

О ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ И КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СОЛИТОНАХ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЕ

*С. В. Сазонов**

*Калининградский государственный технический университет
236000, Калининград, Россия*

Поступила в редакцию 3 мая 2000 г.

Исследовано распространение предельно коротких (без высокочастотного заполнения) импульсов и нерезонансных солитонов огибающей в двухкомпонентной среде из двухуровневых атомов с сильно различающимися частотами квантовых переходов. Показано, что если характерный обратный временной масштаб импульса лежит в промежутке между этими частотами, его динамика описывается уравнением Косевича–Ковалева, однонаправленным вариантом которого является уравнение Конно–Камямы–Сануки. При равенстве дипольных моментов переходов у обеих компонент последнее уравнение становится интегрируемым. На основе солитонных и солитоноподобных решений данных уравнений проведен анализ режимов распространения импульсов при различных начальных состояниях двухкомпонентной среды. Исследован вопрос об устойчивости данных локализованных волновых образований. Обсуждается возможность существования устойчивых солитоноподобных импульсов, распространяющихся в неравновесной среде с групповыми скоростями, превышающими скорость света в вакууме.

PACS: 42.50.Md, 32.80.Fb, 42.65.Re, 42.50.Gy, 42.55.-f, 42.65.-k

1. ВВЕДЕНИЕ

Прогресс в развитии лазерной физики в последнее десятилетие способствовал, в числе прочего, усовершенствованию методов создания неравновесных состояний различных сред. В этой связи усилился интерес к вопросам формирования и регистрации в таких средах электромагнитных импульсов, распространяющихся со скоростью, превышающей скорость света c в вакууме [1]. Хорошо известно, что сверхсветовые моды необходимым образом присутствуют в средах, неустойчивых по отношению к переходу в равновесное состояние [2].

В то же время создание в лабораторных условиях лазерных импульсов длительностью τ_p до одного периода электромагнитных колебаний (предельно коротких импульсов (ПКИ)) [3, 4] явилось мощным стимулом для теоретических исследований по взаимодействию таких импульсов с веществом. Диапазон значений τ_p для ПКИ к настоящему времени составляет от нескольких сотен до единиц фемто-

секунд. По понятным причинам при теоретических исследованиях взаимодействия ПКИ с веществом в материальных и волновых уравнениях перестает быть справедливым приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз, хорошо зарекомендовавшее себя в оптике пико- и наносекундных импульсов с ярко выраженной несущей частотой ω [5, 6]. Ниже такие импульсы будем называть квазимонохроматическими. Количественный критерий квазимонохроматичности может быть записан в виде $\Delta\omega/\omega \ll 1$, где $\Delta\omega$ — спектральная ширина импульса, возникающая из-за его конечной длительности.

После обнаружения и теоретического описания эффекта самоиндуцированной прозрачности [7] на основе приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз продолжался поиск альтернативных математических методов для исследования данного явления [8–13]. Так, в [8, 9] был найден малый параметр $\epsilon = 8\pi d^2 N/\hbar\omega_0$ (N — концентрация двухуровневых атомов, взаимодействующих с полем импульса, ω_0 и d — соответственно частота и матричные элементы дипольного момента квантового перехода), поз-

*E-mail: nst@alg.kaliningrad.ru

воливший понизить порядок производных в уравнениях Максвелла (редуцированная система Максвелла–Блоха). Математическая структура последних с точностью до переобозначений идентична соответствующей структуре уравнений Максвелла–Блоха, полученных с использованием приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз [8]. При этом как уравнения Максвелла–Блоха, так и редуцированная система Максвелла–Блоха интегрируются методом обратной задачи рассеяния. Отказ от приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз, совершенный в [8, 9], явился важным шагом в развитии теории взаимодействия лазерных импульсов с веществом с точки зрения современных тенденций в когерентной оптике.

Авторы работ [14, 15] отказались от приближения среды малой плотности ($\epsilon \ll 1$), но, в свою очередь, предложили приближения очень коротких,

$$(\omega_1 \tau_*)^2 \ll 1, \quad (1)$$

и очень длинных,

$$(\omega_2 \tau_*)^2 \gg 1, \quad (2)$$

в сравнении с внутриатомными временами, соответственно ω_1^{-1} и ω_2^{-1} , импульсов (τ_* — характерный временной масштаб распространяющегося сигнала). В пределе (1) динамика ПКИ подчиняется уравнению синус-Гордон для «площади» электромагнитного импульса [14, 15], в пределе (2) — модифицированному уравнению Кортевега–де Вриза (КдВ) для электрического поля ПКИ [14–17].

Очевидно, условие (1) может быть удовлетворено лишь для частот ω_1 , лежащих в инфракрасном диапазоне, что соответствует колебательному спектру молекул [14], т. е. движению молекулярных ионов. В газовых средах это могут быть туннельно-инверсионные переходы некоторых молекул (например, молекулы аммиака). Если же предположить, что условие (1) может быть выполнено для частот ω_1 видимого диапазона, то в таком случае необходимо учитывать процессы ионизации (переходы в непрерывный спектр), что может значительно усложнить задачу.

Приближению (2) в рамках нашего подхода вполне могут удовлетворить частоты ω_2 видимого диапазона, соответствующие электронным переходам. В последнее время усилился интерес к исследованию резонансного взаимодействия лазерных импульсов с двухкомпонентными средами. Так, в [18–20] рассмотрены различные режимы распространения резонансных квазимонохроматических импульсов в системе двухуровневых

атомов двух сортов. При этом совпадают частоты переходов для атомов обоих сортов, но разнятся их дипольные моменты. В то же время при распространении немонохроматического импульса в среде во взаимодействие с ним вовлекается большое число квантовых переходов различной природы, как захватываемых спектром ПКИ, так и остающихся за его пределами. Простейшей теоретической моделью здесь может служить двухкомпонентная среда, состоящая из переходов, удовлетворяющих соответственно условиям (1) (1-компонента или 1-атомы) и (2) (2-компонента или 2-атомы).

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию распространения ПКИ и нерезонансных квазимонохроматических сигналов в нелинейной среде, состоящей из 1- и 2-компонент, которые будем рассматривать как наборы двухуровневых атомов с частотами ω_1 и ω_2 и дипольными моментами d_1 и d_2 переходов соответственно. Заметим, что такая модель может более или менее удовлетворительно описывать взаимодействие ПКИ с газообразными средами или некоторыми жидкостями типа поглощающей краски [21]. Дело в том, что из модели двухуровневой среды в области прозрачности однозначно получается отрицательное значение для нелинейного показателя преломления n_2 [22, 23], в то время как в твердых диэлектриках $n_2 > 0$ [24]. В [25] показано, что $n_2 > 0$ можно получить в приближении как минимум трехуровневой среды, рассмотрение которой выходит за рамки настоящей работы.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 с использованием (1) и (2) выводятся нелинейные волновые уравнения для «площади» электромагнитного импульса, распространяющегося в двухкомпонентной среде из двухуровневых атомов. Раздел 3 посвящен всестороннему анализу некоторых солитоноподобных решений данных уравнений (от ПКИ до импульсов огибающей, или квазимонохроматических солитонов). В общем случае солитоны, о которых идет речь в настоящей работе, не являются решениями вполне интегрируемых уравнений. Ниже, где это необходимо, постоянно подчеркивается отличие истинных солитонов от решений неинтегрируемых уравнений в виде уединенных бегущих волн. Метод «усредненного лагранжиана», используемый в разд. 3, позволил исследовать вопрос об устойчивости рассмотренных решений. В разд. 4 анализируются режимы устойчивого распространения ПКИ и импульсов огибающей в двухкомпонентной среде, приготовленной в различных начальных состояниях. Уделяется внимание соли-

тонам, распространяющимся в неравновесных средах с групповыми скоростями, превышающими скорость света в вакууме. В Заключении (разд. 5) сформулированы основные выводы работы, а также некоторые нерешенные вопросы, которые, по мнению автора, представляют интерес для их решения в дальнейшем.

2. УРАВНЕНИЯ КОСЕВИЧА–КОВАЛЕВА И КОННО–КАМЕЯМЫ–САНУКИ

Рассмотрим газ, состоящий из двухуровневых 1- и 2-компонент с квантовыми переходами, удовлетворяющими соответственно условиям (1) и (2).

Система материальных уравнений Блоха для такой среды имеет вид

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = -\omega_j V_j, \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial t} = \omega_j U_j + \Omega_j W_j, \quad (4)$$

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} = -\Omega_j V_j, \quad (5)$$

где индекс j ($j = 1, 2$) соответствует номеру компоненты среды, $\Omega_j = 2d_j E/\hbar$, W_j — инверсия населенностей перехода j -й компоненты ($-1/2 \leq W_j \leq 1/2$), динамическая переменная U_j определяет поляризацию P среды:

$$P = 2 \sum_{j=1}^2 d_j N_j U_j, \quad (6)$$

N_j — концентрация атомов j -й компоненты.

Исключив из (3)–(5) не имеющую реального физического смысла величину V_j , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} &= -\omega_j^2 U_j - \omega_j \Omega_j W_j, \\ \frac{\partial W_j}{\partial t} &= \frac{\Omega_j}{\omega_j} \frac{\partial U_j}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что U_j и V_j — не огибающие синфазной и квадратурной компонент дипольного момента, а исходные атомные переменные, выражающиеся через элементы матрицы плотности $\hat{\rho}$ следующим образом:

$$U = \frac{\rho_{21} + \rho_{12}}{2}, \quad V = \frac{\rho_{21} - \rho_{12}}{2i}.$$

Дополним систему (6), (7) уравнением Максвелла

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Для 1-компоненты в правой части первого уравнения (7), в силу (1), можно пренебречь членом $\omega_1^2 U_1$. Тогда решение уравнения (7) для $j = 1$ представляется в виде [14, 15]

$$W_1 = W_{1\infty} \cos \theta, \quad \frac{\partial U_1}{\partial t} = -\omega_1 W_{1\infty} \sin \theta, \quad (9)$$

где

$$\theta = \int_{-\infty}^t \Omega_1 dt',$$

$W_{1\infty}$ — инверсия атомов 1-компоненты до воздействия ПКИ.

Перепишем первое уравнение (7) для 2-компоненты в виде

$$U_2 = -\frac{\Omega_2}{\omega_2} W_2 - \frac{1}{\omega_2^3} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}. \quad (10)$$

В нулевом приближении по малому параметру $(\omega_2 \tau_p)^{-2}$ (см. (2)) находим $U_2 \approx -\Omega_2 W_2 / \omega_2$. Подставляя данное выражение во второе слагаемое в правой части уравнения (10) и полагая в нем $W_2 \approx W_{2\infty}$ в силу слабого возбуждения перехода ($W_{2\infty}$ — начальная инверсия атомов 2-компоненты), получим

$$U_2 = -\frac{\Omega_2}{\omega_2} W_2 + \frac{W_{2\infty}}{\omega_2^3} \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2}. \quad (11)$$

После подстановки $U_2 \approx -\Omega_2 W_{2\infty} / \omega_2$ во второе уравнение (7) и его последующего интегрирования будем иметь

$$W_2 = W_{2\infty} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{2\omega_2^2} \right). \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что

$$U_2 = -W_{2\infty} \frac{\Omega_2}{\omega_2} + W_{2\infty} \frac{\Omega_2^3}{2\omega_2^3} + \frac{W_{2\infty}}{\omega_2^3} \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Из (8), (6), (9) и (13) находим

$$\begin{aligned} \Delta \theta - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= \\ &= \alpha \sin \theta - \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \nu \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4}, \end{aligned} \quad (14)$$

где n_0 — низкочастотный показатель преломления, соответствующий квантовым переходам 2-компоненты и определяемый выражением

$$\begin{aligned} n_0^2 &= 1 - \frac{16\pi d_2^2 N_2 W_{2\infty}}{\hbar \omega_2}, \\ \alpha &= -\frac{16\pi d_1^2 N_1 \omega_1 W_{1\infty}}{\hbar c^2}, \\ \nu &= -\frac{16\pi d_2^2 N_2 W_{2\infty}}{\hbar c^2 \omega_2^3}, \quad \beta = \frac{3d_2^2 \nu}{2d_1^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

В пространственно-одномерном случае ($\Delta = \partial^2/\partial z^2$) и при $d_1 = d_2$ ($\beta = 3\nu/2$) уравнение (14) совпадает с уравнением Косевича–Ковалева, обобщающим модель Френкеля–Конторовой для динамических дислокаций в кристалле на случай учета решеточного ангармонизма и пространственной дисперсии акустической моды [26]. Именно при $\beta = 3\nu/2$ уравнение (14) имеет точное решение в виде уединенного солитоноподобного импульса [26]. Уравнение (14) не принадлежит к классу интегрируемых моделей, поэтому его решение в виде уединенной бегущей волны не обладает солитонным свойством упругого взаимодействия с себе подобными. Чтобы отличить истинные солитоны от уединенных стационарных волн, ниже последние, следуя [27], будем иногда называть солитронами. В смысле истинно солитонных решений представляет интерес «однонаправленный» вариант уравнения (14). Чтобы получить последний, применим к (14) приближение однонаправленного распространения [15] вдоль оси z со скоростью, близкой к c/n_0 . Данное приближение оправдано, если каждое из слагаемых в правой части уравнения (14) в силу (1) и (2) относится как $(\omega_1\tau_p)^2 \sim (\omega_2\tau_p)^{-2} \ll 1$ к обоим слагаемым в левой части. Формальное ограничение на N_2 сверху, как видно из выражения для n_0^2 , существует в неравновесном случае $W_{2\infty} > 0$. Для $W_{2\infty} = 1/2$ оно имеет вид (см. (12))

$$\epsilon_2 < 1, \quad (16)$$

где $\epsilon_j = 8\pi d_j^2 N_j / \hbar \omega_j$ ($j = 1, 2$). Данное ограничение более слабое, чем в случае редуцированной системы Максвелла–Блоха ($\epsilon \ll 1$) [8, 9]. При $\epsilon_2 > 1$ величина n_0 становится мнимой, что соответствует эффекту полного отражения нерезонансных ПКИ от неравновесной среды. В равновесной же среде ($W_{2\infty} < 0$) ограничений на n_2 нет. Из сравнения первого слагаемого в правой части уравнения (14) с произвольным слагаемым в его левой части приходим к еще одному условию применимости приближения однонаправленного распространения:

$$\epsilon_1(\omega_1\tau_p/n_0)^2 \ll 1, \quad (17)$$

которое в силу (1), так же как и (16), значительно слабее, чем в случае редуцированной системы Максвелла–Блоха ($\epsilon_1 \ll 1$).

Выполнив стандартную процедуру перехода в сопутствующую систему координат [28, 29], получим

при учете (2) и (17)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \tau} + a \sin \theta - b \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - g \frac{\partial^4 \theta}{\partial \tau^4} = \frac{c}{2n_0} \Delta_{\perp} \theta, \quad (18)$$

где Δ_{\perp} — поперечный лапласиан, $\tau = t - n_0 z / c$ — локальное время,

$$a = \frac{c\alpha}{2n_0}, \quad b = \frac{c\beta}{2n_0}, \quad g = \frac{c\nu}{2n_0}.$$

Если отвлечься от поперечной динамики ($\Delta_{\perp} \theta = 0$), уравнение (18) содержит в себе как частные случаи уравнение синус-Гордон для θ ($b = g = 0$ в отсутствие 2-компоненты) и модифицированное уравнение КдВ для $E = (\hbar/2d)\partial\theta/\partial\tau$ ($a = 0$ в отсутствие 1-компоненты). Оба уравнения принадлежат классу моделей, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния [30]. Если в (18) при $\Delta_{\perp} \theta = 0$ положить $b = 3g/2$, что равносильно $d_1 = d_2$ (см. (15)), приходим к уравнению Конно–Камеямы–Сануки [29]. Именно при таком соотношении между коэффициентами b и g уравнение (18) интегрируется с помощью метода обратной задачи рассеяния [31]. Поэтому его решение в виде ПКИ, в отличие от соответствующих решений уравнения (14), являются истинными солитонами, упруго взаимодействующими друг с другом. В [26, 31] соотношение $b = 3g/2$ задавалось искусственным образом. В нашем случае оно вытекает из допущения о равенстве дипольных моментов обеих компонент среды. Подчеркнем, что речь идет именно о дипольных моментах, а не о «силах осцилляторов», как это имеет место в случае системы трехуровневых молекул с V -схемой квантовых переходов [32]. В нашем случае при $d_1 = d_2$ отношение «сил осцилляторов» $f_j = d_j^2 \omega_j$ ($j = 1, 2$) рассматриваемых переходов таково, что

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{d_2^2 \omega_2}{d_1^2 \omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \gg 1.$$

Однако, несмотря на то что $f_1 \ll f_2$, сильное возбуждение 1-компоненты в сравнении с 2-компонентной может обеспечиваться наличием в спектре ПКИ фурье-компонент, резонансных соответствующим переходам (см. (1)).

Условие $d_1 = d_2$ является достаточно сильным ограничением представленной здесь модели и может рассматриваться как исключительный случай, когда уравнение (14) имеет точное решение в виде уединенного импульса, а уравнение (18) при

$\Delta_{\perp}\theta = 0$ к тому же интегрируемо и потому обладает многосолитонными решениями. Ниже будем, как правило, полагать $d_1 \neq d_2$, обращаясь к случаю равенства дипольных моментов квантовых переходов лишь при анализе точных решений уравнений (14) и (18), которые имеют в большей степени иллюстративный характер. В случае ПКИ различие между d_1 и d_2 будем считать малым (более детально см. ниже).

3. ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИЕ СОЛИТОПОДОБНЫЕ ИМПУЛЬСЫ, БРИЗЕРЫ И СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ

В настоящем разделе рассмотрим различные приближенные и точные решения уравнений (14) и (18). Для нахождения приближенных решений в виде ПКИ воспользуемся методом усредненного вариационного принципа типа Ритца–Уизема [33, 34]. Такой подход позволит нам не только найти решения указанного типа, но и исследовать вопрос об их устойчивости.

Уравнения (14) и (18) можно записать в виде уравнений Эйлера–Лагранжа, используя соответственно плотности лагранжианов

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}(\nabla\theta)^2 + \frac{n_0^2}{2c^2} \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 - \alpha(1 - \cos\theta) - \frac{\beta}{12} \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^4 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)^2 \quad (19)$$

и

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial\tau} - a(1 - \cos\theta) - \frac{b}{12} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)^4 + \frac{g}{2} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\right)^2 - \frac{c}{4N_{20}} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)^2. \quad (20)$$

После прохождения ПКИ среда должна возвращаться в исходное состояние, в котором она находилась при $t \rightarrow -\infty$. Тогда его полная «площадь»

$$\theta_{\infty} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1 dt' = 2\pi$$

(см. (9)). В соответствии с этим пробное решение представим в виде

$$\theta = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[\rho(\mathbf{r}) \left(t - \frac{\Phi(\mathbf{r})}{c} \right) \right] \right\}, \quad (21)$$

где $\Phi(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ — «быстрая» и «медленная» функции координат в соответствии с [33]. При этом профиль электрического поля ПКИ

$$E = \frac{\hbar}{2d_1} \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\hbar}{d_1} \rho(\mathbf{r}) \operatorname{sech} \left[\rho(\mathbf{r}) \left(t - \frac{\Phi(\mathbf{r})}{c} \right) \right]. \quad (22)$$

Так как при $d_1 = d_2$ ($\beta = 3\nu/2$) и $\Delta_{\perp}\theta = 0$ уравнения (14) и (18) имеют точные решения в виде бегущих ПКИ, ниже, взяв в качестве соответствующего пробного решения функцию (21), разумно считать, что d_1 и d_2 незначительно отличаются друг от друга (более строгий критерий будет установлен ниже). В противном случае не существует гарантий относительно того, что может быть реализовано решение именно такого вида.

Подставляя (21) в (19) и (20) в пренебрежении производными от $\rho(\mathbf{r})$ [33] и интегрируя полученные выражения по t (или по τ), получим с учетом (15) «усредненные лагранжианы»

$$L_1 \equiv \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_1 dt = \frac{\rho}{c^2} [n_0^2 - (\nabla\Phi)^2] - \frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{3}(1 + \delta)\nu\rho^3, \quad (23)$$

$$L_2 \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_2 d\tau = -\rho \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{a}{\rho} - \frac{1}{3}(1 + \delta)g\rho^3 - \frac{c}{2n_0} \rho (\nabla_{\perp}\Phi)^2, \quad (24)$$

где ∇_{\perp} — поперечный градиент, $\delta = 2(d_2^2/d_1^2 - 1)$.

Параметр δ характеризует относительную отстройку дипольных моментов квантовых переходов d_1 и d_2 друг от друга. Для сохранения уверенности в правильности выбранной пробной функции вида (21) необходимо выполнение неравенства $|\delta| < 1$ (см. (23), (24)). Отсюда и из выражения для δ следует, что относительная разница величин d_1 и d_2 не должна превышать 20%. Ниже в случае ПКИ будем считать $\delta \ll 1$. Условию (1) могут удовлетворять квантовые переходы в системе колебательных подуровней [14] или в системе туннельно-инверсионных переходов, а условию (2) — электронно-оптические переходы. Тогда

$$d_1 \sim er_i, \quad d_2 \sim ea_B,$$

где e — заряд электрона, $r_i \sim \sqrt{\hbar/m_i\omega_1}$ — амплитуда смещения молекулярных ионов, m_i — характер-

ная масса ионов, $a_B = \hbar^2/m_e e^2$ — боровский радиус, m_e — масса электрона. Отсюда получаем

$$\frac{d_1}{d_2} \sim \hbar^{3/2} \frac{\sqrt{m_i \omega_1}}{m_e e^2}.$$

Взяв $m_i \sim 10^4 m_e$, $\omega_1 \sim 10^{13} \text{с}^{-1}$, найдем $d_2/d_1 \sim 1$. Следовательно, близость значений d_1 и d_2 может отвечать реальным условиям.

Записывая для Φ и ρ уравнения Эйлера–Лагранжа с использованием L_1 , найдем

$$(\nabla\Phi)^2 = n_0^2 + c^2 \left[\frac{\alpha}{\rho^2} - (1 + \delta)\nu\rho^2 \right], \quad (25)$$

$$\nabla(\rho\nabla\Phi) = 0. \quad (26)$$

Систему (25), (26) можно рассматривать как уравнения геометрической оптики для солитронов [33]. Величина Φ в таком случае имеет смысл солитронного эйконала, а уравнение (25) — уравнения солитронного эйконала. Оно определяет скорость v_n распространения солитонного волнового фронта в каждой точке в направлении нормали к нему. Действительно, дифференцируя уравнение солитронного фронта,

$$\rho \left(t - \frac{\Phi}{c} \right) = \text{const},$$

в пренебрежении изменением медленной переменной ρ , найдем

$$dt = \frac{d\Phi}{c} = \frac{|\nabla\Phi| dl_n}{c},$$

где dl_n — перемещение фронта ПКИ в направлении нормали. Отсюда получаем

$$v_n = \frac{dl_n}{dt} = \frac{c}{|\nabla\Phi|}. \quad (27)$$

Используя, кроме того, (25), находим

$$\frac{1}{v_n^2} = \frac{n_0^2}{c^2} + \frac{\alpha}{\rho^2} - (1 + \delta)\nu\rho^2. \quad (28)$$

Уравнение (26) можно переписать в виде

$$\frac{\partial(\rho\partial\Phi/\partial l_n)}{\partial l_n} = 0.$$

Так как $\partial\Phi/\partial l_n = |\nabla\Phi|$, то, учитывая (27), приходим к выводу, что вдоль локальных нормалей к волновым фронтам

$$\rho/v_n = \text{const}. \quad (29)$$

Профили волновых фронтов в каждый последующий момент времени, отталкиваясь от предыдущего, могут быть получены с помощью построений

типа Гюйгенса, соответствующих численному решению системы (25), (26).

Прежде чем обсудить данные построения, найдем одномерное солитоноподобное решение, соответствующее распространению импульса вдоль оси z . Тогда ρ и Φ зависят только от z . Волновые фронты такого импульса являются плоскостями, перпендикулярными к оси z . Из (27)–(29) находим, что

$$\rho = \tau_p^{-1} = \text{const}, \quad v_n = v = \text{const}, \quad \Phi = cz/v$$

и

$$\frac{1}{v} = \sqrt{\frac{n_0^2}{c^2} + \alpha\tau_p^2 - \frac{(1 + \delta)\nu}{\tau_p^2}}. \quad (30)$$

Профиль ПКИ, согласно (22), определится выражением

$$E = \frac{\hbar}{d_1\tau_p} \text{sech} \frac{t - z/v}{\tau_p}. \quad (31)$$

Так как уравнение (14) не является интегрируемым, ПКИ вида (30), (31) не обладают свойством упругого взаимодействия с себе подобными.

Очевидно, величины τ_p и v имеют соответственно смысл длительности ПКИ и скорости их распространения вдоль оси z . В качестве свободного параметра в данном случае выбрана длительность импульса.

Заметим, что при $d_1 = d_2$ ($\delta = 0$) выражения (30), (31) соответствуют точному решению уравнения (14) при $\Delta_\perp\theta = 0$, найденному в [26].

Из (21), (31), (9) и (12) находим законы изменения инверсий населенностей обеих компонент при прохождении импульса вида (31):

$$\begin{aligned} W_1 &= W_{1\infty} \left(1 - 2 \text{sech}^2 \frac{t - z/v}{\tau_p} \right), \\ W_2 &= W_{2\infty} \left(1 - \frac{2}{(\omega_2\tau_p)^2} \text{sech}^2 \frac{t - z/v}{\tau_p} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда видно, что псевдоспин, соответствующий 1-компоненте, в процессе прохождения импульса (31) делает полный оборот по сфере Блоха. Состояние же 2-компоненты изменяется незначительно. Эти выводы объясняются наличием в спектре ПКИ (31) фурье-компонент резонансных 1-компоненте (см. (1)) и отсутствием таковых для 2-компоненты (см. (2)).

В действительности импульс должен иметь конечные размеры в плоскости, перпендикулярной оси z . При этом в центре поперечного сечения импульса его амплитуда больше, чем на периферии. В этой связи вернемся к неодномерному варианту системы (25), (26) (см. также (28), (29)). Как видно из (22), величина ρ пропорциональна амплитуде импульса.

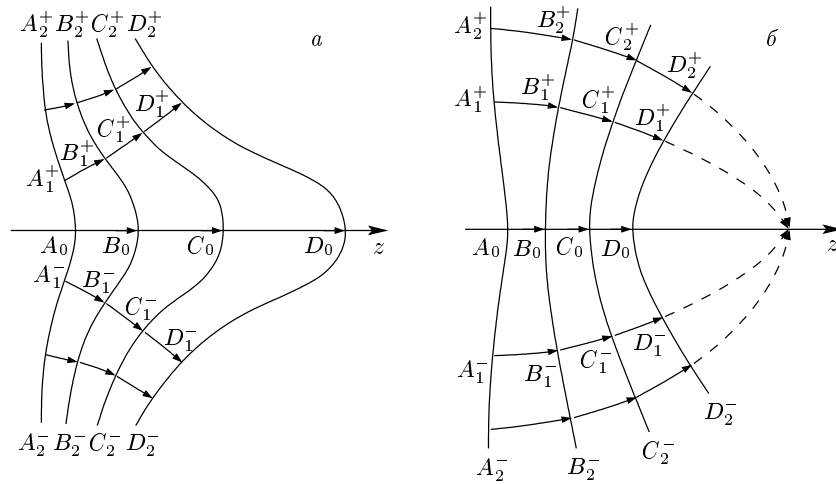


Рис. 1. Построение солитонных волновых фронтов через равные промежутки времени с помощью принципа Гюйгенса, соответствующее численному решению системы (25), (26): *a* — дефокусирующая среда, *b* — фокусирующая среда. В целях простоты вторичные сферические волны заменены стрелками, нормальными к волновому фронту солитона: $A_j^\pm B_j^\pm = B_j^\pm C_j^\pm = C_j^\pm D_j^\pm = \dots$

Тогда выражение (28) определяет зависимость нормальной к солитонному волновому фронту скорости v_n от амплитуды в каждой точке фронта. В соответствии с этим на рис. 1 схематически представлены эволюции волновых фронтов в случаях монотонного возрастания ($dv_n/d\rho > 0$) и убывания ($dv_n/d\rho < 0$) скорости v_n при увеличении локальной амплитуды ПККИ. В первом случае центр поперечного сечения сигнала, двигаясь вперед, обгоняет периферийные участки. Профиль солитонного волнового фронта выгибается вперед, способствуя на больших временах формированию «электромагнитного снаряда» («пули») [35, 36]. Важно, что в такой ситуации импульс остается устойчивым, т.е. способен распространяться в среде на большие расстояния. Во втором же случае центр поперечного сечения отстает от периферийных участков ПККИ, что в конце концов приводит к их самофокусировке (рис. 1б). Последний эффект обеспечивает неустойчивость импульса вида (31) по отношению к поперечным возмущениям. Заметим, однако, что стадии формирования электромагнитного снаряда и самофокусировки соответствуют сильному искривлению волновых фронтов. При этом предположение о медленности изменения функции $\rho(\mathbf{r})$ нарушается. Поэтому, строго говоря, на заключительной стадии эволюции волновых фронтов предложенный здесь подход перестает быть справедливым. Конкретные ситуации, соответствующие устойчивому распространению импульса (случаю дефокусировки) и его самофокусировке, бу-

дут проанализированы в следующем разделе. Здесь же полезно остановиться на еще одном подходе, позволяющем провести анализ устойчивости решений типа (30), (31). Заметим для этого, что систему (25), (26) можно записать в виде интеграла Бернулли и уравнения непрерывности для стационарного безвихревого течения идеальной жидкости:

$$\frac{\mathbf{V}^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}, \quad \nabla(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad (33)$$

где «скорость» \mathbf{V} течения данной жидкости определяется как $\mathbf{V} = (c/n_0)\nabla\Phi$, а связь «давления» p с «плотностью» ρ выражается уравнением

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{c^4}{n_0^2} \left[\frac{\alpha}{\rho^2} + (1 + \delta)\nu\rho^2 \right]. \quad (34)$$

Очевидно, условие устойчивости ПККИ (30), (31) запишется в виде критерия устойчивого течения идеальной жидкости типа (33): $dp/d\rho > 0$. Тогда, проведя замену $\rho = \tau_p^{-1}$ в (34), получим

$$\alpha\tau_p^4 + (1 + \delta)\nu > 0. \quad (35)$$

Легко видеть, что условие устойчивости (35) согласуется в найденным выше с помощью построений типа Гюйгенса критерием $dv_n/d\rho > 0$.

Совершенно аналогично проводится анализ устойчивости солитонных решений для уравнения (18), являющегося однонаправленным вариантом уравнения (14). Используя для этой цели «усредненный лагранжиан» L_2 (см. (24)) и пробное решение

(21), найдем для вариационных параметров систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_\perp}{\partial z} + (\mathbf{V}_\perp \nabla_\perp) \mathbf{V}_\perp &= -\frac{1}{\rho} \nabla_\perp p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} + \nabla_\perp (\rho \mathbf{V}_\perp) &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\mathbf{V}_\perp = (c/n_0) \nabla_\perp \Phi$, а зависимость $p(\rho)$, с учетом связи между коэффициентами a, b, g уравнения (18) и соответствующими коэффициентами α, β, ν уравнения (14) определяется уравнением (34).

Система (36) представляет собой динамические уравнения Эйлера и нестационарное уравнение непрерывности для двумерного течения идеальной жидкости, роль времени в которых играет продольная координата z .

Любопытно отметить тот факт, что ПККИ полно-го (двухстороннего) уравнения (14) порождают для вариационных параметров систему уравнений стационарного безвихревого течения идеальной жидкости в трехмерном пространстве, а такие же решения редуцированного (однонаправленного) уравнения (18) — систему динамических уравнений для течения идеальной жидкости в двух измерениях, нормальных к оси z , вдоль которой распространяется импульс.

Важным здесь является то обстоятельство, что «уравнения состояния» $p(\rho)$ совпадают для ПККИ обоих уравнений. Это позволяет сформулировать единый критерий устойчивости для ПККИ типа (22) уравнений (14) и (18) в виде (35) (в случаях уравнений (18) в (35) следует провести замены $\alpha \rightarrow a, \beta \rightarrow b, \nu \rightarrow g$, которые с учетом того, что $(a, b, g) = (c/2n_0)(\alpha, \beta, \nu)$, не являются принципиальными).

Заметим, что одномерное ($\Delta_\perp \theta = 0$) солитоноподобное решение уравнения (18) имеет вид (31), а выражение для скорости v соответствующего импульса находится разложением (30) в ряд Тейлора по малому параметру

$$\left(\frac{c}{n_0}\right)^2 \left[\alpha \tau_p^2 - \frac{(1+\delta)\nu}{\tau_p^2} \right]$$

с сохранением первых двух членов:

$$\frac{1}{v} = \frac{n_0}{c} + a\tau_p^2 - \frac{(1+\delta)g}{\tau_p^2}. \quad (37)$$

Данное разложение соответствует близости скорости v импульса к c/n_0 . Населенности обеих компонент изменяются при этом согласно соотношениям (32).

При $d_1 = d_2$ ($\delta = 0$) уравнение (18) становится интегрируемым, и решение вида (31), (37) является точным односолитонным решением (18). В этом случае импульс (31) является солитоном в строгом смысле, т. е. он упруго взаимодействует с себе подобными. Правда, в рамках уравнения (18) может быть рассмотрено лишь взаимодействие солитонов, движущихся в одном направлении.

Двухсолитонное решение уравнения (18) при $d_1 = d_2$ ($b = 3g/2$) имеет вид [29]

$$\begin{aligned} E &= \frac{\hbar}{2d_1} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{2\hbar}{d_1} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial t} \arctg \left[\frac{\exp s_1 + \exp s_2}{1 - \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\right)^2 \exp(s_1 + s_2)} \right], \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$s_j = \frac{t - z/v}{\tau_j}, \quad \frac{1}{v_j} = \frac{n_0}{c} + a\tau_j^2 - \frac{g}{\tau_j^2} \quad (j = 1, 2),$$

v_j и τ_j — соответственно скорость и длительность j -го солитона при большом разнесении солитонов друг от друга.

Из (38) можно получить бризерное решение уравнения (18), положив в нем свободные параметры τ_1 и τ_2 комплексно-сопряженными друг другу [11]. Взяв $\tau_{1,2} = \tau_p / (1 \pm i\omega\tau_p)$, найдем

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\hbar}{d_1} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial t} \arctg \left\{ \frac{1}{\omega\tau_p} \operatorname{sech} \left(\frac{t-z/v}{\tau_p} \right) \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v_{ph}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Групповая v и фазовая v_{ph} скорости бризера следующим образом выражаются через его длительность τ_p и частоту ω :

$$\frac{1}{v} = \frac{n_0}{c} + \frac{a}{\omega^2 + \tau_p^{-2}} + g(3\omega^2 - \tau_p^{-2}), \quad (40)$$

$$\frac{1}{v_{ph}} = \frac{n_0}{c} - \frac{a}{\omega^2 + \tau_p^{-2}} + g(\omega^2 - 3\tau_p^{-2}). \quad (41)$$

При $\omega\tau_p < 1$ решение (39)–(41) соответствует ПККИ, каждый из которых вмещает внутри себя порядка одного периода электромагнитных колебаний. Если же $\omega\tau_p \gg 1$, из (39) находим квазимонохроматический солитон

$$E = E_m \operatorname{sech} \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v_{ph}} \right) \right], \quad (42)$$

где $E_m = 2\hbar/d_1\tau_p$, групповая v и фазовая v_{ph} скорости определяются соответственно выражениями (см. (40), (41) при $\omega^2 \gg \tau_p^{-2}$)

$$\frac{1}{v} = \frac{n_0}{c} + \frac{a}{\omega^2} + 3g\omega^2, \quad \frac{1}{v_{ph}} = \frac{n_0}{c} - \frac{a}{\omega^2} + g\omega^2. \quad (43)$$

Заметим, что выражения (40), (41) можно получить с помощью метода аналитического продолжения дисперсионных параметров на комплексную плоскость, имеющего наглядную квазичастичную интерпретацию [29]. Данный метод был предложен для однопараметрических солитонов и солитронов в работах [37, 38], а обобщен и развит на случай двухпараметрических решений в [23, 29]. Метод основан на предположении о существовании решения рассматриваемой нелинейной системы в виде экспоненциально локализованного бегущего импульса, линеаризованный вариант которой порождает дисперсионное соотношение $F(\omega, k) = 0$, где k — волновое число в лабораторной системе отсчета. Совершив замены вида $\omega \rightarrow \omega + i\rho$, $k \rightarrow k + i\kappa$ и подставив их в дисперсионное уравнение, после разделения действительной и мнимой частей получим

$$F_1(\omega, \rho, k, \kappa) = 0, \quad F_2(\omega, \rho, k, \kappa) = 0.$$

Данные соотношения устанавливают связи между параметрами локализованного решения, выделяя любые два из них в качестве свободных. При этом

$$\rho = \tau_p^{-1}, \quad v_{ph} = \frac{\omega}{k}, \quad v = \frac{\rho}{\kappa}.$$

Последнее выражение для групповой скорости можно проиллюстрировать на основе представлений о квазичастицах. Очевидно, величина $\rho = \tau_p^{-1}$, присутствующая в мнимой добавке к частоте при указанных выше заменах, есть обратное время жизни квазичастиц (в нашем случае фотонов в среде или поляритонов [21]) в состоянии с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar k$. Тогда $l = \kappa^{-1}$ — средняя длина их свободного пробега. Конечность τ_p и l , возникающая из-за взаимодействия между квазичастицами в результате нелинейности, приводит к конечным ширинам $\Delta\omega$ и Δk спектра квазичастиц, формирующих солитоноподобное образование. При этом

$$\rho = \tau_p^{-1} = \Delta\omega, \quad \kappa = l^{-1} = \Delta k, \quad v = \frac{\rho}{\kappa} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Линеаризация (18) при $\Delta_\perp\theta = 0$ дает

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial\tau} + a\theta - \frac{\partial^4\theta}{\partial\tau^4} = 0.$$

Подставляя сюда $\theta \sim \exp[i(\omega\tau - qz)]$, где q — волновое число в сопутствующей системе отсчета, связанное с k выражением $k = \omega n_0/c + q$, получим дисперсионное соотношение

$$k = \frac{n_0\omega}{c} + g\omega^3 - \frac{a}{\omega}.$$

После проведения замен $\omega \rightarrow \omega + i\rho$, $k \rightarrow k + i\kappa$ и выполнения описанной выше процедуры найдем выражения (40) и (41). Полагая $\omega = k = 0$ при $\rho, \kappa \neq 0$ приходим к однопараметрическому солитоноподобному решению. Заметим в этой связи, что при $\omega = 0$ выражение (40) переходит в (37) если $\delta = 0$. С другой стороны, при $\omega < \rho$ и $k < \kappa$ представление об отдельных квазичастицах является затруднительным. В этом случае можно говорить о конгломерате сильновзаимодействующих поляритонов, теряющих свою индивидуальность. В пределе $\omega, k \rightarrow 0$ образуется поляритонный конденсат на нулевой моде. Из-за сильных внутренних взаимодействий в данном конденсате (благодаря которым он и формируется) спектр его имеет конечные ширины $\Delta\omega \sim \tau_p^{-1}$, $\Delta k = l^{-1} = (v\tau_p)^{-1}$. Благодаря данному обстоятельству поляритонный конденсат распространяется в среде в виде ПКИ (31).

Коль скоро (18) при $b = 3g/2$ и $\Delta_\perp\theta = 0$ обладает решениями типа квазимонохроматического импульса, из данного уравнения в пределе $\omega\tau_p \gg 1$ можно получить приближенное дифференциальное уравнение непосредственно для огибающей данного импульса. Пусть в рассматриваемой нами двухкомпонентной среде распространяются квазимонохроматические импульсы. В этом случае, очевидно, справедливо приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз. Представим электрическое поле импульса в виде

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{E}(z, \tau) \exp[i(\omega\tau - qz)] + \text{с.с.}, \quad (44)$$

где $\mathcal{E}(z, \tau)$ — медленно меняющаяся огибающая импульса. При этом

$$\left| \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau} \right| \ll \omega|\mathcal{E}|, \quad \left| \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} \right| \ll q|\mathcal{E}| \quad (45)$$

или $\omega\tau_p \gg 1$. С помощью многократного интегрирования по частям получим разложение

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{-\infty}^{\tau} \Omega_1 d\tau' = \\ &= \frac{2d_1}{\hbar} \left(\frac{\mathcal{E}}{i\omega} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau} + \frac{i}{\omega^3} \frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\tau^2} + \dots \right) + \text{с.с.} \quad (46) \end{aligned}$$

Роль характерного временного масштаба в данном случае играет обратная частота ω^{-1} . Тогда из (1), (2) следует, что

$$\omega_1^2 \ll \omega^2 \ll \omega_2^2. \quad (47)$$

В силу квазимонохроматичности импульса его спектральная ширина $\Delta\omega \ll \omega$. Поэтому, согласно (47), в спектре сигнала отсутствуют резонансные Фурье-компоненты. Следовательно, возбуждение атомов можно считать незначительным. Тогда справедливо представление $\sin\theta \approx \theta - \theta^3/6$. Подставляя затем (44) в (18), после использования (45), (46) получим нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$i\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial T^2} + \eta|\mathcal{E}|^2\mathcal{E} = \frac{c}{2n_0\omega}\Delta_{\perp}\mathcal{E}. \quad (48)$$

Здесь

$$T = \tau - \left(\frac{a}{\omega^2} + 3g\omega^2\right)z, \quad \mu = 3g\omega - \frac{a}{\omega^3},$$

$$\eta = \left(\frac{d_1}{\hbar}\right)^2 \left(b\omega - \frac{a}{2\omega^3}\right),$$

параметр q связан с частотой импульса соотношением $q = g\omega^3 - a/\omega$. При $\Delta_{\perp}\mathcal{E} = 0$ солитон огибающей уравнения (48) в лабораторной системе отсчета с учетом (44) имеет вид (42), где $E_m = \tau_p^{-1}\sqrt{2\mu/\eta}$, а выражения для v и $v_{ph} = \omega/k$ совпадают с (43). Заметим, что при получении (48) мы не использовали условие $d_1 = d_2$, а также условие близости значений данных величин. Поэтому для существования импульсов огибающей на параметры d_1 и d_2 не следует накладывать какие-либо специальные ограничения, как это имело место в случае ПКИ. Отметим, что уравнение (48) при $\Delta_{\perp}\mathcal{E} = 0$ является интегрируемым. Поэтому его решения для огибающей импульса являются солитонами в строгом смысле этого слова, которые ниже будем называть солитонами огибающей.

Из выражения для v следует, что солитон огибающей в равновесной среде ($a > 0$, $b > 0$ или $W_{1\infty} < 0$, $W_{2\infty} < 0$) меньше, чем c/n_0 .

Отметим, что параметры μ и η в (48) можно представить в виде [39]

$$\mu = \frac{k_2}{2}, \quad \eta = -\frac{\omega n_2}{c}, \quad (49)$$

где $k_2 = \partial^2 k / \partial \omega^2$ — показатель дисперсии групповой скорости, n_2 — нелинейный показатель преломления, определяемый соотношением

$$n(\omega) = n_l(\omega) + n_2|\mathcal{E}|^2, \quad (50)$$

$n(\omega)$ — общий показатель преломления, $n_l(\omega)$ — его линейная часть.

Из выражения для \mathcal{E}_m видно, что формирование солитонов типа (42) (вопрос о «темных» солитонах [39] мы здесь не затрагиваем) возможно при [39]

$$k_2 n_2 < 0. \quad (51)$$

Полагая $b = 3g/2$ ($d_1 = d_2$) в выражениях для μ и η , приходим к совпадению солитона огибающей для НУШ (47) при $\Delta_{\perp}\mathcal{E} = 0$ с бризером (39)–(41) при $\omega\tau_p \gg 1$. Подобный вывод для бризеров модифицированного уравнения КдВ и уравнения синус-Гордон был сделан ранее [39, 40]. Здесь заметим также, что $\eta = (1/2)(d_1/\hbar)^2\mu$ при $b = 3g/2$. В этом случае условие (51) выполняется автоматически, что приводит к возможности образования одномерных солитонов огибающей при любом исходном состоянии рассматриваемой среды. Данный пример с $d_1 = d_2$ лишний раз иллюстрирует тот факт, что солитон огибающей является предельным случаем бризера при $\omega\tau_p \gg 1$. В дальнейшем наряду с ПКИ будем интересоваться солитонами огибающей. Последние солитоны устойчивы по отношению к самофокусировке, если нелинейный показатель преломления n_2 , определенный согласно (49), (50), отрицателен [6]. В противном случае наступает самофокусировка или коллапс [6, 33, 41]. Согласно (51), условию (52) можно удовлетворить в области нормальной групповой дисперсии ($k_2 > 0$). Отсюда и из выражений для n_2 и k_2 получаем условие устойчивости квазимонохроматического солитона:

$$\max(\alpha/\omega^4 - 2\beta, \alpha/\omega^4 - 3\nu) < 0. \quad (52)$$

Здесь, пожалуй, уместно замечание относительно того, что условия (35) и (52) справедливы для пространственно-однородных сред.

4. АНАЛИЗ КОНКРЕТНЫХ СИТУАЦИЙ

Ниже исследуем возможность распространения предельно коротких и квазимонохроматических солитонов при различных начальных состояниях двухкомпонентной среды. Для удобства перепишем неравенства (35) и (52) непосредственно через микроскопические параметры сред, используя соответствующие выражения для α , β и ν (см. (15)). Тогда условие устойчивости ПКИ примет вид

$$-W_{1\infty}(\omega_1\tau_p)(\omega_2\tau_p)^3 - W_{2\infty} \left(1 + \frac{3}{2}\delta\right) \frac{N_2}{N_1} > 0 \quad (53)$$

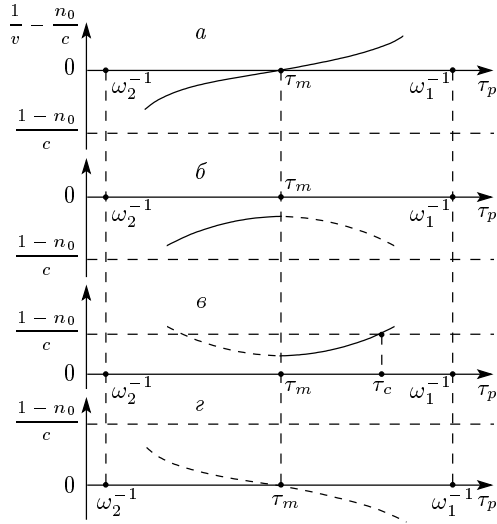


Рис. 2. Зависимость скорости солитоподобного ПКИ от его длительности: *a* — поглощающая среда; *б* — усиливающе-поглощающая среда; *в* — поглощающе-усиливающая среда; *г* — усиливающая среда. Сплошные кривые соответствуют устойчивым солитонам, штриховые — неустойчивым. Часть сплошной кривой, лежащая ниже $(1 - n_0)/c$ при $n_0 < 1$, соответствует $v > c$ (случай *в*)

(здесь и везде ниже пренебрегается степенями δ выше первой, так как считается $\delta \ll 1$). Критерии устойчивости солитона огибающей можно представить следующим образом:

$$\max \left[-W_{1\infty} \frac{\omega_1}{\omega} \left(\frac{\omega_2}{\omega} \right)^3 + 3W_{2\infty} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 \frac{N_2}{N_1}, -W_{1\infty} \frac{\omega_1}{\omega} \left(\frac{\omega_2}{\omega} \right) + 3W_{2\infty} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \frac{N_2}{N_1} \right] < 0. \quad (54)$$

Чтобы не загромождать дальнейшее изложение, в случае солитона огибающей анализ будем проводить при $d_2 > d_1$. Аналогичное рассмотрение при $d_2 < d_1$ не вызывает затруднений и не порождает принципиально новых выводов.

а) Поглощающая среда. В данном случае $W_{1\infty} = W_{2\infty} = -1/2$, тогда $a > 0$ и $g > 0$. Согласно (53), ПКИ абсолютно устойчив, а его скорость уменьшается с ростом длительности (см. (30), (37) и рис. 2). При этом $v > c/n_0$ ($n_0 > 1$), если

$$\tau_p < \tau_m \equiv \left[\left(1 + \frac{3\delta}{2} \right) \frac{N_2}{N_1 \omega_1 \omega_2^3} \right]^{1/4}.$$

Легко видеть, однако, что v не может превысить c , так как в противном случае нарушается неравенство (2). Солитон огибающей (42) устойчив, если его

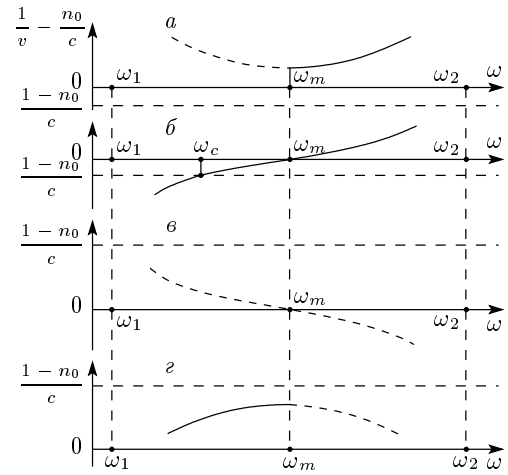


Рис. 3. Зависимость групповой скорости квазимонохроматического солитона от его несущей частоты. Случаи *a–г* и условные обозначения соответствуют рис. 2

частота удовлетворяет условиям $\omega_m^2 < \omega^2 \ll \omega_2^2$ (см. рис. 3 и условие (54)), где

$$\omega_m \equiv \left(\frac{a}{3g} \right)^{1/4} = \left(\frac{d_1^2 N_1}{3d_2^2 N_2} \omega_1 \omega_2^3 \right)^{1/4}.$$

Последним условиям можно удовлетворить при $\omega_m^2 \ll \omega_2^2$. Отсюда находим

$$\frac{3N_2}{N_1} \gg \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Так как $\omega_1 \ll \omega_2$, данное неравенство может быть выполнено, например, при $d_2 \sim d_1$ и $N_2 = N_1$. Групповая скорость солитона огибающей, согласно (48) и (2), также не превышает c .

Ниже среду с инвертированной 1-компонентой ($W_{1\infty} = 1/2$) и находящейся в основном состоянии 2-компонентой ($W_{2\infty} = 1/2$) будем называть усиливающе-поглощающей, в противоположном случае ($W_{1\infty} = -1/2, W_{2\infty} = 1/2$) — поглощающе-усиливающей. Известно, что время релаксации из возбужденного в основное состояние обратно пропорционально кубу частоты соответствующего квантового перехода [5]. Поэтому 1-компонента значительно дольше, чем 2-компонента, способна находиться в состоянии с инверсной населенностью. При $d_1 \approx d_2$ справедлива оценка

$$\frac{T_{R1}}{T_{R2}} \sim \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^3 \gg 1,$$

где T_{R1} (T_{R2}) — время жизни атома 1 (2) в инвертированном состоянии. Среду, для которой $W_{1\infty} = W_{2\infty} = 1/2$, ниже назовем усиливающей.

б) Усиливающе-поглощающая среда ($W_{1\infty} = 1/2$, $W_{2\infty} = -1/2$ или $a < 0$, $g > 0$). В этом случае ПКИ, как видно из (53), устойчив, если $\omega_2^{-1} \ll \tau_p < \tau_m$ (рис. 2). При этом его скорость не может превосходить c . Покажем это. Условие $v > c$ для ПКИ (37) можно записать следующим образом:

$$\frac{n_0 - 1}{c} + a\tau_p^2 - \frac{(1 + \delta)g}{\tau_p^2} < 0. \quad (55)$$

Аналогичное условие для солитона огибающей, как следует из (43), имеет вид

$$\frac{n_0 - 1}{c} + \frac{a}{\omega^2} + 3g\omega^2 < 0. \quad (56)$$

В целях простоты везде ниже будем считать, что n_0 мало отличается от единицы, т.е. $8\pi d^2 N_2 / \hbar \omega_2 \ll 1$ (см. (15)). Тогда $n_0 \approx 1 - 8\pi d_2^2 N_2 W_{2\infty} / \hbar \omega_2$. Для ПКИ условия (55) и (53) в случае усиливающе-поглощающей среды записываются соответственно в виде

$$(\omega_2 \tau_p)^2 > \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \frac{N_2 \omega_2}{N_1 \omega_1}$$

и

$$(\omega_2 \tau_p)^4 < \left(1 + \frac{3\delta}{2}\right) \frac{N_2 \omega_2}{N_1 \omega_1}.$$

В силу (2) данные неравенства не могут быть совместными. Поэтому скорость ПКИ $v < c$. Заметим, что в отсутствие 2-компоненты ($N_2 = 0$) условие (53) определяет устойчивость солитонов уравнения синус-Гордон. Тогда, как видно из (53), при $W_{1\infty} > 0$ данные солитоны неустойчивы, что согласуется с результатами численного эксперимента [1].

Иначе обстоит дело с групповой скоростью солитона огибающей. Согласно (54), в усиливающе-поглощающей среде он абсолютно устойчив (рис. 3). Если принять во внимание (2), то из (56), легко получается условие того, что $v > c$:

$$\omega^2 < \frac{3\omega_m^4}{\omega_2^2} = \frac{d_1^2 N_1}{d_2^2 N_2} \omega_1 \omega_2 \equiv \omega_c^2.$$

Так как согласно (1) $\omega^2 \gg \omega_1^2$, то $d_1^2 N_1 / d_2^2 N_2 \gg \omega_1 / \omega_2$. Последнему неравенству легко удовлетворить при $d_1 \sim d_2$, $N_1 = N_2$.

в) Поглощающе-усиливающая среда ($W_{1\infty} = -1/2$, $W_{2\infty} = 1/2$ или $a > 0$, $g < 0$). В этом случае солитон огибающей абсолютно неустойчив (см. (54)). В то же время ПКИ устойчивы при условии $\tau_m < \tau_p \ll \omega_1^{-1}$ (см. (53) и (2)). Если к тому же

$$\tau_m < \tau_p < \tau_c = \tau_m \left(\sqrt{Q} + \sqrt{Q-1} \right)^{1/2}, \quad (57)$$

где $Q = (1 - \delta/2)N_2\omega_2/4N_1\omega_1$, то $v > c$. Как видно из (37), τ_m соответствует длительности импульса, при которой его скорость максимальна:

$$v_{max} = \frac{c}{1 - \sigma}, \quad \sigma = \frac{4\pi d_2^2 N_2}{\hbar \omega_2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{Q}}\right).$$

Обязательное условие $Q > 1$ совместно с неравенством $\tau_p > \tau_m$ можно записать как

$$4 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \frac{\omega_1}{\omega_2} < \frac{N_2}{N_1} < \left(1 - \frac{3\delta}{2}\right) (\omega_1 \tau_p)(\omega_2 \tau_p)^3.$$

Взяв, например, $\delta = 0$, $\omega_1 \tau_p = 0.2$, $\omega_2 \tau_p = 5$ (см. (1), (2)), получим

$$0.16 < N_2/N_1 < 25.$$

Таким образом, если инвертирована 2-компонента, а 1-компонента находится в основном состоянии, условие $v > c$ не противоречит исходным положениям (1) и (2). На рис. 2в показана зависимость скорости солитона от его длительности в данном случае. Участок $\tau_m < \tau_p < \tau_c$ соответствует устойчивому сверхсветовому солитону.

г) Усиливающая среда ($W_{1\infty} = W_{2\infty} = 1/2$ или $a < 0$, $g < 0$). Из (53) следует, что ПКИ абсолютно неустойчив. Область устойчивости солитона огибающей, как видно из (54) и (1), определяется двойным неравенством $\omega_1^2 \ll \omega^2 < (d_1/d_2)\omega_m^2$ (рис. 3). При этом групповая скорость солитона огибающей, выражаемая с помощью (43), превышает скорость света в вакууме. Условие $(d_1/d_2)\omega_m^2 \gg \omega_1^2$, необходимое для формирования солитона огибающей в усиливающей двухкомпонентной нерезонансной среде, перепишем в виде (см. выражение для ω_m)

$$\frac{3d_2^2 N_2}{d_1^2 N_1} \ll (\omega_2/\omega_1)^3.$$

Данному неравенству легко удовлетворить, например, при $d_2 \sim d_1$, $N_2 \approx N_1$, так как согласно (1) и (2), $\omega_2 \gg \omega_1$. Важно заметить, что при наличии только второй компоненты ($N_1 = 0$) устойчивых ПКИ в усиливающей среде не существует. Следует подчеркнуть, что наши выводы относятся к нерезонансным импульсам, и поэтому они несколько разнятся с соответствующими выводами для импульсов, распространяющихся в резонансно-усиливающих средах [18–20, 30]. Отметим также, что для устойчивых солитонов огибающей характерно увеличение групповой скорости с укорочением их длительностей (рис. 2), что согласуется с общими представлениями о солитонных свойствах. В то же время

групповая скорость устойчивых солитонов огибающей уменьшается с ростом их частоты заполнения. Последний вывод подтверждает тот факт, что солитоны НУШ устойчивы в однородных средах с нормальной групповой дисперсией.

Обсудим подробнее локализованные решения, соответствующие сверхсветовым групповым скоростям.

На возможность сверхсветового распространения в усиливающих средах оптических резонансных импульсов было обращено внимание в серии работ [42–46]. Следует подчеркнуть, что речь идет именно о групповой скорости.

Сверхсветовое распространение вызвано невозможностью пространственной локализации движущегося объекта [2]. Экспоненциально возрастающий передний фронт импульса, находящийся далеко от его центра, вызывает индуцированное излучение атомов инвертированной среды. В результате энергия центра переходит в энергию переднего фронта, образуя новый центр. Прежний центр поглощается перешедшими в основное состояние атомами, что приводит к их возвращению в возбужденное состояние. В [45] данный механизм сверхсветового распространения назван переформированием (reshaping), а в [1] приведено его подробное и наглядное обсуждение. Таким образом, изменяется профиль импульса из-за запасенной в среде энергии, и именно этот профиль перемещается со сверхсветовой скоростью [1, 42, 43, 45]. В результате не приходится говорить о нарушении принципа причинности.

В нашем случае локальное изменение профиля импульса связано с участием большого числа частиц, а потому является коллективным процессом. Сами фотоны в промежутках между атомами движутся со скоростью c . Однако локальное усиление (увеличение концентрации фотонов), более сильно проявляющееся на переднем участке экспоненциально-локализованного импульса, приводит к тому, что профиль последнего распространяется быстрее, чем образующие его фотоны. Вывод о том, что сгустки большого числа частиц могут перемещаться со сверхсветовыми скоростями без нарушения принципа причинности, был сделан также в [47].

Здесь важно заметить, что с профилем импульса связана такая его важнейшая физическая характеристика, как электрическое поле, которое возбуждает среду (см. (32)) и формирует в ней индуцированную поляризацию. Поэтому возбуждения среды также распространяются со сверхсветовой скоростью. В качестве коллективных возбуждений в нашем случае выступают поляритоны. Поэтому можно

сказать, что сверхсветовой солитон (или солитрон) представляет собой сгусток взаимодействующих поляритонов (или в случае ПКИ поляритонный конденсат (см. разд. 4)), групповая скорость которых в неравновесной среде превышает скорость света в вакууме.

То обстоятельство, что неравновесные состояния сред неустойчивы (т. е. обладают конечным временем жизни), говорит о том, что сверхсветовые импульсы лишь условно можно назвать устойчивыми. Об устойчивости данных импульсов можно говорить, пока время их распространения τ_{prop} через среду много меньше времен релаксации T_{R_1} и T_{R_2} обеих компонент среды в равновесное состояние. Выше было отмечено, что $T_{R_2} \ll T_{R_1}$, так как $\omega_1 \ll \omega_2$. Поэтому в случае в) (см. разд. 4) должно выполняться условие $\tau_{prop} \ll T_{R_2}$. В то же время $\tau_{prop} \leq l_m/c$ (l_m — размер образца среды в направлении распространения импульса). Отсюда $l_m \ll cT_{R_2}$. Взяв в случае поглощающе-усиливающей среды $T_{R_1} \sim 10^{-8}$ с, приходим к выводу, что сверхсветовой ПКИ можно наблюдать в среде с $l_m \ll 3$ м. Полагая также $\omega_1 \sim 10^{13}$ с $^{-1}$, $\omega_2 \sim 10^{15}$ с $^{-1}$, найдем, что условиям (1) и (2) можно удовлетворить при $\tau_p \sim 10^{-14}$ с. Несколько более впечатляющей, на первый взгляд, выглядит ситуация для сверхсветовых солитонов огибающей. Как отмечалось выше, $T_{R_1}/T_{R_2} \sim (\omega_2/\omega_1)^3$ при $d_1 \approx d_2$. Тогда, если $\omega_2/\omega_1 \sim 10^2$ и $T_{R_2} \sim 10^{-9}$ – 10^{-8} с, имеем $T_{R_1} \sim 10^{-3}$ с. Если исходное состояние среды таково, что она является усиливающе-поглощающей (случай б) в разд. 4), то значение l_m может достигать сотен километров. К тому же диапазон изменения частоты солитонов огибающей достаточно широк: $\omega_1^2 \ll \omega^2 \ll \omega_2^2$. Однако возникает проблема, каким образом в таком случае на протяжении всей среды одновременно создать инвертированное состояние 1-компоненты. Заметим также, что рассмотренные здесь сверхсветовые объекты должны сформироваться в среде, что требует определенного времени.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный в настоящей работе анализ позволяет заключить, что двухкомпонентность среды принципиальным образом сказывается на возможностях распространения в ней широкополосных предельно коротких импульсов и нерезонансных солитонов огибающей. Полученное здесь уравнение Конно–Камеямы–Сануки (18) есть еще один пример

интегрируемой модели (при $\Delta_{\perp}\theta = 0$), вытекающей из исходной системы типа Максвелла–Блоха. Уравнение Конно–Камеямы–Сануки интегрируемо при равенстве дипольных моментов переходов в обеих атомных компонентах. В этой связи заметим, что в [9] была доказана интегрируемость редуцированной системы Максвелла–Блоха в присутствии неоднородного уширения. Учет последнего также приводится при равенстве дипольных моментов для всех частот из контура переходов неоднородно-уширенной линии. Два принимаемых здесь во внимание перехода с сильно различающимися собственными частотами (отвлекаясь от их различной физической природы) можно рассматривать как две компоненты из противоположных крыльев контура неоднородного уширения. Тогда, казалось бы, задача сводится к уже решенной в [9]. Следует, однако, помнить, что при выводе (18) нигде не используется приближение малой атомной концентрации, как это имеет место в случае редуцированной системы Максвелла–Блоха. Условия (16) и (17) являются в этом смысле гораздо более слабыми, чем соответствующие условия, необходимые для получения редуцированной системы из полной системы Максвелла–Блоха. Скорее всего здесь справедливо другое предположение, выдвинутое в [48], о том, что уравнения, полученные из исходной, вообще говоря, неинтегрируемой системы с помощью предельных процедур, в некотором смысле интегрируемы. При получении (18) из исходной (неинтегрируемой) системы (3)–(5), (6), (8) нами действительно использованы предельные процедуры, согласующиеся с условиями (1), (2) и приближением однонаправленного распространения.

Рассмотренная здесь вариационная процедура для нахождения критерия устойчивости ПКИ позволяет свести уравнения для варьируемых импульсных параметров к системе уравнений движения идеальной жидкости. Столь же изящная процедура хорошо проявляет себя и в случае солитонов огибающей [33]. Распространение данного метода на бризероподобные решения, вмещающие внутри себя порядка одного или нескольких электромагнитных колебаний, наталкивается на трудности математического характера. Поэтому здесь, видимо, целесообразен поиск альтернативных подходов, определяющих устойчивость таких бризерных решений. Подобное исследование, помимо сугубо научного, имеет и прикладной интерес в связи с возможным использованием импульсов из нескольких периодов колебаний в волоконной оптике [23].

Спонтанное излучение с переходом атомов в

основное состояние является необратимым процессом. В этой связи неустойчивость неравновесного состояния среды и возможность распространения в ней электромагнитных импульсов с групповыми скоростями $v > c$ оставляют открытым вопрос о связи между необратимостью релаксационных процессов и существованием сверхсветовых волновых объектов [49, 50], не ставящим под сомнение фундаментальный принцип причинности.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 00-02-17436а), а также CRDF (грант 6104).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Ораевский, УФН **168**, 1311 (1998).
2. А. Ю. Андреев, Д. А. Киржниц, УФН **166**, 1135 (1996).
3. P. C. Becker, H. L. Fragnito, J. Y. Bigot et al., Phys. Rev. Lett. **63**, 505 (1989).
4. J. T. Darrow, B. B. Hu, X. C. Chang, and D. H. Auston, Opt. Lett. **15**, 323 (1990).
5. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
6. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, Москва (1996).
7. S. L. Mc Call and E. L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).
8. P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, J. Phys. A **6**, L53 (1973).
9. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, J. Phys. A **6**, 1337 (1973).
10. A. I. Maimistov, A. M. Basharov, S. O. Elyutin, and Yu. M. Sklyarov, Phys. Rep. **191**, 1 (1990).
11. A. Kujawski, Z. Phys. B **85**, 129 (1991).
12. А. В. Андреев, ЖЭТФ **108**, 796 (1995).
13. A. I. Maimistov and S. O. Elyutin, Chaos, Solitons and Fractals **8**, 369 (1997).
14. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990).
15. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущуповский, ЖЭТФ **100**, 762 (1991).
16. A. I. Maimistov and S. O. Elyutin, J. Mod. Opt. **39**, 2201 (1992).

17. А. И. Маймистов, *Опт. и спектр.* **76**, 636 (1994).
18. А. В. Андреев, П. В. Полевой, *ЖЭТФ* **106**, 1343 (1994).
19. A. V. Andreev and P. V. Polevoy, *Proc. SPIE* **3239**, 105 (1997).
20. Ю. В. Кистенев, Ю. Н. Пономарев, А. В. Шаповалов, *КЭ* **29**, 56 (1999).
21. Д. Н. Клышко, *Физические основы квантовой электроники*, Наука, Москва (1986).
22. С. А. Козлов, *Опт. и спектр.* **79**, 290 (1995).
23. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **111**, 404 (1997).
24. А. Н. Азаренков, Г. Б. Альтшулер, Н. Р. Белашенков, С. А. Козлов, *КЭ* **20**, 733 (1993).
25. N. Bloembergen, H. Lotem, and R. T. Linch, *Indian J. Pure and Appl. Phys.* **16**, 151 (1978).
26. A. M. Kosevich and A. S. Kovalev, *Sol. St. Comm.* **12**, 763 (1973).
27. Ф. Калоджеро, А. Дегасперис, *Спектральные преобразования и солитоны*, Мир, Москва (1985).
28. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).
29. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **107**, 20 (1995).
30. Дж. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, Москва (1983).
31. К. Коппо, W. Kameyama, and H. Sanuki, *J. Phys. Soc. Jap.* **37**, 171 (1974).
32. Л. А. Большов, Т. К. Кириченко, В. В. Лиханский и др., *ЖЭТФ* **86**, 1240 (1984).
33. Ж. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991).
34. D. Anderson, *Phys. Rev. A* **27**, 3135 (1983).
35. В. А. Миронов, *ЖЭТФ* **116**, 35 (1999).
36. A. S. Desyatnikov and A. I. Maimistov, *Proc. SPIE* **4061**, 193 (2000).
37. E. Schloman, *Appl. Phys. Lett.* **19**, 274 (1971).
38. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, А. Л. Сукстанский, *Письма в ЖЭТФ* **27**, 226 (1978).
39. А. В. Ведерко, О. Б. Дубровская, В. Ф. Марченко, А. П. Сухоруков, *Вестник МГУ, сер. 3: физ. астр.* **33**, 4 (1992).
40. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва, 1988.
41. В. С. Львов, *Нелинейные спиновые волны*, Наука, Москва (1987).
42. Н. Г. Басов, Р. В. Амбарцумян, В. С. Зуев, П. Г. Крюков, В. С. Летохов, *ЖЭТФ* **50**, 23 (1966).
43. Д. А. Киржниц, В. Н. Сазонов, в сб. *Эйнштейновский сборник 1973*, под ред. В. Л. Гинзбурга, Наука, Москва (1974), с. 84.
44. С. А. Бладман, М. А. Рудерман, в сб. *Эйнштейновский сборник 1973*, под ред. В. Л. Гинзбурга, Наука, Москва (1974), с. 190.
45. R. Y. Chiao, A. E. Kozhokin, and G. Kurizki, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1254 (1996).
46. Г. Курицки, А. Е. Кожекин, А. Г. Кофман, М. Блаубор, *Опт. и спектр.* **87**, 551 (1999).
47. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, в *Эйнштейновский сборник 1972*, под ред. В. Л. Гинзбурга и Г. Н. Наана, Наука, Москва (1974), с. 212.
48. Ф. Калоджеро, в сб. *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, под ред. В. Г. Барьяхтара, В. Е. Захарова, В. М. Черноусенко, Научная думка, Киев (1990), с. 65.
49. Я. П. Терлецкий, *Парадоксы теории относительности*, Наука, Москва (1966).
50. Б. Б. Кадомцев, *Динамика и информация*, Редакция УФН, Москва (1999).