переход второго рода с образованием вихревой решетки [1]. Из симметрийных соображений ясно, что вихревая решетка может быть квадратной или треугольной. Оказывается, что вблизи температуры перехода T_c треугольная решетка с одним квантом потока в ячейке соответствует минимуму свободной энергии, а квадратная является седловой точкой [2]. Это свойство изотропных сверхпроводников сохраняется и при произвольной температуре за исключением узкой области значений физических параметров сверхпроводника, в которой переход в сверхпроводящее состояние может быть более сложным [3].

В силу численных причин разность свободных энергий для треугольной и квадратной решеток вблизи точки перехода составляет около 2-х процентов от энергии сверхпроводящего перехода [1, 2]. Поэтому представляет интерес исследовать влияние анизотропии на структуру вихревой решетки, даже если она и мала. Очевидно, что в анизотропном сверхпроводнике вихревая решетка будет ромбоэдрической с параметрами, зависящими от температуры и величины магнитного поля.

Ниже будет найдена зависимость параметров вихревой решетки от температуры и материальных параметров сверхпроводника. Мы рассмотрим физически наиболее интересный случай «грязного» сверхпроводника и покажем, что для определения параметров вихревой решетки необходимо учитывать следующие по длине свободного пробега электронов члены в выражении для свободной энергии. В анизотропном сверхпроводнике вклад этих поправочных членов в уравнение для угла между векторами элементарной ячейки может быть не мал.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА В АНИЗОТРОПНОМ СВЕРХПРОВОДНИКЕ

В квазиклассическом приближении система уравнений для функций Грина в анизотропном сверхпроводнике имеет тот же вид, что и в изотропном сверхпроводнике [4–6]:

$$\left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\hat{G} + \hat{\omega}\hat{G} - \hat{G}\hat{\omega} = 0, \quad \hat{G} = \begin{pmatrix} \alpha_p & -i\beta_p \\ i\tilde{\beta}_p & -\alpha_p \end{pmatrix}, \quad \hat{G}^2 = 1, \tag{1}$$

[*]E-mail: ovchin@labs.polycnrs-gre.fr; ovc@itp.ac.ru

где

$$
\begin{gathered}
\hat{\omega} = \omega\tau_z - ie\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\tau_z - i\hat{\Delta} - \\
- in\hat{\sum}_{pp} + \frac{1}{2\tau_s}\int\frac{d\Omega_{p_1}}{4\pi}\tau_z G_{p_1}\tau_z, \qquad (2)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta^* & 0 \end{pmatrix}, \\
\sum_{pp} = -\frac{iv}{2}\int\sigma_{pp_1}\hat{G}_{p_1}d\Omega_{p_1}.
\end{gathered} \qquad (3)
$$

В уравнениях (1)–(3) $\mathbf{v} = \partial\varepsilon_{\mathbf{p}}/\partial\mathbf{p}$ — скорость на поверхности Ферми, величина импульсов $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1$ также зависит от направления. Решение системы уравнений (1) ищем в виде

$$
\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_1 + \hat{G}_2 + \hat{G}_3 + \ldots \qquad (4)
$$

В уравнении (4) функция Грина $\hat{G}_0$ не зависит от углов вектора $\mathbf{p}$, а величины $G_{1,2,3}$ не содержат среднего значения и являются приближениями соответственно первого, второго и третьего порядков по длине свободного пробега электронов. Из формул (1)–(4) находим

$$
\begin{gathered}
\hat{G}_1 = -\tau_{tr}\hat{G}_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{D}\hat{G}_0 \equiv \\
\equiv -\tau_{tr}\hat{G}_0\left\{\left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\hat{G}_0 - ie\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\left(\tau_z\hat{G}_0 - \hat{G}_0\tau_z\right)\right\}, \qquad (5)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\hat{G}_2 = \tau_{tr}\tilde{\tau}_2\hat{G}_0\Big\{\mathbf{v}\cdot\mathbf{D}\left(\hat{G}_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{D}\hat{G}_0\right) - \\
- \langle\mathbf{v}\cdot\mathbf{D}(\hat{G}_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{D}\hat{G}_0)\rangle\Big\}, \\
\hat{G}_3 = -\tau_{tr}\left\{\hat{G}_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{D}\hat{G}_2\right\}_1 - \tilde{\tau}_3\left\{\hat{G}_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{D}\hat{G}_2\right\}_3, \\
\tau_{tr}^{-1} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1}, \quad \tilde{\tau}_2^{-1} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}, \\
\tilde{\tau}_3^{-1} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_3}.
\end{gathered}
$$

Оператор $\mathbf{D}$ в формулах (5) определяется верхней формулой, $\tau, \tau_1, \tau_2, \ldots$ — времена столкновений для нулевой, первой, второй и т. д. гармоник [3]. При изотропном рассеянии все они, кроме нулевой, равны нулю. Символ $\{\ \}_{1,3}$ означает проектирование выражения в скобках соответственно на первую и третью гармоники. Подставляя выражение (5) в уравнение (1), получаем замкнутое уравнение только для функции $\hat{G}_0$. Как обычно, запишем функцию $\hat{G}_0$ в виде

$$
\hat{G}_0 = \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta \\ i\beta^* & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + |\beta|^2 = 1. \qquad (6)
$$

С помощью формулы (6) уравнение для функции Грина $\hat{G}_0$ сводится к одному дифференциальному уравнению для функций α, β и условию нормировки (6):

$$
\begin{gathered}
\alpha\Delta - \beta\omega + \frac{1}{2}\tau_{tr}\Big[\alpha\Big\langle(\mathbf{v}\partial_-)^2\Big\rangle\beta - \beta\left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)^2\alpha\Big] + \\
+ \frac{1}{2}\tau_{tr}^2\tilde{\tau}_2\Big\langle(\mathbf{v}\partial_-)^2\Big[\Big(\alpha(\mathbf{v}\partial_-)^2\beta - \beta\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha\Big) - \\
- \Big\langle\alpha(\mathbf{v}\partial_-)^2\beta - \beta\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha\Big\rangle\Big] + \\
+ \Big[\Big(\mathbf{v}\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2 + (\mathbf{v}\partial_-\beta)(\mathbf{v}\partial_+\beta^*)\Big] \times \\
\times \Big[\Big(2\alpha(\mathbf{v}\partial_-)^2\beta - 2\beta\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha\Big) - \\
- \Big\langle\alpha(\mathbf{v}\partial_-)^2\beta - \beta\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha\Big\rangle\Big] - \\
- 2\Big((\mathbf{v}\partial_-\beta)(\mathbf{v}\partial_+\beta^*) + \Big(\mathbf{v}\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\Big) \times \\
\times \Big(\alpha(\mathbf{v}\partial_-)^2\beta - \beta\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha\Big) - \\
- \Big\langle\Big(\mathbf{v}\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2 + (\mathbf{v}\partial_-\beta)(\mathbf{v}\partial_+\beta^*)\Big\rangle \times \\
\times \Big(\alpha(\mathbf{v}\partial_-)^2\beta - \beta\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha\Big) - \\
- \Big[2\alpha\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha + \beta(\mathbf{v}\partial_+)^2\beta^* + \beta^*(\mathbf{v}\partial_-)^2\beta\Big] \times \\
\times \Big\langle\alpha(\mathbf{v}\partial_-)^2\beta - \beta\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha\Big\rangle + \\
+ \Big(\alpha(\mathbf{v}\partial_-\beta) - \beta\Big(\mathbf{v}\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}\Big)\Big)\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big) \times \\
\times \Big[\Big(\mathbf{v}\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2 + (\mathbf{v}\partial_-\beta)(\mathbf{v}\partial_+\beta^*) - \\
- \Big\langle\Big(\mathbf{v}\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2 + (\mathbf{v}\partial_-\beta)(\mathbf{v}\partial_+\beta^*)\Big\rangle\Big] + \\
+ \Big(\alpha\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)\alpha + \beta(\mathbf{v}\partial_+)\beta^*\Big)(\mathbf{v}\partial_-)\Big[\alpha(\mathbf{v}\partial_-)^2\beta - \\
- \beta\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha - \Big\langle\alpha(\mathbf{v}\partial_-)^2\beta - \beta\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha\Big\rangle\Big] + \\
+ \Big(\alpha(\mathbf{v}\partial_-)\beta - \beta\Big(\mathbf{v}\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}\Big)\Big)\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big) \times \\
\times \Big[\beta^*\Big(\mathbf{v}\partial_-\Big)^2\beta + \alpha\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha - \Big\langle\alpha\Big(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)^2\alpha + \\
+ \beta^*(\mathbf{v}\partial_-)^2\beta\Big\rangle\Big]\Big\rangle = \alpha\beta\Gamma, \qquad (7)
\end{gathered}
$$

где $\Gamma = \tau_s^{-1}$, $\partial_\pm = \partial/\partial\mathbf{r} \pm 2ie\mathbf{A}$.

В уравнение (7) входит среднее значение от произведения двух и четырех скоростей. Введем обозначение

$$
D_{ij} = \tau_{tr}\langle v_i v_j\rangle, \quad \Gamma_{ijkl} = \tau_{tr}^2\tilde{\tau}_2\langle v_i v_j v_k v_l\rangle. \qquad (8)
$$

Наша задача — получить выражение для свободной энергии с помощью уравнения (7). Вблизи температуры перехода эта задача может быть решена при произвольном значении внешнего магнитного поля [3]. При произвольной температуре можно решить ее лишь для полей, близких к критическому. В этом случае функции Грина α, β допускают разложение по степеням параметра порядка Δ. В результате находим

$$
\begin{aligned}
F_s - F_N = \nu \int d^3r \Bigg\{ \frac{|\Delta|^2}{|\lambda|} - \\
- 2\pi\tau \sum_{\omega>0} \Big[\Delta^* \Big(\Gamma + \omega - \frac{1}{2} D_{ij} (\partial^0_-)_i (\partial^0_-)_j - \\
- \frac{1}{2} \Gamma_{ijkl} (\partial^0_-)_i (\partial^0_-)_j (\partial^0_-)_k (\partial^0_-)_l + \\
+ \frac{1}{2} \tilde{\tau}_2 D_{ij} D_{kl} (\partial^0_-)_i (\partial^0_-)_j (\partial^0_-)_k (\partial^0_-)_l \Big)^{-1} \Delta - \\
- \frac{\omega |\Delta|^4}{4(\omega + \Gamma + \hat{\lambda})^4} - \\
- \frac{D_{ij}}{8(\omega + \Gamma + \hat{\lambda})^4} \frac{\partial |\Delta|^2}{\partial r_i} \frac{\partial |\Delta|^2}{\partial r_j} - \\
- \frac{ie (A_1)_i D_{ij}}{(\omega + \Gamma + \hat{\lambda})^2} (\Delta^* (\partial^0_-)_j \Delta - \Delta (\partial^0_+) j \Delta^*) + \\
+ \frac{\Gamma_{ijkl}}{(\omega + \Gamma + \hat{\lambda})^4} \Big(\frac{1}{8} \frac{\partial^2 |\Delta|^2}{\partial r_i \partial r_j} \frac{\partial^2 |\Delta|^2}{\partial r_k \partial r_l} - \\
- \frac{1}{2} \Big((\partial^0)_i \Delta \Big) \Big((\partial^0_-)_j \Delta \Big) \Big((\partial^0_+)_k \Delta^* \Big) \Big((\partial^0_+)_l \Delta^* \Big) + \\
+ \frac{1}{8} \frac{\partial^2 |\Delta|^2}{\partial r_i \partial r_j} \Big((\partial^0_-)_k \Delta \Big) \Big((\partial^0_+)_l \Delta^* \Big) - \\
- \frac{|\Delta|^2}{4} \Big((\partial^0_-)_i (\partial^0_-)_j \Delta \Big) \Big((\partial^0_+)_k (\partial^0_+)_l \Delta^* \Big) \Big) \Big] \Bigg\} + \\
+ \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\operatorname{rot} \mathbf{A} - H_0)^2. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

В уравнении (9) $|\lambda|$ — эффективная константа взаимодействия. Векторный потенциал A выбран в виде

$$
A = A_0 + A_1 + \ldots, \quad A_0 = (0, Bx, 0), \qquad (10)
$$

$A_{1,2,\ldots}$ — ограниченные функции. Оператор $\partial^0_- = \partial/\partial \mathbf{r} - 2ie\mathbf{A}_0$, величина $\hat{\lambda}$ есть наименьшее собственное значение оператора $\hat{L}$, равного

$$
\begin{aligned}
\hat{L} = -\frac{1}{2} D_{ij} (\partial^0_-)_i (\partial^0_-)_j - \\
-\frac{1}{2} (\Gamma_{ijkl} - \tilde{\tau}_2 D_{ij} D_{kl}) \left(\partial^0_-\right)_i \left(\partial^0_-\right)_j \left(\partial^0_-\right)_k \left(\partial^0_-\right)_l . \qquad (11)
\end{aligned}
$$

3. СТРУКТУРА ВИХРЕВОЙ РЕШЕТКИ ВБЛИЗИ H_{c2}

В дальнейшем удобно перейти к главным осям тензора D_{ij}. Обозначим их через a, b, c (пока произвольно). Будем считать, что магнитное поле направлено вдоль одной из главных осей и назовем ее осью c. Запишем параметр порядка Δ в виде ряда по степеням $H_{c2} - B$:

$$
\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots \qquad (12)
$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ ортогональны к Δ_0.

В главном приближении по длине свободного пробега электронов находим

$$
\begin{aligned}
\Delta_0 = \sum_N C_N \times \\
\times \exp \left\{ 2ieBNx_1 y - eB \sqrt{\frac{D_b}{D_a}} (x - Nx_1)^2 \right\}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Предположим, что модуль параметра порядка образует периодическую решетку с векторами элементарной ячейки $\mathbf{a}_{1,2}$:

$$
|\Delta(r - n\mathbf{a}_1 - m\mathbf{a}_2)|^2 = |\Delta(r)|^2, \qquad (14)
$$

где n, m — целые числа.

Выберем векторы $\mathbf{a}_{1,2}$ в виде

$$
\mathbf{a}_1 = a(\sin\varphi, \cos\varphi), \quad \mathbf{a}_2 = a(-\sin\varphi, \cos\varphi). \qquad (15)
$$

Предположим, что в ячейке один квант потока. Тогда из условия периодичности (14) находим

$$
\begin{aligned}
eBa^2 \sin(2\varphi) = \pi, \quad a \sin\varphi = x_1, \\
C_N = C_0 \exp\left(\frac{i\pi}{2} N^2 \right).
\end{aligned} \qquad (16)
$$

Векторы $\mathbf{K}_{1,2}$ обратной решетки выберем в виде

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 = \frac{2\pi}{a \sin 2\varphi} (\cos\varphi, \sin\varphi), \\
\mathbf{K}_2 = \frac{2\pi}{a \sin 2\varphi} (\cos\varphi; -\sin\varphi).
\end{aligned} \qquad (17)
$$

В главном приближении по длине свободного пробега и по параметру $(H_{c2} - B)$ плотность тока j определяется выражением

$$
j = -ie\nu \hat{D} 2\pi T \sum_{\omega>0} \frac{\Delta^* \partial^0_- \Delta - \Delta \partial^0_+ \Delta^*}{(\omega + \Gamma + \hat{\lambda})^2}. \qquad (18)
$$

С помощью формулы (13) находим важное соотношение:

$$
\operatorname{rot}(0, 0, |\Delta|^2) = \frac{i}{\sqrt{D_a D_b}} \left\{ \hat{D} (\Delta^* \partial_- - \Delta \partial_+ \Delta^*) \right\}. \qquad (19)
$$

В рассматриваемой геометрии магнитное поле направлено вдоль оси z. Формула (19) позволяет найти явное выражение для поправки H_1 к магнитному полю:

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{A}_1 = H_1(0,0,1), \tag{20}$$

$$H_1 = -4\pi e\nu\left[\frac{1}{2\pi T}\psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(T)+\hat{\lambda}}{2\pi T}\right)\right]\times \\ \times\sqrt{D_aD_b}\left(|\Delta|^2-\left\langle|\Delta|^2\right\rangle\right),$$

где $\psi(x)$ — пси-функция Эйлера.

С учетом выражения (20) приведем формулу (9) к виду

$$\frac{F_s-F_N}{V} = \nu\left\{\left\langle|\Delta|^2\right\rangle\left[-\ln\left(\frac{T_c^0}{T}\right)+\right.\right. \\ \left. +\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(T)+\hat{\lambda}}{2\pi T}\right)-\psi(1/2)\right]- \\ -\beta_A\frac{\langle|\Delta|^2\rangle^2}{8(2\pi T)^2}\left[\psi''\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(T)+\hat{\lambda}}{2\pi T}\right)+\right. \\ \left.+\frac{\Gamma(T)+\hat{\lambda}}{6\pi T}\psi'''\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(T)+\hat{\lambda}}{2\pi T}\right)\right]- \\ \left.-(\beta_A-1)D_aD_b\langle|\Delta|^2\rangle^2\frac{e^2\nu}{2\pi T^2}\left(\psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(T)+\hat{\lambda}}{2\pi T}\right)\right)^2\right\}- \\ -\frac{H_0B}{4\pi}+\frac{B^2+H_0^2}{8\pi}+ \\ +\frac{\nu}{48(2\pi T)^3}\psi'''\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(T)+\hat{\lambda}}{2\pi T}\right)D_{ij}\left\langle\frac{\partial|\Delta|^2}{\partial r_i}\,\frac{\partial|\Delta|^2}{dr_j}\right\rangle- \\ -\frac{\nu}{6(2\pi T)^3}\psi'''\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(T)+\hat{\lambda}}{2\pi T}\right)\times \\ \times\Gamma_{ijkl}\left\langle\frac{1}{8}\,\frac{\partial^2|\Delta|^2}{\partial r_i\,\partial r_j}\,\frac{\partial^2|\Delta|^2}{\partial r_k\,\partial r_l}-\right. \\ -\frac{1}{2}\left(\left(\partial_-^0\right)_i\Delta\right)\left(\left(\partial_-^0\right)_j\Delta\right)\left(\left(\partial_+^0\right)_k\Delta^*\right)\left(\left(\partial_+^0\right)_l\Delta^*\right)+ \\ +\frac{1}{8}\,\frac{\partial^2|\Delta|^2}{\partial r_i\,\partial r_j}\left(\left(\partial_-^0\right)_k\Delta\right)\left(\left(\partial_+^0\right)_l\Delta^*\right)- \\ \left.-\frac{|\Delta|^2}{4}\left(\left(\partial_-^0\right)_i\left(\partial_-^0\right)_j\Delta\right)\left(\left(\partial_+^0\right)_k\left(\partial_+^0\right)_l\Delta^*\right)\right\rangle. \tag{21}$$

В формуле (21) величина V — объем сверхпроводника, T_c^0 — температура сверхпроводящего перехода в сверхпроводнике без парамагнитных примесей, величина $\beta_A = \langle|\Delta|^4\rangle/\langle|\Delta|^2\rangle^2$ — структурная константа Абрикосова.

Для вычисления средних величин в формуле (21) воспользуемся соотношениями

$$\begin{gathered}(\partial_-^0)_y\Delta = i\sqrt{\frac{D_a}{D_b}}(\partial_-^0)_x\Delta, \\ |\Delta|^2 = \sum_{N,M}C_{NM}\exp\{i(N\mathbf{K}_1+M\mathbf{K}_2)\cdot\mathbf{r}\}, \\ \left(\left(\partial_-^0\right)_x\Delta\right)\left(\partial_+^0\right)_x\Delta^* = \\ = \sum_{N,M}\tilde{C}_{NM}\exp\{i(N\mathbf{K}_1+M\mathbf{K}_2)\cdot\mathbf{r}\}, \\ \left(\left(\partial_-^0\right)_x^2\Delta\right)\left(\partial_+^0\right)_x^2\Delta^* = \\ = \sum_{N,M}A_{NM}\exp\{i(N\mathbf{K}_1+M\mathbf{K}_2)\cdot\mathbf{r}\}.\end{gathered} \tag{22}$$

Коэффициенты $C_{NM}, \tilde{C}_{NM}, A_{NM}$ могут быть найдены с использованием (16), а также явного выражения (13) для параметра порядка Δ.

В результате находим

$$\begin{gathered}C_{NM} = \langle|\Delta_0|^2\rangle(-)^{M(M-N)}\exp(-\pi Q_{NM}), \\ \tilde{C}_{NM} = \langle|\Delta_0|^2\rangle(-)^{M(M-N)}eB\sqrt{\frac{D_b}{D_a}}\times \\ \times[1-2\pi Q_{NM}]\exp(-\pi Q_{NM}), \\ A_{NM} = \langle|\Delta_0|^2\rangle(-)^{M(M-N)}e^2B^2\frac{D_b}{D_a}\times \\ \times\left\{3+8\pi^2\left(\frac{M^2-N^2}{4}\right)^2+\right. \\ +4\pi^2\left(\frac{D_b}{D_a}\left(\frac{M-N}{2}\right)^4\mathrm{tg}^2\,\varphi+\right. \\ \left.+\frac{D_a}{D_b}\left(\frac{M+N}{2}\right)^4\right)\mathrm{ctg}^2\,\varphi- \\ -4\pi\sqrt{\frac{D_a}{D_b}}\left(\frac{M+N}{2}\right)^2\mathrm{ctg}\,\varphi- \\ \left.-12\pi\sqrt{\frac{D_b}{D_a}}\left(\frac{M-N}{2}\right)^2\mathrm{tg}\,\varphi\right\},\end{gathered} \tag{23}$$

где

$$Q_{NM} = \sqrt{\frac{D_b}{D_a}}\left(\frac{M-N}{2}\right)^2\mathrm{tg}\,\varphi+ \\ +\sqrt{\frac{D_a}{D_b}}\left(\frac{M+N}{2}\right)^2\mathrm{ctg}\,\varphi. \tag{24}$$

С учетом формул (22), (23) приведем выражение

(21) для плотности свободной энергии к окончательному виду:

$$\frac{F_S-F_N}{V}=\frac{(B-H_0)^2}{8\pi}+$$
$$+\nu\left\{-\left\langle|\Delta|^2\right\rangle\psi'\Big(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma+\hat\lambda}{2\pi T}\Big)\frac{\hat\lambda_{cr}-\hat\lambda}{2\pi T}-\right.$$
$$-\beta_A\,\frac{\langle|\Delta|^2\rangle^2}{8\,(2\pi T)^2}\Big[\psi''\Big(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(T)+\hat\lambda}{2\pi T}\Big)+$$
$$+\frac{\Gamma(T)+\hat\lambda}{6\pi T}\psi'''\Big(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(T)+\hat\lambda}{2\pi T}\Big)\Big]-$$
$$-(\beta_A-1)D_aD_b\langle|\Delta|^2\rangle^2\frac{e^2\nu}{2\pi T^2}\Big(\psi'\Big(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(T)+\hat\lambda}{2\pi T}\Big)\Big)^2\Big\}+$$
$$+\frac{\nu\hat\lambda\langle|\Delta|^2\rangle^2}{48\pi^2T^3}\;\psi'''\Big(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma+\hat\lambda}{2\pi T}\Big)S-$$
$$-\frac{\nu\langle|\Delta|^2\rangle^2\;\hat\lambda^2}{6(2\pi T)^3}\psi'''\Big(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma+\hat\lambda}{2\pi T}\Big)\Big\{\Big(\frac{\Gamma_{aaaa}}{D_a^2}-\frac{\Gamma_{bbbb}}{D_b^2}\Big)S_1-$$
$$-\Big(\frac{\Gamma_{aaaa}}{D_a^2}+\frac{\Gamma_{bbbb}}{D_b^2}-6\frac{\Gamma_{aabb}}{D_aD_b}\Big)S_2+$$
$$+\Big(\frac{\Gamma_{aaaa}}{D_a^2}+\frac{\Gamma_{bbbb}}{D_b^2}-2\frac{\Gamma_{aabb}}{D_aD_b}\Big)S_3\Big\},\qquad(25)$$

где

$$S=\sum_{N,M}Q_{NM}\exp(-2\pi Q_{NM}),$$
$$\beta_A=\sum_{N,M}\exp(-2\pi Q_{NM}),$$
$$S_1=\sum_{N,M}\Big\{5\pi^2\Big(\frac{D_a}{D_b}\Big(\frac{N+M}{2}\Big)^4\operatorname{ctg}^2\varphi-$$
$$-\frac{D_b}{D_a}\Big(\frac{M-N}{2}\Big)^4\operatorname{tg}^2\varphi\Big)-$$
$$-\frac{3\pi}{2}\Big(\sqrt{\frac{D_a}{D_b}}\Big(\frac{N+M}{2}\Big)^2\operatorname{ctg}\varphi-\qquad(26)$$
$$-\sqrt{\frac{D_b}{D_a}}\Big(\frac{M-N}{2}\Big)^2\operatorname{tg}\varphi\Big)\Big\}\exp(-2\pi Q_{NM}),$$
$$S_2=8\pi^2\sum_{N,M}\Big(\frac{M^2-N^2}{4}\Big)^2\exp(-2\pi Q_{NM}),$$
$$S_3=2\pi^2\sum_{N,M}Q_{NM}^2\exp(-2\pi Q_{NM}),$$
$$\hat\lambda_{cr}-\hat\lambda=e(H_{c2}-B)\sqrt{D_aD_b},$$
$$\hat\lambda=eB\sqrt{D_aD_b}.$$

В формуле (26) опускаем члены, дающие малую перенормировку коэффициентов при структурных суммах β_A и S. Все структурные константы, $\beta_A, S, S_{1,2,3}$, входящие в выражение (25) для свободной энергии и определяющие структуру вихревой решетки, зависят лишь от одного параметра z, равного

$$z=\sqrt{\frac{D_b}{D_a}}\operatorname{tg}\varphi.\qquad(27)$$

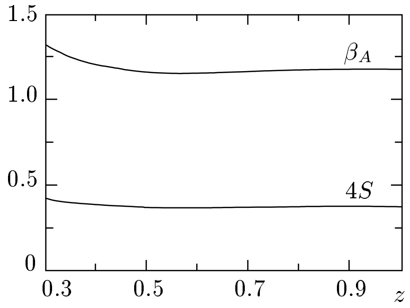

Рис. 1. Зависимость функций β_A, $4S$ от параметра $z=\sqrt{D_b/D_a}\operatorname{tg}\varphi$

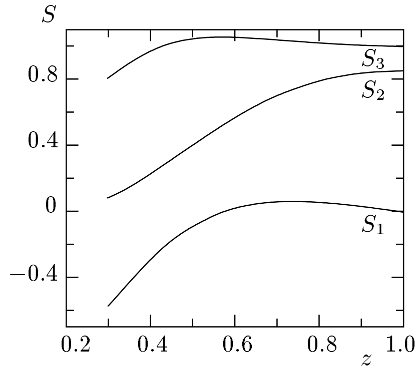

Рис. 2. Зависимость функций S_1, S_2, S_3 от параметра $z=\sqrt{D_b/D_a}\operatorname{tg}\varphi$

При этом функции β_A, S, S_2, S_3 переходят в себя при замене $z\to 1/z$, а функция S_1 меняет знак при такой замене. На рисунках 1, 2 приведены значения функций β_A, S и S_1, S_2, S_3 в интервале 0.3–1. Из соображений симметрии следует, что для структурных сумм β_A, S, S_3 точки $z=1$, $z=\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$ являются экстремальными. В изотропном сверхпроводнике коэффициенты при суммах S_1, S_2 обращаются в нуль.

4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ $\langle|\Delta|^2\rangle, z$

Параметры $\langle|\Delta|^2\rangle, z$ и B являются свободными в выражении (25) для свободной энергии. Их значение определяется из условия экстремума свободной энергии (25) по этим параметрам, т. е.

$$\partial\left(\frac{F_S-F_N}{V}\right)\partial\langle|\Delta|^2\rangle=0,\qquad(28)$$

	β_A	$4S$	S_1	S_2	S_3
1	1.18034	0.375714	0	0.85416	1.001706
$1/\sqrt{3}$	1.159595	0.3691106	0	0.5281606	1.056321

$$\partial\left(\frac{F_S-F_N}{V}\right)/\partial z=0,$$

$$\partial\left(\frac{F_S-F_N}{V}\right)/\partial B=0.$$

Предположим, что температура настолько близка к T_c, что можно сохранить в уравнении (25) только старшие по $1-T/T_c$ члены. В этом случае величина β_A должна быть экстремальна [1], т. е.

$$\sqrt{\frac{D_b}{D_a}}\operatorname{tg}\varphi=\left\{1,\sqrt{3},1/\sqrt{3}\right\}. \qquad (29)$$

Точка 1 (квадратная решетка в изотропном случае) соответствует седловой точке (максимум по z). Таким образом, в этом простейшем случае реализуется ромбоэдрическая решетка с углом φ, определяемым уравнением

$$\sqrt{\frac{D_b}{D_a}}\operatorname{tg}\varphi=\{\sqrt{3},1/\sqrt{3}\}. \qquad (30)$$

Как отмечалось выше, во всем интервале (29) величины β_A, S меняются очень медленно. По этой причине во втором уравнении (28) может стать существенным поправочный член выражения (25) свободной энергии:

$$-\frac{\partial\beta_A}{\partial z}\left\{\frac{1}{8}\left[\psi''(x)+\frac{x-0.5}{3}\psi'''(x)\right]+ + 2\pi e^2\nu D_aD_b(\psi'(x))^2\right\}+ + \frac{\partial S}{\partial z}\frac{\hat\lambda}{12T}\psi'''(x)-\frac{\hat\lambda^2}{12\pi T}\psi'''(x)\times \times\left\{\left(\frac{\Gamma_{aaaa}}{D_a^2}-\frac{\Gamma_{bbbb}}{D_b^2}\right)\frac{\partial S_1}{\partial z}- -\left(\frac{\Gamma_{aaaa}}{D_a^2}+\frac{\Gamma_{bbbb}}{D_b^2}-6\frac{\Gamma_{aabb}}{D_a^2}\right)\frac{\partial S_2}{\partial z}+ +\left(\frac{\Gamma_{aaaa}}{D_a^2}+\frac{\Gamma_{bbbb}}{D_b^2}-2\frac{\Gamma_{aabb}}{D_aD_b}\right)\frac{\partial S_3}{\partial z}\right\}=0, \qquad (31)$$

где $x=1/2+(\Gamma(T)+\hat\lambda)/2\pi T$.

Первое из уравнений (28) не содержит численной малости. Поэтому его можно написать в главном приближении по длине свободного пробега. В результате получим

$$\langle|\Delta|^2\rangle=2\pi Te(H_{c2}-B)\sqrt{D_aD_b}\psi'(x)\times \times\left\{-\frac{\beta_A}{4}\left[\psi''(x)+\frac{x-1/2}{3}\psi'''(x)\right]- -4\pi(\beta_A-1)D_aD_be^2\nu+\frac{\hat\lambda}{6T}\psi'''(x)S\right\}^{-1}. \qquad (32)$$

Уравнения (31), (32) определяют значение параметров z и $\langle|\Delta|^2\rangle$ и тем самым значение свободной энергии (25). Функции β_A, S имеют максимум в точке $z=1$ и минимум в точках $z=\{1/\sqrt{3},\sqrt{3}\}$. Функция S_3 имеет минимум в точке $z=1$ и максимум в точках $z=\{1/\sqrt{3},\sqrt{3}\}$. Из уравнений (26) следует, что при $z\to 0$ функции β_A, S, S_3 пропорциональны $z^{-1/2}$. Тем самым функция S_3 имеет еще две точки минимума. Из уравнения (25) следует, что в изотропном сверхпроводнике учет поправочных членов по длине свободного пробега приводит лишь к углублению минимума, соответствующего треугольной решетке. В анизотропном сверхпроводнике точка $z=1$, вообще говоря, не является экстремальной. Смещаются положения всех трех экстремумов. При этом снимается вырождение и один из минимумов становится только локальным минимумом. Возможно существование более чем трех решений уравнений (31).

Приведем значение функций $\beta_A, S, S_1, S_2, S_3$ в точках $\{1, 1/\sqrt{3}\}$ (см. таблицу).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована структура вихревой решетки в анизотропном сверхпроводнике при произвольной температуре в магнитных полях, близких к критическому. Если магнитное поле ориентировано вдоль одной из главных осей, то решающим фактором является анизотропия в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Даже слабая анизотропия может существенно изменить угол в ромбоэдрической элементарной ячейке. Этот угол является функцией температуры, поля и материальных констант. Причина состоит в том, что в приближении Гинзбурга—Ландау в изотропных сверхпроводниках разница свободных энергий квадратной и треугольной решеток составляет только 2% от энергии сверхпроводящего перехода. В изотропных сверхпроводниках ничего существенного при понижении температуры не возникает. В анизотропных сверхпроводниках снимается вырождение, связанное с преобразованием $z \to 1/z$, и два тождественных состояния становятся различными. При этом одно из них соответствует лишь локальному минимуму, другое — основному состоянию. Эти состояния разделены барьером и переход между ними является переходом первого рода. Вполне возможно, что изменение поля может привести к переходу между этими состояниями [7]. Отметим также, что уравнение (31) для угла при вершине ромбоэдрической структуры может иметь более трех решений даже в полях близких к H_{c2}. Исследование слабых полей, $H \ll H_{c2}$, представляет большие трудности, поскольку в главном приближении энергия зависит лишь от плотности вихрей [2]. В этой связи упрощенный подход с нелокальным обобщением лондоновского приближения [8] нам представляется недостаточным. Он противоречит экспериментальным данным [7, 9].

Автор выражает благодарность Л. Я. Винникову за обсуждение результатов. Работа выполнена при финансовой поддержке CRDF (США) (грант № RP1-2251), а также Российского фонда фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
2. P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, W. A. Benjamin, INC, New York–Amsterdam (1966).
3. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **115**, 726 (1999).
4. G. Eilanberger, J. Phys. **214**, 195 (1968).
5. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **55**, 2262 (1968).
6. Yu. N. Ovchinnikov and E. H. Brandt, Phys. Stat. Sol. (b) **67**, 301 (1975).
7. M. R. Eskildsen et al., Physica B **284–288** (2000).
8. V. G. Kogan et al., Phys. Rev. B **55**, R8693 (1997).
9. L. Ya. Vinnikov et al., Physica B **284–288**, 813 (2000).