

САМООРГАНИЗОВАННАЯ КРИТИЧНОСТЬ И $1/f$ -ФЛУКТУАЦИИ ПРИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ

В. Н. Скоков, В. П. Коверда, А. В. Решетников*

*Институт теплофизики Уральского отделения Российской академии наук
620219, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 14 июля 2000 г.

Приведены результаты экспериментального исследования флуктуационных явлений при дуговом электрическом разряде. Обнаружены флуктуации со спектральной плотностью обратно пропорциональной частоте ($1/f$ -шум). Выявлены степенные зависимости функций распределения флуктуаций. Поведение спектральной плотности и функций распределения связывается с одновременным протеканием различных неравновесных фазовых переходов. В рамках теории среднего поля предложена математическая модель взаимодействующих неравновесных фазовых переходов в распределенной системе, предсказывающая самоорганизацию критического состояния и генерацию флуктуаций с расходящимися спектральными характеристиками. Отмечено удовлетворительное согласие предложенной модели с экспериментальными данными.

PACS: 05.40.-a, 52.80.Mg

1. ВВЕДЕНИЕ

Флуктуационные процессы, спектр мощности которых изменяется обратно пропорционально частоте (фликкер- или $1/f$ -шум), наблюдаются в системах различной природы (электрофизических, геофизических, астрофизических, биологических, экологических и т. д.).

К настоящему времени в литературе имеются различные модели, объясняющие происхождение фликкер-шума. К наиболее известным моделям фликкер-шума в твердых телах относятся модель экспоненциального распределения времен релаксации (см., например, [1, 2]), а также тепловые модели, в которых ответственными за фликкер-шум считаются механизмы теплопроводности [3]. Теоретические соображения о возможности отключения теплопроводного механизма и об ответственности за $1/f^\alpha$ -шум нелинейного взаимодействия диффузионных и теплопроводных мод в металлах высказаны в [4]. Согласно [5] масштабно-инвариантный степенной вид спектра в фоновых системах связан с флуктуациями скорости диффузии фазы и релаксации фоновых мод. В [6] $1/f$ -шум рассматривается

как аномальное броуновское движение в ограниченном пространстве. Однако, несмотря на многолетние усилия, до сих пор отсутствует общепринятая картина данного явления, и зачастую не ясны механизмы, приводящие к флуктуациям с $1/f$ -спектром. Поэтому актуальными остаются вопросы о поиске новых систем с фликкер-шумом и построение новых моделей этого явления.

Интерес к случайным процессам с расходящимися спектральными характеристиками резко возрос в последнее время в связи с открытием явления самоорганизованной критичности [7]. При самоорганизованной критичности система приходит к критическому поведению в процессе своей эволюции и не нуждается в тонкой подстройке управляющих параметров. Концепция самоорганизованной критичности является чрезвычайно общей и применима для описания поведения динамических систем различной природы. Важным и нерешенным вопросом теории самоорганизованной критичности является то, каким образом система с фликкер-шумом оказывается в критическом состоянии.

Низкочастотная расходимость спектральной плотности флуктуаций свидетельствует об отсутствии характерного временного масштаба процесса

*E-mail: vnskokov@itp.uran.ru

с фликкерным спектром. Это позволяет предположить, что система находится в окрестности критического фазового перехода. В работах [8–10] нами были экспериментально обнаружены флуктуации с $1/f$ -спектром при смене режимов кипения азота на поверхности тонких пленок высокотемпературных сверхпроводников в условиях джоулева саморазогрева. В этом случае происходит наложение и взаимодействие двух неравновесных фазовых переходов. В работе [11] были экспериментально обнаружены термические флуктуации с $1/f$ - и $1/f^2$ -спектрами при пленочном кипении воды на вертикально ориентированном проволочном нагревателе, отмечено сходство исследованного процесса с явлением самоорганизованной критичности. Для объяснения экспериментальных результатов была предложена математическая модель [9, 10], описывающая неравновесные фазовые переходы в сосредоточенной непотенциальной системе, которая представляет собой систему двух нелинейных стохастических уравнений, преобразующую белый шум в два стохастических процесса со спектральными плотностями, пропорциональными $1/f$ и $1/f^2$. Представляет интерес выяснение возможности флуктуаций параметров порядка с $1/f$ -спектром в пространственно-распределенных потенциальных системах.

Пересечение и взаимодействие двух неравновесных фазовых переходов — достаточно распространенное явление. По этой причине $1/f$ -шум можно ожидать в широком классе процессов с фазовыми переходами. Типичным примером неравновесных фазовых переходов являются процессы, связанные с электрическим разрядом. При этом возможно одновременное протекание и взаимодействие различных фазовых переходов в плазме разряда и приэлектродных областях. Так, дуговой разряд сопровождается интенсивной эрозией и испарением электродов [12].

В данной работе приводятся результаты экспериментального изучения флуктуаций тока электрической дуги высокого давления, а также предлагается математическая модель возникновения флуктуаций с фликкерным спектром при взаимодействии фазовых переходов в распределенной системе.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

В работе исследовались электрические флуктуации при горении дугового разряда. Дугу зажигали, разводя соприкасающиеся угольные электроды на

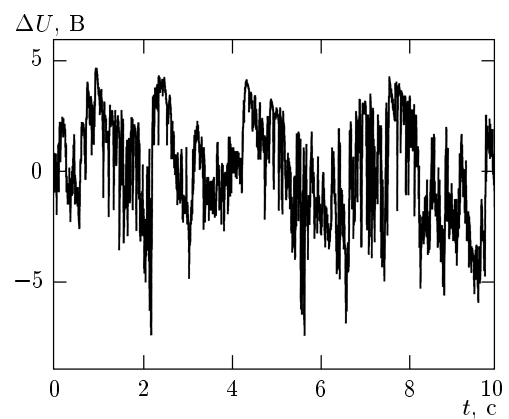


Рис. 1. Осциллограмма падения напряжения между анодом и катодом при дуговом разряде в воде

расстояние 0.3–0.5 мм. Диаметр электродов составлял 6 мм. Эксперименты проводили либо на воздухе, либо погружая электроды в воду. В первом случае реализовывалась дуга высокого давления с горячим катодом [12]. Во втором — дуга с холодным катодом. В процессе горения дуги происходило сильное разрушение электродов, прежде всего анода. Поэтому для избежания замыкания межэлектродного промежутка угольной пылью анод располагался снизу под катодом. Опыты проводили на постоянном токе.

В экспериментах измерялись флуктуации транспортного тока и падения напряжения между анодом и катодом. По измеренным осциллограммам методом Фурье-преобразования находились спектральные плотности флуктуаций. Во многих опытах, проведенных на воздухе, частотная зависимость спектральной плотности имела $1/f$ -вид. Также $1/f$ -поведение спектра часто наблюдалось и для флуктуаций тока дуги (в этом случае падение напряжения снималось с калиброванного сопротивления). Между падением напряжения между электродами и током наблюдался случайный сдвиг фаз, обусловленный реактивной составляющей проводимости дуги.

При погружении электродов в воду дуга становилась менее устойчивой, что проявлялось в более быстром погасании дуги, однако в этом случае $1/f$ -поведение спектров наблюдалось практически для всех осциллограмм. Для расширения частотного интервала, который для одной осциллограммы определяется буферной памятью осциллографа (2048 точек), измерения проводились с различной временной дискретизацией. На рис. 1 приведена одна из осциллограмм падения напряжения между

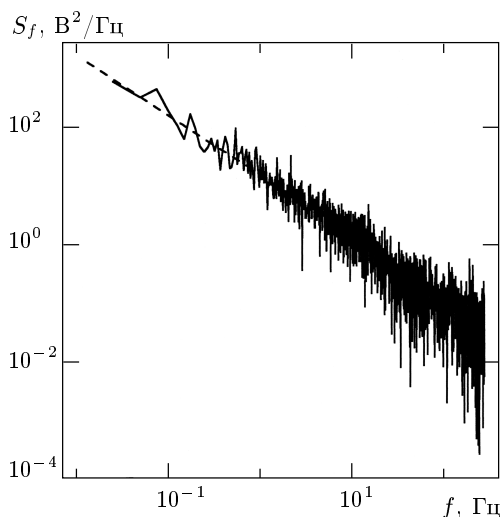


Рис. 2. Спектральная плотность колебаний падения напряжения между анодом и катодом. Штриховая линия — зависимость $S(f) \propto f^{-1}$

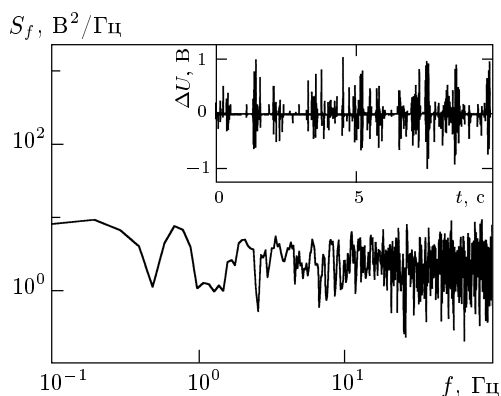


Рис. 3. Спектр флуктуаций падения напряжения на катоде, связанных с эрозией. На вставке приведена осциллограмма

анодом и катодом. На рис. 2 показана спектральная плотность колебаний падения напряжения между анодом и катодом. Штриховая линия на рис. 2 соответствует зависимости $S(f) \propto f^{-1}$. Из рис. 2 видно, что зависимость вида $1/f$ сохраняется на протяжении более четырех десятичных порядков частоты.

Микроскопическое изучение электродов после проведенных опытов показало следы значительной эрозии. В опытах с холодным катодом (дуговой разряд в воде) на катоде отчетливо наблюдались характерные следы катодных пятен [12]. Для исследования динамики разрушения электродов были постав-

лены специальные опыты, в которых цилиндрические угольные электроды были расположены перпендикулярно столбу дуги (в нашем случае — горизонтально). В процессе опытов через электроды пропускался небольшой транспортный ток в направлении перпендикулярном току дуги. Одновременно с измерением падения напряжения между электродами регистрировались флуктуации падения напряжения на горизонтальных электродах. На рис. 3 приведен спектр флуктуаций падения напряжения на катоде и соответствующая осциллограмма (на вставке). Из рис. 3 видно, что спектр флуктуаций на катоде соответствует спектру белого шума, а реализация состоит из последовательности случайных пичков. Похожая картина наблюдалась и для флуктуаций падения напряжения на горизонтальном аноде.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим в рамках феноменологической теории среднего поля два одновременно протекающих и взаимодействующих фазовых перехода. В данной работе мы не будем конкретизировать физический смысл параметров порядка. Будем считать, что пространственно-временная эволюция процесса описывается двумя одномерными стохастическими уравнениями диффузионного типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + Q_1(\phi, \psi) + \Gamma_1(x, t), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Q_2(\phi, \psi) + \Gamma_2(x, t), \end{aligned} \tag{1}$$

где D_1, D_2 — коэффициенты диффузии, $\Gamma_1(x, t), \Gamma_2(x, t)$ — δ -коррелированные случайные силы. Система (1) является достаточно общей и описывает неравновесные фазовые переходы во многих физических и химических системах. Рассмотрим случай, когда характерные пространственные масштабы изменения параметров порядка сильно различаются, т. е. $D_1/D_2 \gg 1$. В частном случае это может означать сильное различие коэффициентов температуропроводности и диффузии. Аппроксимируем функции источника, характеризующие взаимодействие параметров порядка, как и в [9, 10], выражениями:

$$Q_1(\phi, \psi) = -\phi\psi^2 + \psi, \quad Q_2(\phi, \psi) = -\psi\phi^2 + \phi.$$

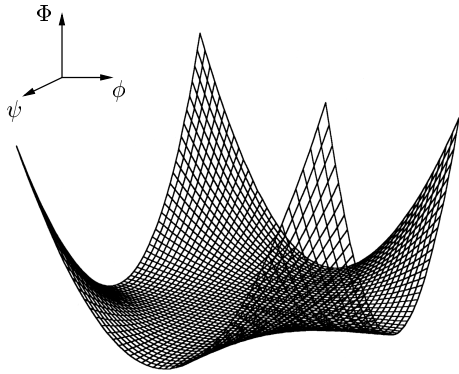


Рис. 4. Потенциал системы, определяемый выражением (3)

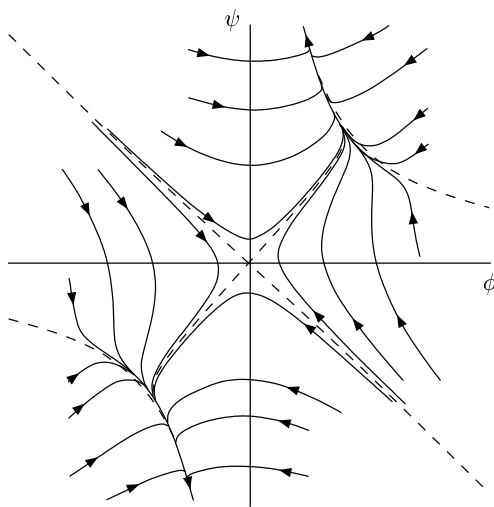


Рис. 5. Фазовый портрет динамической системы, усредненный по пространственной переменной

В этом случае система стохастических уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \phi \psi^2 + \psi + \Gamma_1(x, t), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\psi \phi^2 + \phi + \Gamma_2(x, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2) описывает случайные блуждания в потенциале

$$\Phi = \Phi_0 + \int \left[\frac{1}{2} \phi^2 \psi^2 - \phi \psi + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right] dx. \quad (3)$$

Вид потенциальной поверхности схематично показан на рис. 4. Функция $\Phi(\phi, \psi)$ в нуле имеет седловую точку. В отсутствие неоднородности ($\nabla \phi = 0$)

имеются также линии стационарных точек, определяемые условием $\phi \psi = 1$. При появлении неоднородности параметра ϕ , гиперболы $\phi \psi = 1$ наклоняются в сторону увеличения параметра ψ . На рис. 5 приведен фазовый портрет системы, полученный численным интегрированием системы (2) без случайных источников ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$). Штриховыми линиями на рис. 5 показаны сепаратрисы. Данная система имеет асимптотическое решение при $t \rightarrow \infty$ в виде степенных зависимостей:

$$\phi \rightarrow t^{-1/4}, \quad \psi \rightarrow t^{1/4}.$$

При наличии пространственно-распределенного случайного источника аналитическое исследование системы (2) представляет большие трудности из-за наличия нелинейных слагаемых и отсутствия стационарных точек. Переход от стохастических уравнений к соответствующему нелинейному уравнению Фоккера–Планда не решает проблему нахождения спектральных характеристик. Поэтому в данной работе мы ограничились численными методами решения системы (2).

Для получения численных решений использовалась явная схема интегрирования. В качестве пространственно-распределенного белого шума выбирались последовательности гауссовских случайных чисел. Управляющими параметрами служили интенсивности случайных источников и коэффициент диффузии. При небольшой интенсивности шума решения системы (2) имели вид слегка зашумленных релаксационных зависимостей $\phi(t)$ и $\psi(t)$, т. е. система совершала случайные блуждания вдоль одной из долин потенциала $\Phi(\phi, \psi)$ в зависимости от начальных условий. При этом процесс был нестационарен. С увеличением интенсивности случайных источников начинались перебросы из одной долины в другую. Процесс становился стационарным (по крайней мере, по первым двум моментам функции распределения параметра ϕ и при конечных шагах интегрирования). Переход к стационарному процессу обусловлен тем, что внешние случайные силы не дают системе слишком далеко продвинуться вдоль сужающихся долин потенциала $\Phi(\phi, \psi)$. Функции распределения переменных $\phi(t)$ и $\psi(t)$ имели симметричную куполообразную форму и хорошо аппроксимировались гауссовским распределением.

По вычисленным реализациям переменных методом Фурье-преобразования были найдены спектральные плотности флуктуаций. Оказалось, что в достаточно широких интервалах изменения коэффициента диффузии D_1 и интенсивности случайных

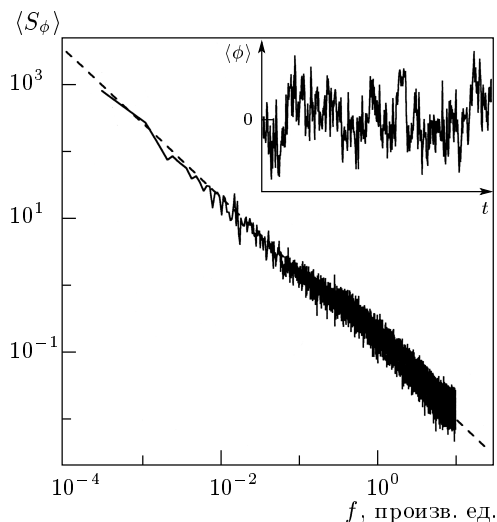


Рис. 6. Спектральная плотность $\langle S_\phi \rangle$ флуктуаций параметра ϕ , усредненная по пространству, и соответствующая усредненная реализация $\langle \phi \rangle$. Штриховая линия — зависимость $\langle S_\phi \rangle \propto 1/f^{1.09}$

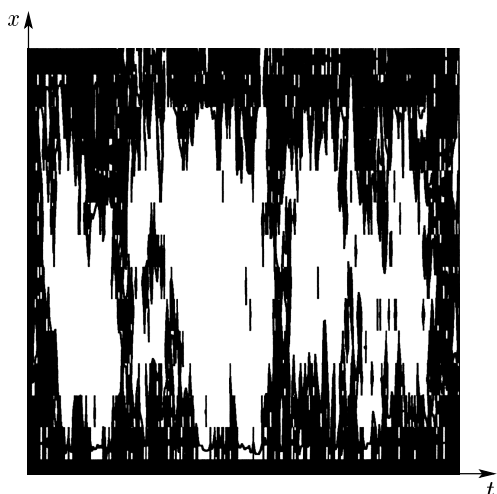


Рис. 7. Контурная диаграмма пространственно-временной реализации $\phi(x, t)$

источников спектральная плотность флуктуаций S_ϕ параметра ϕ изменялась обратно пропорционально частоте. Одновременно с этим частотная зависимость спектра S_ψ была обратно пропорциональна квадрату частоты. На рис. 6 приведена частотная зависимость спектральной плотности $S_\phi(f)$, полученная усреднением спектров по пространству. На том же рисунке приведена соответствующая реализация, усредненная по пространству. Численные данные на рис. 6 получены на 65540 временных и 32 про-

странственных шагах интегрирования при $dt = 0.05$, $dx = 0.8$, коэффициенте диффузии $D_1 = 0.4$, интенсивности случайных источников $\sigma = 3$, нулевых начальных и граничных условиях. Изменение начальных и граничных условий практически не влияло на результаты численного интегрирования системы (2). Из рис. 6 видно, что $1/f$ -поведение сохраняется в частотном интервале более четырех десятичных порядков. Данный интервал можно увеличить и проследить дальше расходящуюся низкочастотную асимптотику, если с увеличением числа шагов интегрирования в n раз уменьшить шаг интегрирования по времени с одновременным увеличением интенсивности случайных источников в \sqrt{n} раз. Спектр параметра ψ такой же, как и в случае винеровского процесса случайных блужданий. Однако, в отличие от классического броуновского движения, в нашем случае в реализациях $\psi(t)$ не наблюдается отклонение среднего значения переменной, вычисляемого вдоль реализации случайного процесса, от среднего по всей реализации, что свидетельствует о стационарности.

Спектры флуктуаций переменной ϕ в каждой пространственной точке также имели характерный $1/f$ -вид. Несмотря на то что внешние случайные силы были δ -коррелированными, в решениях системы $\phi(x, t)$ и $\psi(x, t)$ наблюдаются значительные пространственно-временные корреляции. На рис. 7 приведена контурная диаграмма пространственно-временного распределения параметра $\phi(x, t)$. Светлым тоном на рис. 7 показаны области сильной пространственно-временной корреляции. Такие области можно интерпретировать как своеобразные лавины.

Необходимо отметить, что $1/f$ -поведение спектральных характеристик сохранялось и в том случае, когда случайные силы в уравнении (1) не зависели от пространственной координаты, т. е. внешний шум, действующий в каждой точке пространства, был один и тот же.

Описанные выше результаты соответствуют случаю, когда один из коэффициентов диффузии (в данном случае D_2) равен нулю. Проведенный численный анализ показал, что с увеличением D_2 от нуля до D_1 в зависимостях $S_\phi(f)$ и $S_\psi(f)$ появляются горизонтальные «полки» в области низких частот, характерные для лоренцевских спектров. В случае равенства коэффициентов диффузии параметры ϕ и ψ совпадают и система (2) эквивалентна уравнению Гинзбурга–Ландау для фазового перехода первого рода с одним параметром порядка.

Для лучшего понимания физического смысла си-

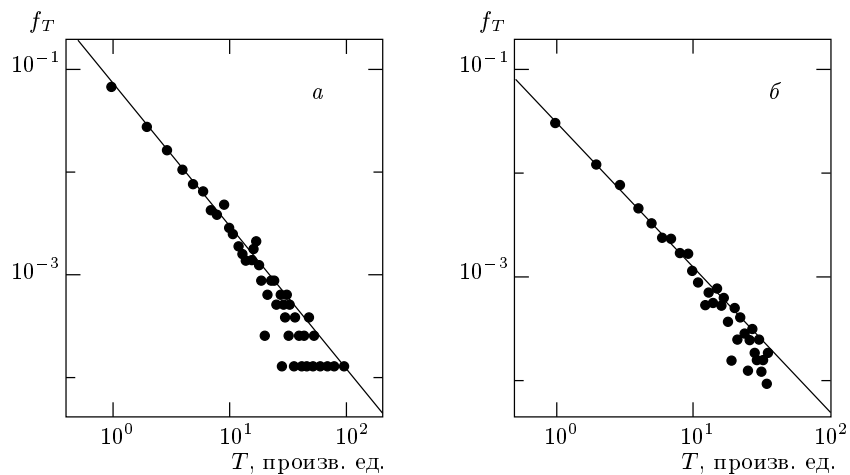


Рис. 8. Функции распределения временных интервалов прохождения заданного уровня: *a* — эксперимент; *b* — модель

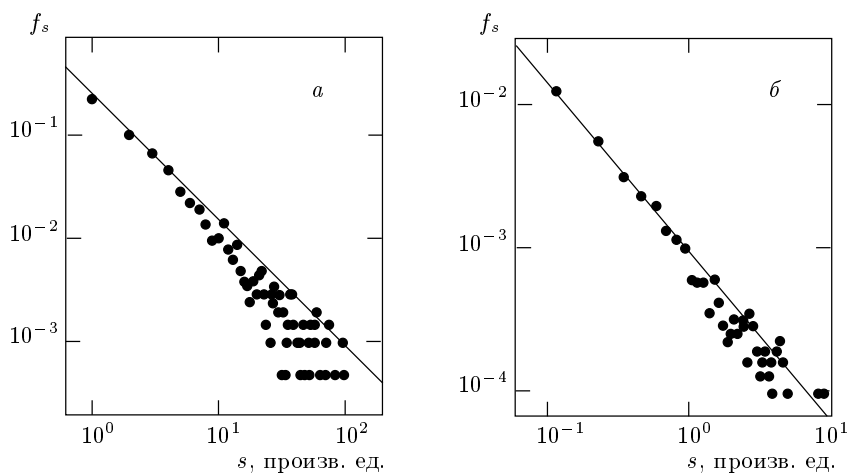


Рис. 9. Функции распределения лавин по размерам: *a* — эксперимент; *b* — модель

стемы (2) осуществим линейное преобразование переменных в выражении для потенциала (3). Введем новые переменные:

$$\theta = \frac{\psi - \phi}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\phi + \psi}{\sqrt{2}}.$$

Данное преобразование соответствует повороту фазовой плоскости на угол $\pi/4$ и не меняет типа потенциальной поверхности. В новых переменных выражение для потенциала примет вид

$$\Phi(\theta, \eta) = \int \left[\frac{1}{8}\theta^4 + \frac{1}{8}\eta^4 + \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\eta)^2 - \frac{1}{4}\theta^2\eta^2 - \nabla\theta\nabla\eta \right] dx. \quad (4)$$

Из структуры выражения (4) видно, что потенциал $\Phi(\theta, \eta)$ соответствует пересечению двух фазовых переходов с параметрами порядка θ и η [13]. Различные знаки перед квадратами параметров порядка означают, что мы имеем дело с пересечением докритического и закритического фазовых переходов. Последние два слагаемых в (4) характеризуют взаимодействие параметров порядка. Отрицательность коэффициентов перед членом $\theta^2\eta^2$, описывающим взаимодействие, соответствует отсутствию ненулевых стационарных решений в чисто динамической (бесшумовой) системе.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Отличительной особенностью самоорганизованной критичности является наличие степенных законов распределения физических величин (что, во многом, и послужило появлению самого термина «критичность»). В работах, посвященных самоорганизованной критичности в распределенных моделях типа «кучи песка», анализируются степенные распределения лавин по размерам, а также распределения длительности лавин [14–16]. В том случае, когда мы имеем временной ряд данных из эксперимента или в результате численного интегрирования уравнений, для получения подобных функций распределения необходимо определить понятие «ламина».

Пусть мы имеем дискретный временной ряд $x_i(t_i)$. Выберем произвольный уровень, например $x = 0$, и обозначим t_k моменты прохождения этого уровня. Назовем длительностью лавины временной интервал между двумя последовательными прохождениями заданного уровня:

$$T_k = t_{k+1} - t_k.$$

Размер лавин определим (по аналогии с [16]) как

$$s_k = \frac{1}{N} \sum_{t_i=t_k}^{t_{k+1}} |x_i(t_i)|. \quad (5)$$

На рис. 8а приведены функции распределения временных интервалов пересечения нулевого уровня для экспериментальной реализации, а на рис. 8б — для численного решения системы (2) (переменная $\langle \phi(t) \rangle$, усредненная по пространственной координате). Прямые линии на рис. 8 — зависимости $f_T \propto T^{-1.4}$. Таким образом, распределение временных интервалов (длительностей лавин) как для экспериментальных реализаций, так и для модели описывается степенным законом:

$$f_T \propto T^{-\tau}, \quad \tau = 1.4. \quad (6)$$

На рис. 9 приведены функции распределения лавин по размерам для экспериментальной реализации (а) и модели (б), определенные в соответствии с выражением (5). Прямые линии на рис. 9 соответствуют зависимости $f_s \propto s^{-1.2}$. Иными словами, распределение лавин по размерам следует степенному закону:

$$f_s \propto s^{-\gamma}, \quad \gamma = 1.2. \quad (7)$$

Данные результаты не зависят от выбора уровня, от которого отсчитываются временные интервалы и размеры лавин.

Таким образом, распределения длительности и размеров лавин, определенные из эксперимента и из модельных реализаций, описываются одинаковыми степенными законами. Предложенная модель возникновения флуктуаций с фликкерным спектром при взаимодействии фазовых переходов в пространственно-распределенной потенциальной системе качественно верно описывает наблюдаемые экспериментальные результаты. Отметим, что пространственная распределенность системы не является принципиальной для самоорганизации критического состояния системы и генерации фликкер-шума. Подобное поведение может наблюдаться и в точечных системах при наличии внешних потоков [9, 10]. В отличие от [9, 10], предложенная в настоящей работе модель является потенциальной и предсказывает возможность не только временных, но и пространственных корреляций. Модель взаимодействующих фазовых переходов в рамках теории среднего поля является достаточно общей и дает новый взгляд причину фликкер-шума и самоорганизованную критичность.

Таким образом, расходимость спектральных характеристик флуктуаций, степенной характер функций распределения и релаксационных зависимостей свидетельствуют о критическом поведении системы. Такое поведение наблюдается в широкой области управляющих параметров и не нуждается в их тонкой подстройке. В этом смысле можно говорить о самоорганизации критического состояния.

Авторы выражают благодарность В. П. Скрипову за обсуждение полученных результатов, а также Н. Б. Волкову и В. Б. Приезжеву за стимулирующие дискуссии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 00-02-16288 и 00-15-96719).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. М. Коган, УФН **145**, 285 (1985).
2. Г. П. Жигальский, УФН **167**, 623 (1997).
3. R. F. Voss and J. Clarke, Phys. Rev. B **13**, 556 (1976).
4. Р. О. Зайцев, Письма в ЖЭТФ **58**, 978 (1993).

5. Ю. Е. Кузовлев, ЖЭТФ **111**, 2086 (1997).
6. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая теория открытых систем*, ТОО «Янус», Москва (1995).
7. P. Vak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **38**, 364 (1988).
8. В. П. Коверда, В. Н. Скоков, В. П. Скрипов, Письма в ЖЭТФ **63**, 739 (1996).
9. В. П. Коверда, В. Н. Скоков, В. П. Скрипов, ЖЭТФ **113**, 1748 (1998).
10. V. P. Koverda and V. N. Skokov, Physica A **262**, 376 (1999).
11. В. Н. Скоков, В. П. Коверда, А. В. Решетников, Письма в ЖЭТФ **69**, 590 (1999).
12. Ю. П. Райзер, *Физика газового разряда*, Наука, Москва (1987).
13. И. Ф. Люксютов, В. Л. Покровский, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ **69**, 1817 (1975).
14. V. B. Priezhev and K. Sneppen, Phys. Rev. E **58**, 6959 (1998).
15. S. Maslov, P. Rios, M. Marsili, and Y.-Ch. Zhang, Phys. Rev. E **58**, 7141 (1998).
16. F. Daerden and C. Vanderzande, Phys. Rev. E **53**, 4723 (1996).