

ДИНАМИКА СОЛИТОНА В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С РАЗНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ СРЕДАМИ

*А. А. Заболотский**

*Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 3 августа 2000 г.

Для анализа динамики импульсов в оптической системе, состоящей из периодической последовательности нелинейных сред, применяется композиционная модель, включающая модель резонансного взаимодействия ультракороткого импульса света с энергетическим переходом среды с учетом накачки верхнего уровня и почти интегрируемую модель, описывающую распространение светового поля в другой среде с кубической нелинейностью и дисперсией. Дополнительно учитываются потери и другие виды взаимодействия в виде возмущающих членов. На основе метода обратной задачи рассеяния и теории возмущений развит простой метод исследования особенностей эволюции солитонов в такой периодической системе. С его помощью описаны различные режимы эволюции солитона в такой системе, в том числе хаотическая динамика.

PACS: 42.65.Tg, 42.65.Hw, 42.65.Dr, 42.65.Re

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучению генерации солитонов в нелинейной оптике, в том числе и в рамках полностью интегрируемых моделей, посвящено значительное число работ (см., например, [1] и обзор [2]). Применение интегрируемых моделей, как правило, требует наложения ряда физических ограничений, однако на практике в рамках этих моделей удается наиболее детально описать эволюцию ультракоротких импульсов в нелинейных средах. К тому же точные решения этих моделей применяются для тестирования численных расчетов нелинейных эволюционных процессов.

Зачастую техника, используемая для генерации ультракоротких импульсов в оптике, включает в себя разные нелинейные и линейные среды. В одних средах происходит генерация импульса и его усиление, в других — сжатие и образование формы импульса, удобной для дальнейших приложений. Примером такой системы может быть однопроходный двухуровневый лазерный усилитель с дополнительной нелинейной средой в виде волоконно-оптического световода, а также лазерная установка с кольцевым резонатором.

Исследованию динамики импульсов в таких системах посвящены многочисленные работы. В то же время ряд нелинейно-оптических явлений остаются недостаточно исследованными, это обусловлено в том числе и отсутствием достаточно простых и эффективных теоретических методов анализа.

В настоящей работе предлагается метод анализа динамики солитона в среде, состоящей из последовательности сред с разными нелинейно-оптическими свойствами. В методе используются «робастные» свойства солитонных мод и теория возмущений, развитая для почти интегрируемых систем уравнений [3, 4]. С этой целью конструируется модель, составленная из интегрируемых моделей, описывающих эволюцию полей на непересекающихся, состыкованных интервалах, и изучаются ее свойства. Будем называть такого рода модели «составными», чтобы отличать их от моделей, объединяющих интегрируемые модели на совпадающих интервалах. К последним моделям относится, в частности, объединение системы уравнений Максвелла–Блоха двухуровневой среды и нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) для одной бесконечной среды [2, 5]. Особенности эволюции солитонов в составных моделях, насколько нам известно, теоретически не исследовались.

*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

Часто НУШ применяется для анализа эффектов распространения ультракоротких солитонов в волоконных световодах [6]. Устойчивые импульсы поля в такой среде возникают вследствие баланса между действием дисперсии и нелинейности. Для компенсации потерь, возникающих при распространении солитона в световоде, используются различные механизмы, в том числе связанные с усилением импульсов на конечных интервалах световода, расположенных периодически по его длине. Усиление солитона происходит, например, при прохождении конечной двухуровневой среды с частотой перехода близкой к несущей частоте солитона. Если на верхний уровень осуществляется внешняя накачка, то вследствие нелинейного взаимодействия в резонансной среде возрастает амплитуда солитона. Этот процесс также может быть описан в рамках интегрируемой системы уравнений Максвелла–Блоха с учетом накачки, зависящей только от пространственной переменной [7].

В работе в качестве примера приложения подхода рассматривается распространение солитона в периодической среде, состоящей из чередующейся последовательности резонансных сред и сред с кубичной нелинейностью и дисперсией. В качестве последней среды может быть волоконный световод. На этом примере показано, что предлагаемый подход позволяет исследовать различные режимы динамики солитона. Предполагается, что форма оптического импульса описывается солитонным решением НУШ. Изменение параметров солитона в световоде описывается в рамках теории возмущений для модели близкой к интегрируемой в предположении, что отличие эволюционного уравнения от НУШ мало. Эволюция солитона в усиливающей резонансной среде описывается в рамках системы уравнений Максвелла–Блоха, интегрируемой в рамках метода обратной задачи рассеяния. Солитон в этой среде ассоциируется с явлением самоиндуцированной прозрачности [2]. Существование устойчивого солитона (2π -импульса), который является и солитоном самоиндуцированной прозрачности, и НУШ, в модели, объединяющей уравнения Максвелла–Блоха и НУШ, теоретически и экспериментально доказано в работах [8, 9].

В разд. 2 приводится общая структура составной интегрируемой модели и граничных условий. Физическая модель и метод ее решения описаны в разд. 3. В разд. 4 проведено исследование динамики солитона для этой модели, которое сведено к изучению дискретного отображения. Описаны разные режимы распространения солитона.

2. СОСТАВНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ

Опишем общую структуру интегрируемой модели, составленной из N интегрируемых моделей (некоторые из них могут совпадать). Пусть составная интегрируемая модель является условием совместности следующих линейных систем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\tau, z; \lambda) = L(\tau, z; \lambda) \psi(\tau, z; \lambda), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \psi(\tau, z; \lambda) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_{i,i+1}(z) A_i(\tau, z; \lambda) \psi(\tau, z; \lambda) = \mathcal{A} \psi, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\alpha_{i,i+1}(z) = \theta(z - z_i) \theta(-z + z_{i+1}), \quad z_{i+1} > z_i.$$

Здесь $\theta(z)$ — ступенчатая функция: $\theta(z) = 0$ при $z \leq 0$, $\theta(z) = 1$ при $z > 0$; $\alpha_{i,i+1}(z)$ — проекторы, т. е. $\alpha_{i,i+1}^2(z) = \alpha_{i,i+1}(z)$.

Условие совместности этих линейных систем имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} L - \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{i=1}^N \alpha_{i,i+1}(z) A_i + \\ + \left[L, \sum_{i=1}^N \alpha_{i,i+1}(z) A_i \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Умножая (3) на $\alpha_{i,i+1}$, находим

$$\frac{\partial}{\partial z} L - \frac{\partial}{\partial \tau} A_i + [L, A_i] = 0, \quad z \in [z_i, z_{i+1}]. \quad (4)$$

Таким образом, эволюция в полосе $[z_i, z_{i+1}]$, $\forall \tau$ описывается системой уравнений, имеющей представление Лакса в виде линейных систем $\partial_\tau \psi = L \psi$, $\partial_z \psi = A_i \psi$.

В настоящей работе будут исследоваться составные модели с представлением Лакса вида (1), (2) для $-\infty < \tau < \infty$. Особенности применения метода обратной задачи рассеяния к составным моделям проявляются при нахождении зависимости параметров рассеяния от переменной z .

Считаем, что поле на бесконечностях ($\tau \rightarrow \pm\infty$) отсутствует. Для рассматриваемого ниже примера это означает, что асимптотики матрицы L имеют вид

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} L(\tau, z; \lambda) = -i\sigma_3 \lambda. \quad (5)$$

Два решения уравнений (1), (2) ψ, ϕ связаны матрицей рассеяния \mathcal{T} :

$$\psi(\tau, z; \lambda) = \phi(\tau, z; \lambda)\mathcal{T}(z; \lambda). \quad (6)$$

Из свойств симметрии конкретной спектральной задачи, описанной в разд. 3 (см. ниже (18)), следует, что матрица рассеяния имеет вид

$$\mathcal{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \bar{b}(\lambda) \\ -b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Найдем зависимость коэффициентов a , \bar{b} от z для условий (5). Используя (6), находим

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{T}(z; \lambda) = \tilde{A}^+\mathcal{T}(z; \lambda) - \mathcal{T}(z; \lambda)\tilde{A}^-, \quad (8)$$

где

$$\tilde{A}^\pm(z; \lambda) = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} E^{-1}(\tau; \lambda)A(\tau, z; \lambda)E(\tau, \lambda), \\ E = \exp(-i\sigma_3\lambda\tau).$$

Введем в рассмотрение функции

$$\mathcal{B}(y, z) = \int_0^z E^{-1}(y; \lambda) \times \\ \times \sum_{i=1}^N \alpha_i(z)A_i(y, \zeta; \lambda)E(y; \lambda)d\zeta, \\ \mathcal{B}_i(y, z) = \int_{z_i}^z E^{-1}(y; \lambda)A_i(y, \zeta; \lambda)E(y; \lambda)d\zeta, \\ z_i \leq z < z_{i+1}.$$

Введем матрицу $\mathcal{T}_i = \theta(z - z_i)\theta(z_{i+1} - z)\mathcal{T}$ — проекцию матрицы \mathcal{T} на интервал $[z_i, z_{i+1}]$. Формальное решение уравнения (8) для интервала $(-\tau_f < \tau < \tau_f)$ имеет вид

$$\mathcal{T}_{i+1}(z; \lambda) = \exp[\mathcal{B}(\tau_f, z)]\mathcal{T}_1(0, \lambda)\exp[-\mathcal{B}(-\tau_f, z)] = \\ = \exp[\mathcal{B}_i(\tau_f, z)]\mathcal{T}_i(z_i, \lambda)\exp[-\mathcal{B}_i(-\tau_f, z)] = \\ = \exp[\mathcal{B}_i(\tau_f, z)] \dots \exp[\mathcal{B}_1(\tau_f, z)]\mathcal{T}_1(z_1; \lambda) \times \\ \times \exp[-\mathcal{B}_1(-\tau_f, z)] \dots \exp[-\mathcal{B}_i(-\tau_f, z)]. \quad (9)$$

Из этого решения следует, что эволюция $\mathcal{T}_i(z, \lambda)$ на интервале $[z_i, z_{i+1}]$ определяется формулой (9) с граничным условием $\mathcal{T}(z_i, \lambda)$.

Для условий (5) и $\tau_f \rightarrow \infty$ решение уравнения (8) имеет вид

$$\mathcal{T}(z) = \mathcal{N}_+ \mathcal{T}_0 \mathcal{N}_-, \\ \mathcal{N}_\pm = \exp \left[-i\sigma_3 \int_0^z \sum_{i=1}^N \alpha_{i,i+1}(s) \times \right. \\ \left. \times \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} (A_i)_{11}(\tau, s; \lambda) ds \right], \quad (10)$$

где \mathcal{T}_0 — значение матрицы \mathcal{T} при $z = 0$, которое определяется решением спектральной задачи (1). Отсюда можно найти зависимость коэффициента $C_0(z; \lambda_0) = \bar{b}(\lambda)/a'(\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}$ от z , где λ_0 — изолированный полюс в верхней полуплоскости комплексной плоскости λ :

$$C_0(z; \lambda_0) = C_0(0; \lambda_0) \exp \left[-2i \int_0^z \sum_{i=1}^N \alpha_{i,i+1}(s) \times \right. \\ \left. \times \lim_{\tau \rightarrow -\infty} (A_i)_{11}(\tau, s; \lambda_0) ds \right]. \quad (11)$$

3. ФИЗИЧЕСКИЙ ПРИМЕР СОСТАВНОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим модель самоиндуцированной прозрачности в двухуровневой среде в условиях одночастотного резонанса на интервале $[Z_1 = 0, Z_2]$, $Z_2 > 0$ и волоконно-оптический волновод, расположенный на интервале $[Z_2, Z_3]$, Z — пространственная координата. Динамика среды и поля в первой среде описывается моделью Максвелла–Блоха с учетом накачки верхнего уровня, а динамика поля в световоде — НУШ (см., например, [2]). Ниже для простоты рассматривается случай точного резонанса. Учет неоднородного уширения не приводит к принципиальным изменениям результатов. Составная модель имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial T} + \frac{\partial E}{\partial Z} + \alpha_{23}(Z)iD\frac{\partial^2 E}{\partial T^2} + \alpha_{23}(Z) \cdot 2iB|E|^2 E = \\ = -\alpha_{12}(Z)iGP + \alpha_{23}(Z)W, \quad (12)$$

$$\alpha_{12}(Z)\frac{\partial P}{\partial T} = -\alpha_{12}(Z)i\frac{\mu_0}{h}EN, \quad (13)$$

$$\alpha_{12}(Z)\frac{\partial N}{\partial T} = -\alpha_{12}(Z)\frac{i}{2h}(EP^* - E^*P) + \tilde{C}, \quad (14)$$

$N_0^2(z) = N^2 + |P|^2$, T — временная переменная, скорость света равна единице; $G = 2\pi k_0$, k_0 — несущий волновой вектор; N, P — соответственно разность заселенностей уровней и поляризация среды, N_0 — общее число частиц. Физические значения коэффициентов B, D приводятся, например, в [2, 6]; $\alpha_{ij}(Z) = \theta(Z - Z_i)\theta(-Z + Z_j)$, $Z_i < Z_j$, $\theta(Z) = 0$, $Z \leq 0$, $\theta(Z) = 1$ при $Z > 0$. Здесь $\alpha_{ij}(Z)$ — проектор, присутствие которого в виде множителя означает, что второй и третий члены в левой части уравнения (12) ненулевые на интервале $[Z_2, Z_3]$, поляризация в правой части (12) ненулевая и уравнения

(13), (14) действуют на интервале $[Z_1, Z_2]$; $\tilde{C}(Z)$ — величина, характеризующая накачку верхнего уровня среды; $W = W(E, T, Z)$ — возмущение, которое может включать разные эффекты, такие как линейные и нелинейные потери, дисперсия, комбинационное взаимодействие и пр.

Пусть $W = 0$. Будем изучать две ситуации.

1) Полностью интегрируемая совместная модель. Этот случай требует наложения жесткого условия на физические константы.

2) Уравнения (12)–(14) — две разные интегрируемые модели (случай $\beta \neq 1$ см. ниже).

Возмущение ($W \neq 0$) будет учитываться в адиабатическом приближении, при котором влияние возмущения сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которым подчиняется спектральный параметр, характеризующий солитонное решение модели (12)–(14).

Решение, полученное в первом случае, будет служить основой для приближений, используемых при изучении второго случая.

Особенность этой составной модели состоит в возможности учета накачки (пропорциональной \tilde{C}) без потери интегрируемости модели Максвелла–Блоха. Это свойство позволяет исследовать разнообразные режимы распространения солитонов, включая хаотические, используя точное солитонное решение для произвольного \tilde{C} в качестве «робастной» нелинейной моды.

Перейдем к другим координатам:

$$T \rightarrow t = \alpha(T - Z) = \sqrt{\frac{D}{B}}(T - Z),$$

$$Z + T \rightarrow z = \frac{Z}{G}.$$

Рассматриваем далее случай периодической последовательности сред, отвечающих уравнениям Максвелла–Блоха и НУШ. Пусть поле \mathcal{E} теперь проходит через периодическую среду, состоящую из резонансной среды, занимающей интервал $[z_1 + nL, z_2 + nL]$, и световода, расположенного на интервале $[z_2 + nL, z_3 + nL]$, где $L = z_3 - z_1$ — период среды.

Приводим систему (12)–(14) к виду

$$\partial_\zeta Q + G \alpha_{1,2}(z - nL)R_+ + i\alpha_{2,3}(z - nL) \times [\partial_\tau^2 \mathcal{E} + 2|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} - \mathcal{W}] = 0, \quad (15)$$

$$\alpha_{1,2}(z - nL) (\partial_\tau R_+ - R_3 \mathcal{E}) = 0, \quad (16)$$

$$\alpha_{1,2}(z - nL) \left[\partial_\tau R_3 + \frac{1}{2}(R_+^* \mathcal{E} + R_+ \mathcal{E}^*) - c \right] = 0, \quad (17)$$

$$Q = \mathcal{E}, \quad \tau = t, \quad \zeta = z, \quad z \in [z_2 + nL, z_3 + nL],$$

$$Q = \beta \mathcal{E}, \quad \tau = \beta t, \quad \zeta = z\beta, \quad z \in [z_1 + nL, z_2 + nL].$$

Здесь

$$\beta^2 = \frac{\mu_0 D^{1/2}}{\hbar B^{1/2}}, \quad c(z) = \frac{\tilde{C}(z)}{\beta}, \quad \mathcal{W} = \frac{W}{G},$$

$\alpha_{ij}(z) = \theta(z - z_i)\theta(-z + z_j)$, $z_j > z_i$, $\theta(z) = 0$, $z \leq 0$, $\theta(z) = 1$, $z > 0$. Учтено, что возмущение \mathcal{W} действует на интервале $[z_2 + nL, z_3 + nL]$ и накачка, пропорциональная c , — на интервале $[z_1 + nL, z_2 + nL]$.

Если $\mathcal{W} = 0$, $\beta = 1$, то система (15)–(17) представлена в виде условия совместности двух линейных систем уравнений:

$$\partial_\tau \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda & Q \\ Q & i\lambda \end{pmatrix} \Phi, \quad (18)$$

$$\partial_\zeta \Phi = \frac{iG\alpha_{1,2}(z - nL)}{4\lambda} \begin{pmatrix} R_3 & -R_+ \\ -\bar{R}_+ & -R_3 \end{pmatrix} \Phi + \alpha_{2,3}(z - nL) \begin{pmatrix} -iH_{11} & H_{12} \\ H_{21} & iH_{11} \end{pmatrix} \Phi. \quad (19)$$

Здесь λ — спектральный параметр, удовлетворяющий уравнению $\partial_z \lambda = -c/(4\lambda)$,

$$H_{11} = 2\lambda^2 - |\mathcal{E}|^2, \quad H_{12} = 2\lambda \mathcal{E} + i\partial_\tau \mathcal{E},$$

$$H_{21} = 2\lambda \bar{\mathcal{E}} - i\partial_\tau \bar{\mathcal{E}}.$$

Для $\beta = 1$ эта совместная система полностью интегрируема. Однако условие $\beta = 1$ приводит к жестким ограничениям на физические параметры. В случае $c = 0$ представление Лакса для невозмущенной модели (15)–(17), т.е. для $\mathcal{W} = 0$, выглядит аналогично известному представлению для модели, объединяющей уравнения Максвелла–Блоха и НУШ на одном интервале (см. [2, 5]). При $\beta \neq 1$ приведенное выше представление Лакса справедливо лишь для каждой из моделей (Максвелла–Блоха и НУШ) по отдельности на соответствующих интервалах, т.е. при $\beta \neq 1$ уравнения (18), (19) — два не связанных представления Лакса, хотя эти модели связаны общим полем \mathcal{E} . При $\beta = 1$ (интегрируемый случай) сшивка граничных условий для параметров солитонов λ_k происходит наиболее просто: $\lambda_k(z_i - nL - 0) = \lambda_k(z_i - nL + 0)$, где z_i — граница между средами. В то же время при $\beta \neq 1$ возникает проблема сшивки граничных условий для этих моделей при переходе солитоном границы между соответствующими средами, поскольку в этих моделях используются разные масштабы координат и поля.

Покажем, что выбор системы уравнений в виде (15)–(17) приводит к простой сшивке граничных условий для солитонных решений и для $\beta \neq 1$. Пусть солитон поля \mathcal{E} на интервале $[z_2 + nL, z_3 + nL)$ имеет вид

$$\mathcal{E}(z, \tau; \lambda_n) = \frac{2\lambda_n \exp(i\phi_n)}{\text{ch}[2\lambda_n(\tau - zV_n^{-1})]}, \quad (20)$$

λ_n — действительная скалярная функция n . Тогда при переходе границы между световодом и резонансной средой следует совершить следующее изменение масштабов:

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}\beta, \quad \tau \rightarrow \tau\beta, \quad z \rightarrow z\beta. \quad (21)$$

Это преобразование для солитонных решений (20) эквивалентно замене

$$\lambda_n \rightarrow \lambda_n\beta, \quad V_n \rightarrow V_n. \quad (22)$$

При пересечении границы между нелинейными средами происходит скачок параметра солитона, определяющего его высоту и длительность, но его площадь и скорость остаются неизменными, т. е. поглощения или рождения новых солитонов или генерации излучения не происходит. В настоящей работе не учитываются эффекты отражения и преломления светового пучка при переходе через границу между средами, которые могут приводить к появлению деформации солитона, появлению потерь на излучение и пр. (см. разд. 5).

Итак, для описания динамики солитона в периодической среде используется следующий сценарий. Пусть в точке $z = 0$ в среду инжектируется импульс светового поля, имеющий форму солитона $q_0(\tau) = 2\eta_0 \text{sech}(\eta_0\tau)$. Динамику поля в резонансной среде рассматриваем в рамках метода обратной задачи рассеяния с переменным спектральным параметром [7]. В процессе эволюции в резонансной среде происходит его усиление, которое описывается изменением его параметров

$$\eta = \sqrt{\eta_0^2 + C},$$

где

$$C = \int_0^l c(x) dx,$$

$l = z_2 - z_1$ — длина резонансной среды. Параметр C — произвольная действительная величина. Считаем, что C не зависит от n , т. е. $C(z + nL) = C(z), \forall z$.

Эволюция поля в световоде описывается в рамках теории возмущений. В качестве устойчивой «робастной» моды выбираем солитонное решение (20).

На интервале $[z_2 + nL, z_3 + nL)$ солитон в световоде подвергается действию возмущений \mathcal{W} . Влияние возмущений на форму и параметры солитона определяем, используя результаты теории возмущений, развитой для почти интегрируемых моделей [3, 4] и справедливой для достаточно малых соответствующих коэффициентов.

Пусть результат действия \mathcal{W} на солитон в адиабатическом приближении в n -ой среде описывается уравнением

$$\partial_z \lambda_n = F(\lambda_n). \quad (23)$$

Тогда параметры солитона при переходе с интервала $[z_1 + (n - 1)L, z_3 + (n - 1)L)$ на интервал $[z_1 + nL, z_3 + nL)$ изменяются следующим образом. Считаем, что характеристики солитона, находящегося в волноводе $z \in [z_2 + (n - 1)L, z_3 + (n - 1)L)$ в точке $z_3 + (n - 1)L - 0$ характеризуются спектральным параметром $\lambda_{n-1}(z_3 + (n - 1)L - 0)$. При переходе границы происходит скачок параметра: $\lambda_n(z_1 + nL + 0) = \beta\lambda_{n-1}(z_3 + (n - 1)L - 0)$. Далее параметр вследствие накачки возрастает: $\lambda_n(z_2 + nL - 0) = [\lambda_n^2(z_1 + nL + 0) + C]^{1/2}$. Затем при переходе точки $z_2 + nL - 0 \rightarrow z_2 + nL + 0$ происходит обратный скачок параметра: $\lambda_n(z_2 + nL + 0) = \lambda_n(z_2 + nL - 0)/\beta$. В волноводе ($z \in [z_2 + nL, z_3 + nL)$) под действием возмущения параметр изменяется по закону (23). Затем цикл повторяется. Такой подход позволяет исследовать область значений C порядка и больше единицы.

4. РЕЖИМЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СОЛИТОНА В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Исследуем возможные режимы эволюции солитона в такой периодической среде. Рассмотрим возмущения эволюции солитона в световоде, связанные с действительной дисперсией, кубичной нелинейностью и трением: $\mathcal{W} = -g_1 \partial_\tau^2 \mathcal{E} - g_2 |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} - g_3 \mathcal{E}$. Их вклад в изменение параметров солитона (20) в адиабатическом приближении описывается следующим уравнением (ср. [4]):

$$\partial_\chi \lambda_n = -a\lambda_n^3 - \lambda_n. \quad (24)$$

Здесь

$$a = \left(-\frac{4}{3}g_1 + \frac{8}{3}g_2 \right) \frac{1}{2g_3}, \quad \chi = 2g_3 z.$$

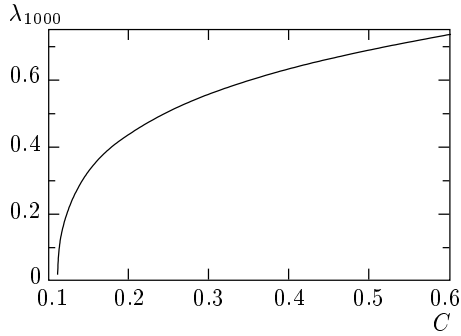


Рис. 1. Отображение (25). Зависимость λ_{1000} от C для $C > 0.111$, $a = 1$, $\gamma = 0.1$

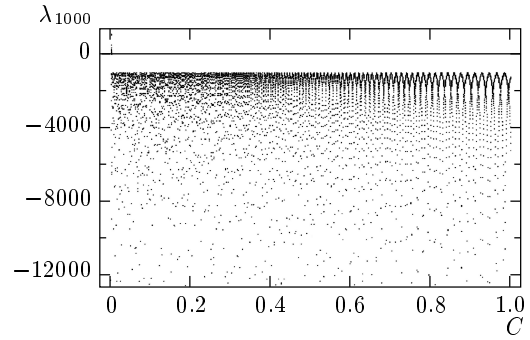


Рис. 3. Отображение (26). Зависимость λ_{1000} от C для $\gamma_1 = 0.01$

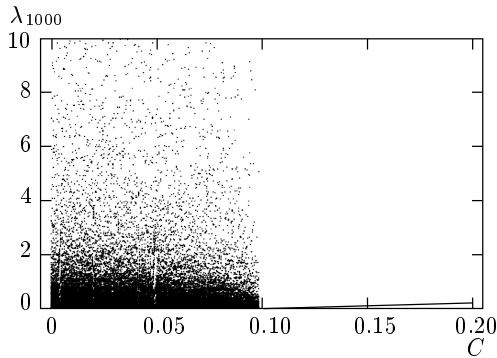


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для $0.2 > C > 0$

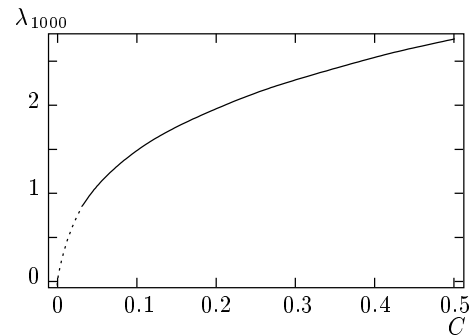


Рис. 4. То же, что на рис. 3, для $\gamma_1 = -0.01$

Следуя изложенной выше процедуре, получаем отображение

$$\lambda_{n+1} = \left[\frac{(\lambda_n^2 + C)(1 - a\gamma) - \gamma}{1 + a^2\gamma + a(\lambda_n^2 + C)(1 - a - a^2\gamma)} \right]^{1/2}, \quad (25)$$

где $\gamma = \exp[-4g_3(z_3 - z_2)] - 1 \ll 1$ — малый параметр, характеризующий возмущение. Использованный здесь подход позволяет исследовать область малых значений γ и произвольных C . Численный анализ отображения (25) показал, что существует порог усиления. Например, пусть $\lambda_0 = 0.1$, $\gamma = 0.1$, $a = 1$, тогда $\lambda_\infty \approx 0.099$ для $C = 0.113$, но для $C = 0.114$ получаем $\lambda_\infty \approx 1.2$.

Зависимость асимптотического значения λ_∞ от C в окрестности $C \gtrsim 0.111$ показана на рис. 1. Вблизи значения $C \lesssim 0.111$ наблюдается переход к хаотической динамике: асимптотическое значение амплитуды солитона изменяется хаотически (см. рис. 2).

Пусть возмущение имеет вид

$$\mathcal{W} = -\frac{f_0}{2\pi} - \frac{f_1}{4} \mathcal{E}(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} |\mathcal{E}(\tau')|^2 d\tau'.$$

Тогда $F(\lambda) = -f_0 - f_1\lambda^2$. Изменением масштаба λ можно свести задачу к условию $f_0 = f_1$. В этом случае отображение принимает вид

$$\lambda_{n+1} = \text{tg} \left[\text{arctg} \sqrt{\lambda_n^2 + C} - \gamma_1 \right], \quad (26)$$

где $\gamma_1 = 1 - \exp[-f_0(z_3 - z_2)]$, $|\gamma_1| \ll 1$. Для $\gamma_1 < 0$ хаотическая динамика не обнаружена. Зависимость λ_n ($n = 1000$) от C показана на рис. 3. Для $\gamma_1 > 0$ в области малых C наблюдается переход к хаотической динамике солитона в периодической системе. С ростом C хаотическая динамика исчезает (рис. 4).

Если внешняя сила пропорциональна $\exp(ir_0\lambda^2 z)$, где r_0 — действительная константа, то возникают другие, более сложные сценарии перехода к хаосу. Такого рода зависимость может быть реализована в кольцевом резонаторе [10–13]. Подход, примененный в настоящей работе, может быть напрямую использован для анализа динамики солитона в кольцевом резонаторе с двумя или более разными нелинейными средами.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что исследование составных интегрируемых моделей вместо объединенных или наряду с ними позволяет изучать эволюцию импульсов света в новых физических ситуациях. Предложенный в работе подход к исследованию составных моделей может быть использован в других схемах взаимодействия для исследования динамики солитонов и иных робастных нелинейных структур.

Для случая объединенной модели самоиндуцированной прозрачности и НУШ в работах [8, 9] аналитически и экспериментально доказано существование устойчивого 2π -импульса, аналогичного солитону самоиндуцированной прозрачности. Там же показано, что импульс площадью $2\pi N$ распадается на N изолированных 2π -импульсов. Аналогичные эффекты следует ожидать и для составной модели.

Условия существования солитонов в составных неинтегрируемых моделях в общем случае могут быть более слабыми, чем в объединенных моделях. Это связано с тем, что существование солитона в последнем случае может потребовать выполнения большего числа условий, чем в случае пространственно разделенных сред.

При переходе из одной оптической среды в другую в общем случае возникает отраженная волна, которая в настоящей работе не учитывается. Фактически эволюция импульсов в системах, состоящих из последовательностей линейных и нелинейных оптических сред, исследуется уже не один десяток лет. К таким системам относится, например, лазер с кольцевым резонатором. Отраженная волна, возникающая при прохождении границы между средой и воздухом, устраняется обычно тем, что поверхность среды располагается под углом Брюстера к направлению распространения волны. Другим способом подавления обратной волны является применение пластинок или смазки определенной толщины («просветленная оптика»), в которых вследствие интерференции происходит подавление обратной волны. Эти методы эффективно работают для импульсов длительностью вплоть до нескольких фемтосекунд.

Другим важным моментом применения составных моделей является возможная генерация дополнительных попутных волн при переходе солитона через границу сред. В рассматриваемой модели форма солитона отвечает лишь одному изолированному полюсу. При переходе границы сред происходит скачок параметров солитона, который описывается уравнениями (22). При этом в рамках использованных приближений дополнительные солитоны или излу-

чение не возникают. Действительно, поскольку этот скачок приводит к одновременному изменению как длительности, так и высоты импульса, площадь и *sech*-форма солитона не изменяются. При этих условиях решение общей спектральной задачи (18) указывает на существование единственного полюса в верхней полуплоскости как для среды с самоиндуцированной прозрачностью, так и для среды НУШ, хотя мнимая часть соответствующего спектрального параметра отличается в β раз. Это проявляется на практике в том, что в резонансной среде солитон самоиндуцированной прозрачности обычно намного короче и выше (в $\beta \gg 1$ раз), чем солитон НУШ.

Как правило, трансформация и формирование *sech*-формы солитона происходит на расстояниях его нескольких длин. Отсюда следует еще одно ограничение на область применимости модели, изученной в настоящей работе: протяженность сред по координате z должна быть много больше размеров солитона. Так, например, резонансная среда должна быть много длиннее солитона НУШ и т. д.

В заключение отметим, что в работе не учитываются радиационные эффекты, связанные с действием возмущений, которые обычно проявляются в следующем порядке малости и приводят к деформации формы солитона.

Автор благодарен Л. В. Ильичеву, К. П. Комарову и В. П. Сафонову за консультации и рецензенту за указание на работы [8, 9]. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-02-17904).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
2. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
3. В. И. Карпман, Е. М. Маслов, *ЖЭТФ* **73**, 537 (1977).
4. Yu. S. Kivshar and B. A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 763 (1989).
5. E. A. Doktorov and R. A. Vlasov, *Opt. Acta* **30**, 2 (1983).
6. J. R. Taylor (ed.), *Optical Solitons — Theory and Experiment*, Cambridge Studies in Modern Optics,

- Vol. 10, Cambridge (1992). H. A. Haus, Proc. IEEE **81**, 970 (1993). A. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*, Oxford Series in Optical and Imaging Sciences, № 7, OUP, Oxford (1995).
7. С. П. Бурцев, А. В. Михайлов, В. Е. Захаров, ТМФ **70**, 323 (1987).
 8. M. Nakazawa, E. Yamada, and H. Kubota, Phys. Rev. Lett. **66**, 2625 (1991).
 9. M. Nakazawa, Y. Kimura, K. Kurokawa, and K. Suzuki, Phys. Rev. A **45**, 23 (1992).
 10. D. W. McLaughlin, J. V. Moloney, and A. C. Newell, Phys. Rev. Lett. **54**, 681 (1985).
 11. А. А. Заболотский, КЭ **13**, 1682 (1986).
 12. А. А. Zabolotskii, Phys. Lett. A. **115**, 366 (1986).
 13. H. Adashihara, D. W. McLaughlin, J. V. Moloney, and A. C. Newell, J. Math. Phys. **29**, 63 (1987).