ЖЭТФ, 2001, том 119, вып. 4, стр. 649–664

ОПЕРАТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

В. М. Катков, В. М. Страховенко*

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 18 сентября 2000 г.

Дается последовательный вывод операторной формы решения волнового уравнения для заряженной частицы в произвольном внешнем электромагнитном поле. Полученные выражения могут быть использованы при решении любых задач квантовой электродинамики во внешних полях в рамках квазиклассического операторного метода. Особенности применения этого метода демонстрируются на примере процесса малоуглового упругого рассеяния фотона высокой энергии в произвольном локализованном электрическом поле. Впервые эта задача решена без использования предположения о центральной симметрии потенциала внешнего поля.

PACS: 03.65.Sq, 12.20.Ds

1. ВВЕДЕНИЕ

Точный учет влияния внешнего поля на процессы квантовой электродинамики (КЭД) удобно проводить в представлении Фарри. Ряд теории возмущений по взаимодействию квантованных полей заряженных частиц и фотонов выглядит в этом представлении точно так же, как и для свободных частиц, если заменить свободные волновые функции (и функции Грина) на решения соответствующих уравнений во внешнем поле. Ограничения при использовании такого подхода связаны с тем, что точные решения волновых уравнений известны только в нескольких специальных случаях и представляют собой достаточно сложные функции, что затрудняет проведение дальнейших расчетов.

Эти ограничения преодолеваются в рамках впервые сформулированного в [1] квазиклассического операторного метода решения задач КЭД в присутствии внешнего поля. В дальнейшем этот метод был успешно использован при описании процессов КЭД для многих физически интересных конфигураций внешнего поля (см., например, [2] и цитированную там литературу). Исходным моментом квазиклассического операторного метода является представление решения волнового уравнения в операторной форме, справедливой для любого внешнего поля. Используя эту форму, мы получаем для квадрата матричного элемента, характеризующего процесс, выражение, имеющее вид среднего от произведения некоторых операторов. Следующим шагом является надлежащее преобразование (перегруппировка) входящих операторов и затем — вычисление среднего. Первые два этапа квазиклассического операторного метода являются достаточно универсальными, когда от характера внешнего поля могут зависеть условия применимости получаемых выражений, но не сама их форма. На этапе усреднения характер внешнего поля, например наличие сингулярности в случае кулоновского потенциала, оказывается важным. Однако и здесь мы имеем дело лишь с двумя возможными ситуациями, одна из которых может реализоваться в локализованных потенциалах с существенной неоднородностью, в частности в кулоновском поле для малых прицельных параметров, а другая — во всех остальных случаях, в частности в постоянном внешнем поле и даже в кулоновском поле для достаточно больших прицельных параметров.

В разд. 2 настоящей работы впервые дается последовательный вывод операторной формы решения волновых уравнений для заряженной частицы в

*E-mail: v.m.strakhovenko@inp.nsk.su

произвольном внешнем электромагнитном поле и обсуждаются вопросы перегруппировки операторов в матричных элементах. На каждом этапе дается оценка точности используемых приближений. Проблема усреднения рассмотрена в разд. 3 на примере процесса упругого рассеяния фотона высокой энергии в локализованном электрическом поле. До сих пор эта задача не решалась с помощью квазиклассического операторного метода и с точки зрения этого подхода особенно интересна, так как в ней реализуются обе альтернативные схемы усреднения. Нами получено выражение для амплитуды этого процесса, справедливое во всей области передач импульса Δ, малых по сравнению с энергией фотона ω. При этом не предполагается центральная симметрия потенциала внешнего поля.

2. ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМА РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ И МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Волновым уравнением для частиц с нулевым спином является уравнение Клейна–Гордона:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0(\mathbf{r})\right)^2 \psi = \mathcal{H}^2\psi, \quad \mathcal{H} = \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{p} = -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad A^\mu \equiv (A^0, \mathbf{A}),$$

где A^μ — 4-потенциал внешнего электромагнитного поля, e — заряд частицы. Здесь и далее используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Будем пока предполагать, что 4-потенциал A^μ не зависит от времени. Если электрическое поле $\mathbf{E} = -\partial A_0(\mathbf{r})/\partial \mathbf{r}$ отсутствует, то уравнение (1) имеет два точных операторных решения:

$$\psi^{(\pm)} = \exp(\mp i\mathcal{H}t)|0\rangle, \quad (2)$$

которые соответствуют положительно- и отрицательно-частотным состояниям. Состояние $|0\rangle$ формально представляет собой волновую функцию в момент времени $t = 0$. Подчеркнем, что это состояние абсолютно произвольно и выбирается в соответствии с решаемой задачей. В присутствии электрического поля уравнение (1) можно решать методом последовательных приближений. Для этого представим (1) в виде $L\psi = 0$, где

$$L = \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{H} - V(\mathbf{r})\right) \times \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H} - V(\mathbf{r})\right) + [\mathcal{H}, V(\mathbf{r})]$$

или

$$L = \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H} - V(\mathbf{r})\right) \times \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{H} - V(\mathbf{r})\right) - [\mathcal{H}, V(\mathbf{r})].$$

Здесь $V(\mathbf{r})$ обозначает потенциальную энергию частицы: $V(\mathbf{r}) \equiv eA_0(\mathbf{r})$. Если теперь пренебречь коммутатором $[\mathcal{H}, V(\mathbf{r})]$ в выражении для L, то в качестве нулевого приближения получаем два решения (1) в присутствии электрического поля:

$$\psi_0^{(\pm)} = \exp[\mp i(\mathcal{H} \pm V(\mathbf{r}))t]|0\rangle. \quad (3)$$

Следующее приближение будем искать в виде

$$\psi_1^{(\pm)}(t) = (1 + C^{(\pm)})\psi_0^{(\pm)}(t).$$

Из уравнения $L\psi = 0$ получаем в первом приближении $C^{(\pm)} = \pm V/(2\mathcal{H})$, причем мы пренебрегли членами порядка $[\mathcal{H}^{-1}, V]$. Если тем не менее использовать в приложениях $\psi_0^{(\pm)}(t)$, то характерная величина поправки порядка V/ε (ε — энергия частицы) определяет точность решения (3). Конкретная оценка этой точности зависит как от свойств потенциала $V(\mathbf{r})$, так и от характера самого процесса, для описания которого используется найденное решение. Например, при упругом рассеянии фотона с энергией $\omega \gg m$ в поле ядра с зарядом $Z|e|$ (e — заряд электрона) энергия виртуальных частиц составляет величину $\varepsilon \sim \omega$, и $|V|/\varepsilon \sim Z\alpha/(\rho\omega)$, где $\alpha = e^2 = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, ρ — прицельный параметр. Поскольку в этом процессе существенны прицельные параметры, удовлетворяющие условию $\omega/m^2 \geq \rho \geq 1/(m + \Delta)$, получаем $|V|/\varepsilon \leq Z\alpha(m + \Delta)/\omega$, т. е. $|V|/\varepsilon \ll 1$ для малоуглового ($\Delta \ll \omega$) рассеяния.

Для частиц со спином 1/2 следует решать уравнение Дирака, которое во внешнем поле имеет вид

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_D = H_D\psi_D, \quad H_D = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} + \beta m + V(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Используем стандартное представление матриц γ^μ; $\beta = \gamma^0$, $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$. Операторное решение уравнения (4) очевидно:

$$\psi_D(t) = \exp(-iH_D t)\psi_D(0), \quad (5)$$

однако оно не устраивает нас по нескольким причинам. Во-первых, хотелось бы получить решение, развитие которого во времени с точностью до спиновых членов описывается классическим релятивистским гамильтонианом, как это было (см. (3)) для скалярных частиц. Во-вторых, желательно разделить положительно- и отрицательно-частотные состояния. Для свободного ($A^{\mu} = 0$) движения эти цели достигаются преобразованием Фолди–Войтхаузена (индекс FW, тогда как индекс D означает исходное — дираковское представление), которое удаляет из гамильтониана H_D нечетные матрицы $\boldsymbol{\alpha}$, смешивающие верхние и нижние двухкомпонентные пространства волновой функции.

Как и для скалярных частиц, рассмотрим сначала случай, когда электрическое поле отсутствует, т. е. когда $H_D = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{P}+\beta m$. Сделаем преобразование $\psi_D = U^{-1}\psi_{FW}$, где

$$U = R\left(1+\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{P}}{\tilde{H}+m}\right), \quad \tilde{H} = \left((\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{P})^2+m^2\right)^{1/2}, \quad R = \left(\frac{\tilde{H}+m}{2\tilde{H}}\right)^{1/2}, \tag{6}$$

имеет такой же вид, как и при преобразовании Фолди–Войтхаузена для свободных частиц, если в последнем заменить $\mathbf{p}$ на $\mathbf{P}$. Отметим, что $[\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{P}, \tilde{H}] = 0$, поскольку $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{P})^2 = -(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{P})^2$. Также легко убедиться, что U является унитарным оператором: $U^{+} = U^{-1}$. В результате этого преобразования уравнение (4) приобретает вид

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{FW} = H_{FW}\psi_{FW}, \quad H_{FW} = UH_DU^{-1} = \beta\tilde{H}. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) следующее:

$$\psi_{FW}(t) = \exp(-i\beta\tilde{H}t)\psi_{FW}(0). \tag{8}$$

Оператор $\beta\tilde{H}$ является четным, т. е. не смешивает верхние и нижние двухкомпонентные спиноры в волновой функции. Выберем теперь в качестве $\psi_{FW}(0)$ собственные функции матрицы β:

$$\beta\psi_{FW}^{(\pm)}(0) = \pm\psi_{FW}^{(\pm)}(0); \quad \psi_{FW}^{(+)}(0) = \begin{pmatrix}\varphi\\0\end{pmatrix}|0\rangle, \quad \psi_{FW}^{(-)}(0) = \begin{pmatrix}0\\\chi\end{pmatrix}|0\rangle, \tag{9}$$

где состояние $|0\rangle$ имеет тот же смысл, что и для скалярных частиц, φ и χ — двухкомпонентные спиноры, описывающие поляризацию частиц в момент времени $t = 0$. Функции

$$\psi_{FW}^{(\pm)}(t) = \exp(-i\beta\tilde{H}t)\psi_{FW}^{(\pm)}(0) = \exp(\mp i\tilde{H}t)\psi_{FW}^{(\pm)}(0),$$

очевидно, представляют собой положительно- (+) и отрицательно- (−) частотные состояния, т. е. соответственно состояния электронов и позитронов. Окончательно для $\psi_D^{(\pm)} = U^{-1}\psi_{FW}^{(\pm)}$ в магнитном поле получаем

$$\begin{aligned}\psi_D^{(+)}(t) &= \left(\frac{\tilde{H}+m}{2\tilde{H}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{P}}{\tilde{H}+m}\right)\times\\ &\times\exp(-i\tilde{H}t)\begin{pmatrix}\varphi\\0\end{pmatrix}|0\rangle,\\ \psi_D^{(-)}(t) &= \left(\frac{\tilde{H}+m}{2\tilde{H}}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{P}}{\tilde{H}+m}\right)\times\\ &\times\exp(i\tilde{H}t)\begin{pmatrix}0\\\chi\end{pmatrix}|0\rangle.\end{aligned} \tag{10}$$

Выражения (10) являются точным операторным решением уравнения (4) при $V(\mathbf{r}) = 0$. В гамильтониане

$$\tilde{H} = ((\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{P})^2+m^2)^{1/2} = \left(\mathbf{P}^2+m^2-e\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\right)^{1/2},$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ — магнитное поле, $\boldsymbol{\Sigma} = -\gamma^5\boldsymbol{\alpha}$, можно отделить спиновый член, если $|e\mathbf{H}| \ll \varepsilon^2$. Тогда

$$\tilde{H} \approx \mathcal{H} - \frac{e\mathbf{H}(\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\Sigma}}{2\mathcal{H}}, \quad \mathcal{H} = \sqrt{\mathbf{P}^2+m^2}. \tag{11}$$

В разложении гамильтониана $\tilde{H}$ мы пренебрегли членами порядка $[\mathcal{H}^{-1}, e\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\Sigma}]$ и с этой точностью порядок следования операторов $\mathcal{H}^{-1}$ и $e\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\Sigma}$ в (11) несуществен. Относительная величина отброшенных членов по сравнению с $e\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\mathcal{H}^{-1}$ составляет $v(a\varepsilon)^{-1}$, где a — характерный размер неоднородности поля $\mathbf{H}$, v — скорость частицы. Заметим, что опущенные при нахождении поправки к решению (3) члены имеют точно такую же величину относительно самой поправки $C^{(\pm)}$, если под a понимать размер неоднородности потенциала $V(\mathbf{r})$. Итак, при выполнении условий $|e\mathbf{H}| \ll \varepsilon^2, a \gg v/\varepsilon$ можно заменить $\tilde{H}$ в (10) на приближенное значение (11). Если $|e\mathbf{H}| \ll m\varepsilon$, то можно дополнительно заменить в (10) $\tilde{H}$ на $\mathcal{H}$ всюду, кроме экспоненты $\exp(\pm i\tilde{H}t)$.

Пусть теперь $V(\mathbf{r}) \neq 0$. В результате преобразования Фолди–Войтхаузена с матрицей U из (6) для гамильтониана $H_{FW}^{(1)} = UH_DU^{-1}$ получаем

$$\begin{aligned}H_{FW}^{(1)} &= \beta\tilde{H} + V(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\left[[R, V(\mathbf{r})], R^{-1}\right] +\\ &+ R\left(\frac{1}{2}[Q,[Q,V(\mathbf{r})]] + [Q,V(\mathbf{r})]\right)R,\end{aligned} \tag{12}$$

где $Q = (\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{P})/(\tilde{H}+m)$, оператор R определен в (6), так что $U = R(1+Q)$. Единственным нечетным оператором в $H_{FW}^{(1)}$ является линейный по Q член $R[Q,V(\mathbf{r})]R$, который, вообще говоря, мал по сравнению с $V(\mathbf{r})$, как и остальные члены в (12), содержащие коммутаторы. Величину нечетного члена в гамильтониане можно дополнительно уменьшить, сделав еще одно преобразование: $H_{FW}^{(2)} = H_{FW}^{(1)} + [B, H_{FW}^{(1)}]$. Выбирая

$$B = \frac{1}{2}\beta R[Q, V(\mathbf{r})]R\tilde{H}^{-1}$$

и пренебрегая членами, квадратичными по потенциалу, находим

$$H_{FW}^{(2)} = \beta\tilde{H} + V(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\left[[R, V(\mathbf{r})], R^{-1}\right] + \\ + \frac{1}{2}R\left([Q,[Q,V(\mathbf{r})]] + \left[[Q, V(\mathbf{r})], \tilde{H}\right]\tilde{H}^{-1}\right)R. \quad (13)$$

Опущенные при получении (13) квадратичные по потенциалу члены имеют (в чисто электрическом поле) порядок величины $(\partial V(\mathbf{r})/\partial \mathbf{r})^2/\varepsilon^3$. Например, в кулоновском потенциале $V_C(\mathbf{r}) = -Z\alpha/r$ их величина в единицах самого потенциала составляет $Z\alpha/(\varepsilon r)^3$ и для $Z\alpha \sim 1$ указанное пренебрежение возможно, если $\varepsilon\rho \gg 1$, где ρ — характерный размер (например, прицельный параметр) задачи. Порядок величины члена $\left[[R, V(\mathbf{r})], R^{-1}\right]$ в (13) составляет $V(\mathbf{r})(mv/\varepsilon^2 r)^2$. Оценка величины нечетного члена в (13) дает $v^2 V(\mathbf{r})/(\varepsilon r)^2$. Член $(1/2)R\,[Q,[Q,V(\mathbf{r})]]\,R$ можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{2}R\left(\left[\frac{1}{\tilde{H}+m}, [V(\mathbf{r}), \tilde{H}]\right] + \frac{1}{\tilde{H}+m} \times \\ \times \left(\Delta V(\mathbf{r}) + 2e([\mathbf{P}\times\mathbf{E}]\cdot\mathbf{\Sigma})\right)\frac{1}{\tilde{H}+m}\right)R. \quad (14)$$

В этом выражении двойной коммутатор по порядку величины совпадает с нечетным членом в (13). Формальная оценка величины пропорционального ΔV члена дает $V(\mathbf{r})/(\varepsilon r)^2$. Он мал, и в дальнейшем мы будем им пренебрегать. Следует, однако, иметь в виду, что при расчете тонкой структуры атома водорода с помощью гамильтониана $H_{FW}^{(2)}$ этот член надо удержать, так как в этой задаче его малость оказывается порядка искомой поправки к уровням энергии. Наконец, пропорциональный $([\mathbf{P}\times\mathbf{E}]\cdot\mathbf{\Sigma})$ член в (14) отвечает спин-орбитальному взаимодействию и имеет величину порядка $vV(\mathbf{r})/(\varepsilon r)$. Отбрасывая теперь в (13) все члены, имеющие порядок величины $V(\mathbf{r})/(\varepsilon r)^2$ и меньше, и разлагая $\tilde{H}$ как в (11), получаем гамильтониан H_{FW} в форме, которая и будет использоваться в дальнейшем:

$$H_{FW} = \beta \times \\ \times\left[\mathcal{H}+\beta V(\mathbf{r}) - \frac{e}{2\mathcal{H}}\left(\left(\mathbf{H}+\beta\frac{[\mathbf{E}\times\mathbf{P}]}{\mathcal{H}+m}\right)\cdot\mathbf{\Sigma}\right)\right]. \quad (15)$$

Условие $\varepsilon\rho \gg 1$, использованное при получении (15), означает (для релятивистского движения), что длина волны $1/\varepsilon$, ассоциируемая с частицей, мала по сравнению с характерными масштабами задачи, например с типичным прицельным параметром или масштабом неоднородности (ср. оценку применимости разложения (11)). По существу это условие совпадает с общим условием применимости квазиклассического приближения.

Уравнение для функции $\psi_{FW}(t)$ имеет вид (7) с гамильтонианом H_{FW}, определенным в (15), а его решение выглядит как (8), если там заменить $\beta\tilde{H}$ на H_{FW} (15). Как и раньше, выбираем в качестве $\psi_{FW}(0)$ собственные функции оператора β, определенные в (9). Тогда положительно- и отрицательно-частотные состояния есть

$$\psi_{FW}^{(\pm)}(t) = \exp(\mp iH^{(\pm)}t)\psi_{FW}^{(\pm)}(0), \\ H^{(\pm)} = \mathcal{H} \pm V(\mathbf{r}) - \frac{e}{2\mathcal{H}}\left(\left(\mathbf{H}\pm\frac{[\mathbf{E}\times\mathbf{P}]}{\mathcal{H}+m}\right)\cdot\mathbf{\Sigma}\right). \quad (16)$$

Заметим, что $H^{(+)}$ отличается от $H^{(-)}$ изменением знака потенциала $V(\mathbf{r})$. Результирующее преобразование Фолди–Войтхаузена имеет вид $U^{(1)} = (1+B)U$. Поскольку (оценка в чисто электрическом поле) $B \sim |eE|/\varepsilon^2 \sim (\varepsilon r)^{-2}$ имеет такую же малость, как и члены, уже отброшенные при получении (16), можно заменить $U^{(1)}$ на U.

Состояния $\psi_{FW}(t)$ и вместе с ними $\psi_D(t) = U^{-1}\psi_{FW}(t)$ будут стационарными, если $\psi_{FW}(0)$ является собственной функцией гамильтониана: $H_{FW}\psi_{FW}(0) = \varepsilon\psi_{FW}(0)$. Мы, в частности, проверили, что в кулоновском потенциале полученная из этого уравнения (после преобразования U^{-1}) функция $\psi_D^{(+)}$ совпадает с решением Фарри [3] (см. (39, 10) в [4]). При этом нужная точность обеспечивается тем, что в (16) удерживаются, вообще говоря, малые спиновые члены. Эти члены, естественно, важны также, если интересоваться развитием во времени спиновых состояний. Однако, как это будет ясно из дальнейшего, ими можно пренебречь при вычислении матричных элементов, если, как это обычно бывает в ультрарелятивистском ($\varepsilon \gg m$) случае, спин мало меняется за время формирования процесса. Кроме того, при $\varepsilon \gg m$ и $|e\mathbf{H}| \ll \varepsilon m$ можно упростить матрицу преобразования U, разложив R и $\tilde{H}$. Окончательно при описании радиационных процессов (испускание фотона, рождение e^+e^--пары и т. д.) с участием ультрарелятивистских частиц со спином $1/2$ будет использоваться следующее операторное представление для квазиклассических волновых функций:

$$|\psi^{(+)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{P}}{\mathcal{H}+m}\right) \times \\ \times \exp\{-i(\mathcal{H}+V(\mathbf{r}))t\}\begin{pmatrix}\varphi\\0\end{pmatrix}|0\rangle, \\ |\psi^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{P}}{\mathcal{H}+m}\right) \times \\ \times \exp\{i(\mathcal{H}-V(\mathbf{r}))t\}\begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix}|0\rangle. \tag{17}$$

Здесь $|\psi^{\pm}\rangle$ означает в использованных выше обозначениях $\psi_D^{(\pm)}$. В (17) пока не конкретизируется представление (например, координатное, импульсное и т. п.) волновой функции. Для перехода к конкретному представлению надо спроектировать $|\psi\rangle$ на соответствующую собственную функцию. Например, в координатном представлении $\psi(\mathbf{r},t) = \langle\mathbf{r}|\psi\rangle$, где $|\mathbf{r}\rangle$ — собственная функция оператора координаты.

До сих пор предполагалось, что 4-потенциал внешнего поля A^μ не зависит от времени. Если это не так, то гамильтониан H_D в исходном уравнении (4) также зависит от времени, $H_D \equiv H_D(t)$, и вместо (5) получаем операторное решение для (4) в виде

$$\psi_D(t) = [\vartheta(t)T_+ + \vartheta(-t)T_-] \times \\ \times \exp\left\{-i\int_0^t dsH_D(s)\right\}\psi_D(0), \tag{18}$$

где $\vartheta(t) = 1$ при $t > 0$ и $\vartheta(t) = 0$ при $t < 0$. Символ $T_\pm$ в (18) означает, что операторы должны быть упорядочены по времени. Именно, под знаком T_+ операторы, соответствующие более ранним моментам времени, должны стоять справа от операторов, соответствующих более поздним моментам времени, и наоборот для T_-. Совершая преобразование Фолди–Войтхаузена $\psi_D = U^{-1}\psi_{FW}$, где оператор U определен в (6) и также может зависеть от времени, если от него зависит вектор-потенциал $\mathbf{A}$, приходим к уравнению (7) с гамильтонианом $H_{FW}^{(1)}(t)$:

$$H_{FW}^{(1)}(t) = UH_D(t)U^{-1} + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}U^+ - U\frac{\partial U^+}{\partial t}\right). \tag{19}$$

Член $UH_D(t)U^{-1}$ совпадает с (12), где теперь $V(\mathbf{r})$ может зависеть и от времени: $V(\mathbf{r}) \to V(\mathbf{r},t)$. С точностью до членов порядка ε^{-2}, которыми, как и раньше, будем пренебрегать, второй член в (19) есть

$$\frac{i}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}U^+ - U\frac{\partial U^+}{\partial t}\right) \approx \\ \approx -\frac{e\left(\left[\mathbf{P}\times\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right]\cdot\boldsymbol{\Sigma}\right)}{2\mathcal{H}(\mathcal{H}+m)} - \frac{ie}{2\mathcal{H}}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}). \tag{20}$$

Пропорциональный $\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}$ член в (20) является нечетным оператором, совпадающим по порядку величины с нечетным оператором в (12). Видоизменяя теперь оператор B в дополнительном преобразовании $H_{FW}^{(2)} = (1+B)H_{FW}^{(1)}(1+B)^{-1}$, можно одновременно уменьшить величину всех нечетных членов в (19) до значений порядка ε^{-2}, которыми мы пренебрегаем в окончательном ответе. Подчеркнем, что с принятой точностью роль второго преобразования (переход от $H_{FW}^{(1)}$ к $H_{FW}^{(2)}$) результативно сводится к удалению из $H_{FW}^{(1)}$ нечетных операторов, сам же оператор B ввиду его малости может быть опущен в выражении $\psi_D^{(+)} = U^{-1}(1+B)^{-1}\psi_{FW}(t)$. Окончательно получаем в квазиклассическом приближении операторное решение уравнения Дирака в зависящем от времени электромагнитном поле:

$$\psi^{(\pm)}(t) = U^{-1}[\vartheta(t)T_+ + \vartheta(t)T_-] \times \\ \times \exp\left\{\mp i\int_0^t dsH^{(\pm)}(s)\right\}\psi_{FW}^{(\pm)}(0). \tag{21}$$

Здесь оператор U определен в (6), функции $\psi_{FW}^{(\pm)}(0)$ — в (9), гамильтониан $H^{(\pm)}(t)$ — в (16), где от времени может зависеть потенциальная энергия $V(\mathbf{r},t)$, вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ и вместе с ними поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Отметим, что с учетом вклада первого слагаемого в формуле (20) на месте $\mathbf{E}$ в $H^{(\pm)}$ теперь стоит вектор $-\partial A_0/\partial\mathbf{r} - \partial\mathbf{A}/\partial t$, т. е. правильное выражение для электрического поля в случае зависящего от времени потенциала.

Напомним теперь на примере простейших процессов, как записываются в квазиклассическом операторном методе соответствующие матричные элементы с использованием полученных выше операторных решений волновых уравнений. Будем рассматривать только частицы со спином $1/2$, поскольку все принципиальные моменты применения этого метода одинаковы для спинорных и скалярных частиц. В представлении Фарри матричный элемент, соответствующий испусканию фотона электроном, с точностью до нормировочного множителя имеет вид

$$V_{if}^{rad} = ie\int d^4x\overline{\psi}_f^{(+)}(x)\hat{e}^*\exp(ikx)\psi_i^{(+)}(x), \tag{22}$$

где e — заряд электрона, k^μ, e^μ — 4-векторы импульса и поляризации фотона, $\hat{e}^* \equiv \gamma^\mu e_\mu^*$. Подставим в (22) $\psi^{(+)}(x) = \psi^{(+)}(\mathbf{r},t) = \langle\mathbf{r}|\psi^{(+)}\rangle$, где $|\psi^{(+)}\rangle$ определяется выражением (17), и внесем $\exp(ikx)$ под обкладку $\langle\mathbf{r}|$ в

$$\exp(ikx)\psi^{(+)}(\mathbf{r},t) = \exp(ikx)\langle\mathbf{r}|\psi^{(+)}\rangle = \\ = \langle\mathbf{r}|\exp(ikx)\psi^{(+)}\rangle.$$

После этого интеграл по $\mathbf{r}$ сводится к $\int d^3r|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|$ и равняется единичному оператору, что выражает собой условие полноты системы состояний $|\mathbf{r}\rangle$. В результате для V_{if}^{rad} в калибровке $e^0 = 0$ получаем

$$V_{if}^{rad} = -i\frac{e}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\langle f|(\varphi_f^+, 0)C(t)\begin{pmatrix}\varphi_i\\0\end{pmatrix}|i\rangle,$$
$$C(t) = \exp(iH_e t)\left(1 + \frac{\gamma\cdot\mathbf{P}}{\mathcal{H}+m}\right)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{e})\times \\ \times\exp(ikx)\left(1 - \frac{\gamma\cdot\mathbf{P}}{\mathcal{H}+m}\right)\exp(-iH_e t), \quad (23)$$

где $H_e = \mathcal{H} + V(\mathbf{r})$ и для состояния $|0\rangle$ введены обозначения $|i\rangle$ в $|\psi_i^{(+)}\rangle$ и $|f\rangle$ в $|\psi_f^{(+)}\rangle$. Благодаря фактической двухкомпонентности волновых функций ненулевой вклад в (23) дает только четная часть оператора $C(t)$. Пронося еще оператор $\exp(ikx)$ в $C(t)$ налево, с релятивистской $(m/\varepsilon \ll 1)$ точностью находим

$$V_{if}^{rad} = -i\frac{e}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\times \\ \times\langle f|\exp(ikx)\exp(iH_e' t)\varphi_f^+(a_r + i\mathbf{b}_r\cdot\boldsymbol{\sigma})\varphi_i\times \\ \times\exp(-iH_e t)|i\rangle, \quad (24)$$
$$a_r = \left(2 + \frac{\omega}{\mathcal{H}'}\right)\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{v},$$
$$\mathbf{b}_r = \frac{\omega}{\mathcal{H}'}\left[\mathbf{v}\left(1 - \frac{m}{\mathcal{H}}\right) - \mathbf{n}, \mathbf{e}^*\right].$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, $\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}(\mathbf{P}\to\mathbf{P}-\mathbf{k})$, $H_e' = \mathcal{H}' + V(\mathbf{r})$, $\mathbf{v} = \mathbf{P}/\mathcal{H}$. Мы пренебрегли некоммутативностью входящих в $a_r, \mathbf{b}_r$ операторов, поскольку ее учет приводит к поправкам порядка $|e\mathbf{H}|/\varepsilon^2$, а члены такого порядка отбрасывались еще при решении волнового уравнения. Если теперь пронести оператор $\exp(-iH_e t)$ налево до $\exp(iH_e' t)$, подынтегральное выражение примет вид

$$\langle f|\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})L_r(t)\varphi_f^+(a_r(t) + i\mathbf{b}_r(t)\cdot\boldsymbol{\sigma})\varphi_i|i\rangle, \quad (25)$$

где
$$L_r(t) = \exp\{i(\mathcal{H}_e' + \omega)t\}\exp(-i\mathcal{H}_e t),$$

$a_r(t), \mathbf{b}_r(t)$ — гейзенберговские операторы: $a(t) = \exp(i\mathcal{H}_e t)a\exp(-i\mathcal{H}_e t)$. Заметим, что если бы мы сохранили спиновые члены в H_e (16), то $\boldsymbol{\sigma}$ в (25) тоже превратились бы в гейзенберговские операторы. Тогда в выражении для квадрата матричного элемента фигурировали бы зависящие от разных времен операторы $\boldsymbol{\sigma}(t_1)$ и $\boldsymbol{\sigma}(t_2)$:

$$\sum_f |V_{if}^{rad}|^2 = \frac{\alpha}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2\langle i|\varphi_i^+[a_r^+(t_2) - \\ - i\mathbf{b}_r^+(t_2)\cdot\boldsymbol{\sigma}(t_2)]L_r^+(t_2)\times \\ \times L_r(t_1)[a_r(t_1) + i\mathbf{b}_r(t_1)\cdot\boldsymbol{\sigma}(t_1)]\varphi_i|i\rangle. \quad (26)$$

Поправка, возникающая в матричном элементе при учете зависимости спиновых операторов от времени, имеет относительную величину

$$\delta \sim \frac{e}{\varepsilon}\int\limits_{t_1}^{t_2} dt\left[\mathbf{H}(t) + [\mathbf{E}(t)\times\mathbf{v}(t)]\right],$$

где для оценки можно считать, что зависимость полей от времени берется на классической траектории, т. е., например, $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}_{cl}(t))$. Величина δ имеет смысл угла поворота вектора спина за характерное время формирования процесса и, согласно уравнениям движения, совпадает с углом поворота вектора скорости за это же время. Так (см., например, [2]), в однородном магнитном поле при испускании фотонов с частотами в районе максимума интенсивности магнитотормозного излучения этот угол мал и $\delta \sim m/\varepsilon \ll 1$. А при пролете мимо ядра при прицельном параметре ρ имеем $\delta \sim Z\alpha/(\rho\varepsilon) \ll 1$ для $\rho \gg 1/\varepsilon$.

Следующий шаг в применении квазиклассического операторного метода состоит в объединении двух экспонент, из которых состоит оператор $L_r(t)$ (25), в одну. Дифференцируя $L_r(t)$ по времени, находим

$$\frac{dL_r(t)}{dt} = iL_r(t)B(t), \\ B(t) = \mathcal{H}(\mathbf{P}(t) - \mathbf{k}) + \omega - \mathcal{H}(\mathbf{P}(t)). \quad (27)$$

Заметим, что потенциальная энергия $V(\mathbf{r})$ входит в (27) только в неявном виде, через зависимость от времени гейзенберговского оператора $\mathbf{P}(t)$. Из (27) получаем

$$L_r(t) = [\vartheta(t)T_- + \vartheta(-t)T_+]\exp\left\{i\int\limits_0^t dsB(s)\right\}. \quad (28)$$

Смысл объединения («распутывания») экспонент в операторе $L_r(t)$ состоит в том, что «большие» (высокочастотные) операторы, присутствующие в каждой из экспонент, сокращаются в комбинации B. Действительно,

$$B(t) = \sqrt{(\mathbf{P}(t)-\mathbf{k})^2+m^2}+\omega-\mathcal{H}(t) = \\ = \sqrt{(\mathcal{H}(t)-\omega)^2+2kP(t)}-(\mathcal{H}(t)-\omega) \approx \\ \approx \frac{kP(t)}{\mathcal{H}(t)-\omega} \approx \frac{\omega\left[m^2+\mathbf{P}_\perp^2(t)\right]}{2\mathcal{H}(t)(\mathcal{H}(t)-\omega)}, \quad (29)$$

где

$$\mathbf{P}_\perp = \mathbf{P}-\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}), \quad \mathbf{n}=\mathbf{k}/\omega.$$

Разложение (29) справедливо, если оператор $(kP)/(\mathcal{H}(t)-\omega)^2$ мал. В ультрарелятивистском случае порядок его величины есть $m^2/(\varepsilon-\omega)^2$, тогда (29) справедливо при $\varepsilon-\omega \gg m$. В оценках подобного рода мы заменяем операторы на их характерные значения, определяемые состоянием $|i\rangle$, по которому проводится усреднение в (26). Для $\omega > \varepsilon$ компенсации в (29) нет, и мы имеем дело в (26) с быстроосциллирующими функциями времени, интегрирование которых приводит к пренебрежимо малому результату. В выражении (26) можно преобразовать произведение $L_r^+(t_2)L_r(t_1)$, воспользовавшись определением $L_r(t)=\exp\{i(H_e'+\omega)t\}\exp(-iH_et)$ и решением (28):

$$L_r^+(t_2)L_r(t_1) = \exp(iH_et)\exp(iH_e\tau/2)\times \\ \times\exp\{-i(H_e'+\omega)\tau\}\exp(iH_e\tau/2)\exp(-iH_et) = \\ = \exp(iH_et)L_r^+(\tau/2)L_r(-\tau/2)\exp(-iH_et) = \\ = [\vartheta(\tau)T_+ + \vartheta(-\tau)T_-]\exp\left\{i\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} dsB(s+t)\right\}, \quad (30)$$

где $\tau=t_2-t_1$, $t=(t_1+t_2)/2$.

Способ вычисления среднего $\langle i|\ldots|i\rangle$ в выражениях типа (26) зависит от величины коммутаторов входящих операторов. Если всеми этими коммутаторами можно пренебречь, то, выбирая в качестве $|i\rangle$ соответствующие волновые пакеты, мы просто заменяем операторы на их средние значения в состоянии $|i\rangle$. При этом ширина пакета должна быть малой по сравнению со средним значением оператора (например, импульса) и большой по сравнению с неопределенностью, связанной с величиной отбрасываемых коммутаторов. Иными словами, усреднение в этом случае сводится к замене гейзенберговских операторов на соответствующие классические величины, т. е. к переходу к классическим траекториям. Поскольку аргумент экспоненты в (26) (величина $B(s+t)$ в (30)) пропорционален $m^2+\mathbf{P}_\perp^2$, вклад дают $|\mathbf{P}_\perp|\le m$, что будет использовано в последующих оценках. По этой причине, в частности, можно с релятивистской точностью пренебречь поперечным импульсом в выражении для $\mathcal{H}=\sqrt{\mathbf{P}^2+m^2}$. С этой точностью в (26) можно выделить три типа коммутаторов: 1) коммутаторы компонент $\mathbf{P}_\perp$ в предэкспоненте, 2) коммутаторы этих компонент с экспонентой (с оператором (30)), 3) коммутаторы, характеризующие точность перехода в (30) от хронологического произведения к обычной экспоненте. Замечательно, что порядок величины отношения каждого из этих коммутаторов к произведению самих операторов (которое, собственно, и характеризует возможность пренебрежения некоммутативностью) оказывается одинаковым. В конкретных оценках удобно пользоваться следующим выражением для $\mathbf{P}_\perp(t)$, справедливым с релятивистской точностью:

$$\mathbf{P}_\perp(t) = \mathbf{P}_\perp(0) + \\ + e\int\limits_0^t ds\left[\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}(s))+[\mathbf{n}\times\mathbf{H}(\mathbf{r}(s))]\right], \quad (31)$$

где $\mathbf{P}_\perp(0)$ — шредингеровский оператор поперечного к $\mathbf{n}=\mathbf{k}/\omega$ импульса. Условия возможности перехода к классическим траекториям зависят, разумеется, от характера внешнего поля. Например, в однородном магнитном поле требуется, чтобы выполнялось условие $|e\mathbf{n}\times\mathbf{H}|/m^2 \equiv |\mathbf{n}\times\mathbf{H}|/H_{cr} \ll 1$, а в кулоновском поле — $Z\alpha \ll (m\rho)^2$, или в предположении, что $Z\alpha\sim 1$, $\rho\gg 1/m$. Заметим сразу, что для процессов более высокого порядка в аргументе экспоненты наряду с массой может фигурировать и общая передача импульса, соответственно чему может измениться и оценка характерной величины $|\mathbf{P}_\perp|$. Мы вернемся к этому вопросу в следующем разделе, где также будет сформулирован способ вычисления среднего $\langle i|\ldots|i\rangle$ в ситуации, когда переход к классическим траекториям невозможен.

Действуя, как при выводе (24), для матричного элемента, соответствующего рождению e^+e^--пары фотоном, имеющим импульс k^μ и поляризацию e^μ (в той же нормировке, что и в (22)), получаем

$$V_{if}^{pair}(\mathbf{k},\mathbf{e}) = -e\int\limits_{-\infty}^{\infty} dtV_{if}(\mathbf{k},\mathbf{e},t), \\ V_{if}(\mathbf{k},\mathbf{e},t) = \\ = \langle f|\varphi_f^+R(\mathbf{k},\mathbf{e},t)\chi_iL_p(\mathbf{k},t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})|i\rangle. \quad (32)$$

Здесь φ_f, χ_i — двухкомпонентные спиноры из (17), состояния $|0\rangle$ в (17) заменены на $|f\rangle$ для электронов и на $|i\rangle$ для позитронов, оператор $R(\mathbf{k}, \mathbf{e}, t)$ с релятивистской точностью имеет вид

$$
\begin{aligned}
&R(\mathbf{k}, \mathbf{e}, t) = \exp(iH_e t) R(\mathbf{k}, \mathbf{e}) \exp(-iH_e t), \\
&R(\mathbf{k}, \mathbf{e}) = \frac{\omega}{2\mathcal{H}\mathcal{H}'} \times \\
&\times \left[([\mathbf{e}\times\mathbf{P}] \cdot \mathbf{n}) + i\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{e}m + \mathbf{n}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{P}))\right) \frac{2\mathcal{H}' - \omega}{\omega} \right],
\end{aligned}
\tag{33}
$$

где, как и в (24), $H_e = \mathcal{H} + V(\mathbf{r})$, $\mathcal{H}' = \mathcal{H}(\mathbf{P} \to \mathbf{P} - \mathbf{k})$. Оператор $L_p(\mathbf{k}, t)$ в (32) представляет собой произведение двух экспонент,

$$
L_p(\mathbf{k}, t) = \exp(iH_e t) \exp\{i(\mathcal{H}' - V(\mathbf{r}) - \omega)t\},
$$

которые (ср. (28)) можно объединить в одну:

$$
\begin{aligned}
&L_p(\mathbf{k}, t) = [\vartheta(t)T_+ + \vartheta(-t)T_-] \times \\
&\qquad \times \exp\left\{ i\int_0^t ds B_p(s) \right\}, \\
&B_p(s) = \exp(iH_e s)[\mathcal{H} + \mathcal{H}' - \omega]\exp(-iH_e s) = \\
&\qquad = \mathcal{H}(s) + \mathcal{H}'(s) - \omega.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Компенсация «больших» членов в $B_p(t)$ происходит теперь при положительных значениях оператора $\omega - \mathcal{H}(t)$ $(\omega > \varepsilon)$. Соответственно, приближенное выражение для $B_p(t)$ в области компенсации, которая только и дает вклад в (32), выглядит как (29), если провести там замену $\mathcal{H}(t) - \omega \to \omega - \mathcal{H}(t)$:

$$
B_p(t) \approx \frac{kP(t)}{\omega - \mathcal{H}(t)} \approx \frac{\omega\left[m^2 + \mathbf{P}_\perp^2(t)\right]}{2\mathcal{H}(t)(\omega - \mathcal{H}(t))}. \tag{35}
$$

При получении (35) предполагалось, что $\varepsilon \gg m$, $\omega - \varepsilon \gg m$.

До сих пор мы считали фотон реальным ($k^2 = 0$). В диаграммах более высокого порядка могут фигурировать вершины, соответствующие взаимодействию с виртуальными ($k^2 \neq 0$) фотонами. Выражения (24) и (32) остаются справедливыми и в этом случае, поскольку условие $k^2 = 0$ использовалось нами на более позднем этапе — при разложении операторов $B(t)$ и $B_p(t)$ в области компенсации. Уточним это разложение для $k^2 \neq 0$. Учитывая, что

$$
\mathcal{H}' \equiv \sqrt{(\mathbf{P} - \mathbf{k})^2 + m^2} = \sqrt{(\mathcal{H} - \omega)^2 + 2kP + k^2},
$$

находим

$$
\begin{aligned}
&B(t) \approx \frac{kP(t) - k^2/2}{\mathcal{H}(t) - \omega} \approx \frac{\omega\left[m^2 + \mathbf{P}_\perp^2(t)\right]}{2\mathcal{H}(t)(\mathcal{H}(t) - \omega)} + \frac{k^2}{2\omega}, \\
&B_p(t) \approx \frac{kP(t) - k^2/2}{\omega - \mathcal{H}(t)} \approx \frac{\omega\left[m^2 + \mathbf{P}_\perp^2(t)\right]}{2\mathcal{H}(t)(\omega - \mathcal{H}(t))} - \frac{k^2}{2\omega},
\end{aligned}
\tag{36}
$$

где $\omega = k^0$, $k^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2$. Кроме того, в диаграммах более высокого порядка появляются новые объекты — функции Грина частиц и фотонов. В представлении Фарри пропагатор фотона сохраняет свободный вид, а функция Грина частиц может быть выражена через решения волновых уравнений. Например, функция Грина электрона $G(x_2, x_1)$ выражается через положительно- и отрицательно-частотные решения $\psi_i^{(\pm)}(x)$ уравнения Дирака в соответствующем внешнем поле следующим образом:

$$
\begin{aligned}
iG(x_2, x_1) = \vartheta(t_2 - t_1) \sum_i \psi_i^{(+)}(x_2)\overline{\psi}_i^{(+)}(x_1) - \\
- \vartheta(t_1 - t_2) \sum_i \psi_i^{(-)}(x_2)\overline{\psi}_i^{(-)}(x_1).
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Можно использовать в (37) операторную форму решений уравнения Дирака (17) и далее действовать, как при вычислении матричных элементов процессов низшего порядка.

3. РАССЕЯНИЕ ФОТОНА ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ В ЛОКАЛИЗОВАННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Будем называть локализованным электрическое поле, имеющее максимум (возможно сингулярность) в единственной точке и убывающее по мере удаления от этой точки. Таковыми являются, например, поле кулоновского центра и поле отдельного атома. Предполагается, что поле не зависит от времени, а в остальном достаточно произвольно, в частности, потенциал $V(\mathbf{r})$ не обязан обладать центральной симметрией. При высоких ($\omega \gg m$) энергиях переход начального (импульс $\mathbf{k}_1$, поляризация $\mathbf{e}_1$) фотона в конечный ($\mathbf{k}_2, \mathbf{e}_2$) происходит через виртуальную электрон-позитронную пару, которая и взаимодействует с внешним полем. Именно этот механизм рассеяния рассматривается в настоящей работе. Он изучался экспериментально в ряде работ (см. [5] и обзор [6]). Теоретически такое рассеяние (часто оно называется рассеянием Дельбрюка) было исчерпывающим образом изучено в случае кулоновского центра в работах [7–9]. Другое представление для амплитуды этого процесса было получено в [10] с помощью квазиклассической функции Грина электрона в кулоновском поле. Обобщение этой функции Грина на случай произвольного центрально-симметричного поля было сделано в [11], где также рассматривалось рассеяние Дельбрюка на экранированном кулоновском потенциале для передач импульса $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$, малых по сравнению с массой электрона, фактически в условиях полной экранировки.

Во всех упомянутых теоретических работах рассматривалось малоугловое рассеяние, когда $\Delta \ll \omega$. Это условие необходимо для применимости квазиклассического приближения, поскольку обеспечивает большую величину углового момента: $l \sim \omega\rho \sim \omega/\Delta \gg 1$. Характерными размерами обсуждаемой задачи являются (в случае кулоновского поля) комптоновская длина волны электрона $1/m$ и расстояние (время), на котором формируется процесс $\sim \omega/m^2$. Прицельным параметрам такого порядка соответствуют ($\rho \sim 1/\Delta$) значения $\Delta \sim m$ и $\Delta \sim m^2/\omega$. Если потенциал спадает быстрее чем кулоновский, в задаче появляется еще один параметр r_{sc} — размер потенциала. Для потенциала атома всегда выполняется условие $r_{sc} \gg 1/m$, однако соотношение между r_{sc} и ω/m^2 в зависимости от ω может оказаться любым. Ясно, что экранировка начинает влиять на процесс начиная с $\omega \sim m^2 r_{sc}$.

Амплитуда рассматриваемого процесса имеет вид

$$T(k_1,k_2) = 2i\alpha \int d^4x_1 d^4x_2 \mathrm{Tr}\left[G(x_2,x_1)\hat{e}_1 \times \right. \\ \left. \times \exp(-ik_1x_1) G(x_1,x_2)\hat{e}_2^* \exp(ik_2x_2)\right], \quad (38)$$

где функция $G(x_2,x_1)$ определена в (37). Подставляя (37) в (38) и учитывая, что (см. обсуждение в [10]) при $\omega \gg m$ с точностью до членов порядка $(\omega/m)^2$ вклад в (38) дает диаграмма, в которой рождение e^+e^--пары начальным фотоном предшествует ее аннигиляции в конечный фотон, получаем, удерживая в (38) только член пропорциональный $\vartheta(t_2-t_1)$, следующее выражение для $T(k_1,k_2)$:

$$T(k_1,k_2) = 2i\alpha \sum_{i,f} \int d^4x_1 d^4x_2 \vartheta(t_2-t_1) \times \\ \times \overline{\psi}_f^{(+)}(x_1)\hat{e}_1 \exp(-ik_1x_1)\psi_i^{(-)}(x_1) \times \\ \times \overline{\psi}_i^{(-)}(x_2)\hat{e}_2^* \exp(ik_2x_2)\psi_f^{(+)}(x_2) = \\ = 2i\alpha \sum_{i,f} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \vartheta(t_2-t_1) \times \\ \times V_{if}(\mathbf{k}_1,\mathbf{e}_1,t_1) V_{if}^+(\mathbf{k}_2,\mathbf{e}_2,t_2), \quad (39)$$

множитель $V_{if}(\mathbf{k},\mathbf{e},t)$ определен в (32) и представляет собой подынтегральное (по t) выражение в матричном элементе, соответствующем рождению e^+e^--пары фотоном. В отсутствие внешнего поля рассеяния фотона не происходит, так что в (38), (39) и последующих формах записи амплитуды подразумевается вычитание значения T при $A_\mu = 0$. В явном виде это вычитание будет сделано ниже. Выполняя в (39) суммирование по $|i\rangle$ и по всем спиновым состояниям и пользуясь возможностью циклической перестановки операторов в выражении

$$\sum_f \langle f|\ldots|f\rangle,$$

преобразуем подынтегральное выражение в (39) к виду

$$\sum_{i,f} V_{if}(\mathbf{k}_1,\mathbf{e}_1,t_1) V_{if}^+(\mathbf{k}_2,\mathbf{e}_2,t_2) = \\ = \exp[i(\omega_2-\omega_1)t] \times \\ \times \mathrm{Tr} \sum_f \langle f| R\left(\mathbf{k}_1,\mathbf{e}_1,-\frac{\tau}{2}\right) D(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\tau) \times \\ \times R^+\left(\mathbf{k}_2,\mathbf{e}_2,\frac{\tau}{2}\right)|f\rangle, \quad (40)$$

$$D(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\tau) = \exp\left\{-i(H_e-\omega_1)\frac{\tau}{2}\right\} \times \\ \times \exp(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}) \times \\ \times \exp\{-i(\mathcal{H}-V(\mathbf{r}))\tau\} \exp(-i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}) \times \\ \times \exp\left\{-i(H_e-\omega_2)\frac{\tau}{2}\right\},$$

где оператор $R(\mathbf{k}_1,\mathbf{e}_1,-\tau/2)$ определен в (33) и мы перешли от t_1,t_2 к $t=(t_1+t_2)/2$ и $\tau = t_2-t_1$. Интегрирование по t в (39) дает $2\pi\delta(\omega_2-\omega_1)$. Теперь можно положить $\omega_1=\omega_2\equiv\omega$, тогда оператор $D(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\tau)$ в (40) можно переписать следующим образом:

$$D(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\tau) = L_p\left(\mathbf{k}_1,-\frac{\tau}{2}\right) \times \\ \times \exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{r}) L_p^{(+)}\left(\mathbf{k}_2,\frac{\tau}{2}\right) = \\ = T_-\left[\exp\left\{i\int_0^{-\tau/2} B_p(s,\mathbf{k}_1)\right\}\exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{r}) \times \right. \\ \left. \times \exp\left\{-i\int_0^{\tau/2} B_p(s,\mathbf{k}_2)\right\}\right], \quad (41)$$

где было использовано определение оператора $L_p(\mathbf{k},t)$ и его явное выражение (34) через $B_p(s,\mathbf{k}) = \mathcal{H}(s) + \mathcal{H}'(s,\mathbf{k}) - \omega$. Напомним, что теперь вектор-потенциал равен нулю, $\mathbf{A}=0$, и

$$\mathcal{H} = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}, \quad \mathcal{H}(s) = \sqrt{\mathbf{p}^2(s)+m^2},$$

$$\mathcal{H}'(s,\mathbf{k}) = \sqrt{(\mathbf{p}(s)-\mathbf{k})^2+m^2}.$$

Определяя амплитуду M соотношением $T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = M\delta(\omega_2 - \omega_1)$ и вставляя

$$I = \int d^3r|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|$$

рядом с оператором $\exp(i\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{r})$, что позволяет выполнить суммирование по f, находим

$$M = 4\pi i\alpha \int d^3r \exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{r}) \times \\ \times \mathrm{Tr}\int\limits_0^\infty d\tau\langle\mathbf{r}|T_-\exp\left\{-i\int\limits_0^{\tau/2} dsB_p(s,\mathbf{k}_2)\right\}\times \\ \times R^+\left(\mathbf{k}_2,\mathbf{e}_2,\frac{\tau}{2}\right)R\left(\mathbf{k}_1,\mathbf{e}_1,-\frac{\tau}{2}\right)\times \\ \times T_-\exp\left\{i\int\limits_0^{-\tau/2} dsB_p(s,\mathbf{k}_1)\right\}|\mathbf{r}\rangle. \quad (42)$$

Амплитуда M нормирована так же, как и в работах [5–11], так что дифференциальное сечение рассеяния фотона есть $d\sigma/d\Omega = |M/(4\pi)|^2$. Отметим, что (42) имеет вид

$$M = \int d^3r \exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{r})\, Q(\mathbf{r},\boldsymbol{\Delta}).$$

Ниже мы убедимся, что для $\Delta \ll m$ можно пренебречь зависимостью $Q(\mathbf{r},\boldsymbol{\Delta})$ от передачи импульса $\boldsymbol{\Delta}$. В этом случае (42) приобретает вид типичный для амплитуды потенциального рассеяния, полученной в первом борновском приближении. Роль потенциала взаимодействия фотона с внешним полем играет здесь комплексная величина

$$U_{ph}(\mathbf{r}) = -Q(\mathbf{r},0)/(2\omega).$$

Фактически это взаимодействие носит тензорный характер, поскольку $Q(\mathbf{r},0)$ представляет собой свертку: $Q(\mathbf{r},0) = e_{1i}Q_{ij}(\mathbf{r},0)e^*_{2j}$.

Переходя к вычислению амплитуды M, выберем ось (ось z) цилиндрической системы координат вдоль $\boldsymbol{\nu} = (\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)/|\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2|$, тогда $\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, z)$, причем $\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$ и $\boldsymbol{\Delta}\cdot\mathbf{r} = \boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho}$, так как $\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$. Операторы координаты и импульса между обкладками $\langle\mathbf{r}|\ldots|\mathbf{r}\rangle$ в (42) присутствуют только в гейзенберговских операторах импульса $\mathbf{p}(t)$:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} - \int\limits_0^t ds\frac{\partial V(\mathbf{r}(s))}{\partial\mathbf{r}} \equiv \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}(t), \quad (43)$$

где (ср. (31)) $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(0)$ — шредингеровский оператор импульса $\mathbf{p} = -i\partial/\partial\mathbf{r}$. Для z-компоненты $\mathbf{p}(t)$ получаем из (43) $p_z(t) = p_z + \delta p_z(t)$, причем

$$\delta p_z(t) \approx \delta V(t) = V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}+\boldsymbol{\nu}t).$$

Поскольку вклад в (42) дают большие значения $p_z \sim \varepsilon$, с точностью до поправок порядка $\delta V(t)/\varepsilon$, которыми мы систематически пренебрегаем, можно заменить $p_z(t)$ на p_z. Относительная величина коммутатора $[p_z, p^i_\perp(t)]$ оказывается того же порядка ($\sim \delta V(t)/\varepsilon$) малости. Итак, с принятой точностью оператор $p_z(t)$ совпадает со свободным и коммутирует со всеми операторами в (42). Это позволяет переписать (42), прокладывая внутри $\langle z|\ldots|z\rangle$ полным набором собственных функций оператора p_z, т. е. плоскими волнами. Схематически имеем в (42)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\langle z|f(p_z,z)|z\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz f(q,z),$$

причем, поскольку компенсация в экспонентах (сокращения в $B_p(s,\mathbf{k})$, см. (35)) происходит лишь для $0 < q < \omega$, интегрирование по q следует проводить именно в этих пределах. Вводя обозначение $\varepsilon = \sqrt{q^2+m^2}$ и переходя к $x = \varepsilon/\omega$, получаем

$$M = \frac{i\alpha}{2\omega}\mathrm{Tr}\int\limits_0^1\frac{dx}{[x(1-x)]^2}\int d^2\rho\exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho})\times \\ \times\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_{-\infty}^\infty dz\langle\boldsymbol{\rho}|T_-\exp\left\{-i\int\limits_0^{\tau/2} dsf_2(s)\right\}\times \\ \times R^+_2R_1T_-\exp\left\{-i\int\limits_{-\tau/2}^0 dsf_1(s)\right\}|\boldsymbol{\rho}\rangle, \quad (44)$$

где

$$f_{1,2}(s) = \frac{m^2 + (\mathbf{p}_\perp \pm x\boldsymbol{\Delta}/2)^2}{2\omega x(1-x)}.$$

Как и в [10, 11], будем рассматривать переходы из одного состояния в другое для фотонов с определенной спиральностью. Тогда все амплитуды выражаются (см., например, [10]) через две независимые величины M_{++} — без изменения спиральности и M_{+-} — с изменением ее на обратную. Для спиральных состояний операторы R_2, R_1 в (44) имеют вид

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(\mathbf{e}_1\cdot\left(\mathbf{p}_\perp\left(-\frac{\tau}{2}\right)+\boldsymbol{\Delta}\frac{x}{2}\right)\right)\times \\ &\times(\lambda_1 + (2x-1)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu}) - m\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_1, \\ R_2 &= \left(\mathbf{e}_2\cdot\left(\mathbf{p}_\perp\left(\frac{\tau}{2}\right)-\boldsymbol{\Delta}\frac{x}{2}\right)\right)\times \\ &\times(\lambda_2 + (2x-1)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu}) - m\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (45)$$

где $\lambda_{1,2}$ — спиральность соответственно начального и конечного фотонов. Поскольку рассматривается малоугловая задача ($\Delta \ll \omega$), в (45) можно уже считать, что $\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$. С той же точностью проведены замены $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_1 \to \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}$ в R_1 и $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_2 \to \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}$ в R_2.

При интегрировании по τ и z в (44) вклад дают значения $\tau \sim |z| \sim \omega/m^2$. Интеграл по ρ сходится (для разности $M(A_\mu) - M(0)$) на $\min(\Delta^{-1}, \omega/m^2, r_{sc})$, и для $\Delta \geq m$ вклад дают $\rho \leq 1/m$. Для таких передач импульса переход к классическим траекториям при вычислении среднего $\langle \boldsymbol{\rho}| \ldots |\boldsymbol{\rho}\rangle$ невозможен, поскольку для него требуется (см. разд. 2) выполнение условия $\rho \gg 1/m$. В соответствии с проведенным анализом, разобьем область интегрирования по ρ в (44) на две: $M \equiv \tilde{M}_{\rm I} + \tilde{M}_{\rm II}$, где в $\tilde{M}_{\rm I}$ интегрирование по ρ проводится от нуля до ρ_0, а в $\tilde{M}_{\rm II}$ — от ρ_0 до бесконечности. Величина параметра сшивки ρ_0 определяется неравенствами $1/m \ll \rho_0 \ll \min(\omega/m^2, r_{sc})$. Гейзенберговский оператор $\mathbf{r}(s)$ в (43) есть

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r} + \int_0^s dx \mathbf{v}(x),$$

где $\mathbf{v}(x)$ — оператор скорости. В (44) движение по z уже предполагается свободным: $z(s) \approx z + s$. Для поперечной к $\boldsymbol{\nu}$ координате имеем в первом приближении

$$\boldsymbol{\rho}(s) = \boldsymbol{\rho} + s\mathbf{v}_\perp - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s dx (s - x) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} V(\boldsymbol{\rho} + x\mathbf{v}_\perp + \boldsymbol{\nu}(z + x)).$$

Относительная величина интегрального члена в этом выражении равна V/ε, и им следует пренебречь. Итак, можно всюду положить $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r} + s\mathbf{v}_\perp + (z + s)\boldsymbol{\nu}$, что означает применимость прямолинейной траектории для нашей задачи. Тогда выражение для оператора поперечного импульса приобретает вид

$$\mathbf{p}_\perp(t) = \mathbf{p}_\perp - \int_z^{z+t} ds \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} V(\boldsymbol{\rho} + (s - z)\mathbf{v}_\perp + s\boldsymbol{\nu}), \quad (46)$$

где для любых ρ интеграл по s набирается на интервале порядка самого прицельного параметра ρ. Член $(s - z)\mathbf{v}_\perp$ в (46) имеет абсолютную величину $|(s-z)\mathbf{v}_\perp| \sim |z\mathbf{v}_\perp| \sim 1/m$, и им можно пренебречь в области II, когда $\rho > \rho_0 \gg 1/m$. Для $\rho < \rho_0$ можно заменить аргумент потенциала в (46) на $\boldsymbol{\rho} - z\mathbf{v}_\perp + s\boldsymbol{\nu}$, поскольку в этой области $s \sim \rho \ll |z|$. Теперь можно убрать $\mathbf{v}_\perp$ из аргумента потенциала операцией сдвига:

$$f(\boldsymbol{\rho} - z\mathbf{v}_\perp) = \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}_\perp^2 z}{2\varepsilon}\right) f(\boldsymbol{\rho}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}_\perp^2 z}{2\varepsilon}\right).$$

После этого оператор $\mathbf{p}_\perp(t)$ в амплитуде (44) для любых ρ выглядит следующим образом:

$$\mathbf{p}_\perp(t) = \mathbf{p}_\perp - \int_z^{z+t} ds \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} V(\boldsymbol{\rho} + s\boldsymbol{\nu}) \equiv \mathbf{p}_\perp + \boldsymbol{\delta}(t). \quad (47)$$

Отметим, что $|\boldsymbol{\delta}(t)| \sim |V(\boldsymbol{\rho})|$, а характерные значения $|\mathbf{p}_\perp|$ есть $\max(m, \Delta)$, что понятно уже из вида функций $f_{1,2}(s)$ в (44). Согласно этой оценке, в области II ($\rho > \rho_0$) величина $\boldsymbol{\delta}(t)$ оказывается малой ($|\boldsymbol{\delta}(t)| \ll m$), и по ней следует провести разложение. В результате вклад $\tilde{M}_{\rm II}$ в полную амплитуду не содержит поправок высшего порядка по внешнему полю. Кроме того, благодаря множителю $\exp(-i\boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{\rho})$ и условию $\rho_0 \gg 1/m$ этот вклад не является пренебрежимо малым лишь для передач импульса $\Delta \ll m$, что будет использовано в дальнейшем.

В области I, где $s \sim \rho \ll |z|$, справедливо приближенное выражение для $\boldsymbol{\delta}(t)$ из (47):

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{Q}\left[\vartheta(-t)\vartheta(z)\vartheta(-t - z) - \right. \\ \left. - \vartheta(t)\vartheta(-z)\vartheta(t + z)\right], \\ \mathbf{Q} = \frac{\partial \chi(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}}, \quad \chi(\boldsymbol{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} ds V(\boldsymbol{\rho} + s\boldsymbol{\nu}). \quad (48)$$

В амплитуде $\tilde{M}_{\rm I}$ (как и в (44)) аргумент функции $\boldsymbol{\delta}(t)$, присутствующей в $f_{1,2}(s)$ и в $R_{1,2}$, принадлежит отрезку $|t| \leq \tau/2$. Для таких t, согласно (48), величина $\boldsymbol{\delta}(t)$ обращается в нуль при $|z| > \tau/2$, и все выражение оказывается не зависящим от внешнего поля. Подобные вклады пропадают при вычитании амплитуды в отсутствие поля и могут быть сразу отброшены. Другими словами, интегрирование по z в $\tilde{M}_{\rm I}$ следует проводить от $-\tau/2$ до $\tau/2$. Итак, подынтегральное (по x, ρ, τ, как в (44)) выражение в $\tilde{M}_{\rm I}$ приобретает вид

$$\int_{-\tau/2}^{0} dz \langle \boldsymbol{\rho}| \exp\left\{\frac{iz}{2\omega x}(D_- - \mathbf{p}_\perp^2)\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{-i(z+\tau/2)}{2\omega x(1-x)}\left[m^2 + \left(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{Q} - x\frac{\boldsymbol{\Delta}}{2}\right)^2\right]\right\} \times$$

$$\times R_2^+(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{Q})R_1(\mathbf{p}_\perp)\exp\left\{\frac{i}{2\omega x}\left[z\mathbf{p}_\perp^2 - \frac{\tau}{2}D_+\right]\right\}|\rho\rangle +$$

$$+\int\limits_0^{\tau/2} dz\langle\boldsymbol{\rho}|\exp\left\{-\frac{i}{2\omega x}\left(z\mathbf{p}_\perp^2 + \frac{\tau}{2}D_-\right)\right\}\times$$

$$\times R_2^+(\mathbf{p}_\perp)R_1(\mathbf{p}_\perp + \mathbf{Q})\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{i(z-\tau/2)}{2\omega x(1-x)}\left[m^2 + \left(\mathbf{p}_\perp + \mathbf{Q} + x\frac{\boldsymbol{\Delta}}{2}\right)^2\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{iz}{2\omega x}\left[\mathbf{p}_\perp^2 - D_+\right]\right\}|\boldsymbol{\rho}\rangle, \quad (49)$$

$$D_\pm = \frac{m^2 + (\mathbf{p}_\perp \pm x\boldsymbol{\Delta}/2)^2}{1-x},$$

где $R_{1,2}(\mathbf{P})$ обозначают функции, определенные в (45), в которых $\mathbf{p}_\perp(\mp\tau/2)$ заменены на $\mathbf{P}$. Существенной для дальнейшего является факторизация в (49) множителей, зависящих только от $\mathbf{p}_\perp$ и от операторов $\mathbf{p}_\perp \pm \mathbf{Q}$, содержащих внешнее поле. Подчеркнем ключевую роль наличия T-упорядочения в (44) для факторизации входящих в это выражение экспоненциальных операторов. Например, с учетом (48) для $-\tau/2 \le z \le 0$ имеем

$$T_-\exp\left\{-i\int\limits_0^{\tau/2} ds f_2(s)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{iz}{2\omega x(1-x)}\left[m^2 + \left(\mathbf{p}_\perp - x\frac{\boldsymbol{\Delta}}{2}\right)^2\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{-i(z+\tau/2)}{2\omega x(1-x)}\left[m^2 + \left(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{Q} - x\frac{\boldsymbol{\Delta}}{2}\right)^2\right]\right\}. \quad (50)$$

Собственные функции операторов $\mathbf{p}_\perp \pm \mathbf{Q}$, отвечающие собственному значению $\mathbf{q}$, есть $\exp\{i(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho} \mp \chi(\boldsymbol{\rho}))\}$, где $\chi(\boldsymbol{\rho})$ — определенная в (48) эйкональная фаза. Используя эти функции, можно теперь вычислить среднее $\langle\boldsymbol{\rho}|\ldots|\boldsymbol{\rho}\rangle$ в (49). Вставляя

$$I = \int d^2\boldsymbol{\rho}_1|\boldsymbol{\rho}_1\rangle\langle\boldsymbol{\rho}_1|$$

между свободными и зависящими от поля операторами, сводим вычисление среднего к нахождению матричных элементов двух типов:

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\rho}_2|f(\mathbf{p}_\perp)|\boldsymbol{\rho}_1\rangle &= \int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\times\\ &\times\exp\{i(\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1))\}f(\mathbf{q}),\\ \langle\boldsymbol{\rho}_2|f(\mathbf{p}_\perp \pm \mathbf{Q})|\boldsymbol{\rho}_1\rangle &= \int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\times\\ &\times\exp\{i(\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1))\}\times\\ &\times\exp\{\mp i[\chi(\boldsymbol{\rho}_2) - \chi(\boldsymbol{\rho}_1)]\}f(\mathbf{q}).\end{aligned} \quad (51)$$

В получающемся после проведения усреднения c-числовом выражении интегрирование по z и τ проводится элементарно. В результате находим

$$\tilde{M}_{\mathrm{I}} = -i\frac{\alpha\omega}{\pi^4}\int\limits_0^{\rho_0} d^2\rho\exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho})\times$$

$$\times\int d^2\rho_1\int\limits_0^1 dx\exp\{i(2x-1)\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho}_1\}\times$$

$$\times\int\frac{d^2q_1d^2q_2}{(m^2+q_1^2)(m^2+q_2^2)}\exp\{2i\cdot((\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)\cdot\boldsymbol{\rho}_1)\}\times$$

$$\times\{\exp[i(\chi(\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\rho}_1) - \chi(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_1))] - 1\}\times$$

$$\times\{m^2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*) + [\lambda_1\lambda_2 + (2x-1)^2]\times$$

$$\times(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{q}_1)(\mathbf{e}_2^*\cdot\mathbf{q}_2)\}. \quad (52)$$

В этом выражении уже сделано необходимое вычитание, так что $\tilde{M}_{\mathrm{I}}$ (52) обращается в нуль при «выключении» внешнего поля. Заметим, что если взять полусумму выражения (52) и получающегося из него заменами $x \to 1-x$, $\mathbf{q}_{1,2} \to -\mathbf{q}_{1,2}$, $\boldsymbol{\rho}_1 \to -\boldsymbol{\rho}_1$, то $\exp[i(\chi(\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\rho}_1) - \chi(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_1))] - 1$ в (52) переходит в $\cos[\chi(\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\rho}_1) - \chi(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_1)] - 1$. Тем самым становится очевидным выполнение теоремы Фарри: в разложении (52) в ряд теории возмущений присутствуют только четные степени потенциала. Интегралы по $\mathbf{q}_{1,2}$ в (52) можно выразить через функции Макдональда K_0 и K_1 с помощью соотношений

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^2q}{m^2+q^2}\exp(-2i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}) = 2\pi K_0(2m\rho),\\ &\int\frac{d^2q}{m^2+q^2}\mathbf{q}\exp(-2i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}) = -2\pi i K_1(2m\rho)m\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}.\end{aligned} \quad (53)$$

Можно взять и элементарный интеграл по x, выразив тем самым $\tilde{M}_{\mathrm{I}}$ для произвольного потенциала через 4-кратный интеграл:

$$\tilde{M}_{\mathrm{I}} = 4i\alpha\frac{\omega m^2}{\pi^2}\int\limits_0^{\rho_0} d^2\rho\exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho})\times$$

$$\times\int d^2\rho_1\{1 - \cos[\chi(\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\rho}_1) - \chi(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_1)]\}\times$$

$$\times\left\{K_0^2(2m\rho_1)(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*) + \frac{(\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_1)(\mathbf{e}_2^*\cdot\boldsymbol{\rho}_1)}{\rho_1^2}\times\right.$$

$$\left.\times K_1^2(2m\rho_1)\left[\lambda_1\lambda_2 - \frac{d^2}{dt^2}\right]\right\}\frac{\sin t}{t}, \quad (54)$$

где $t = \boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho}_1$. Для сравнения наших результатов с известными в литературе иногда оказывается удобным иной порядок интегрирования в (52). Например, полученная в [12] форма амплитуды рассеяния для кулоновского потенциала при $\Delta \gg m^2/\omega$ воспроизводится, если в (52) множители $(m^2+q_{1,2}^2)^{-1}$ представить как

$$\frac{1}{m^2+q_{1,2}^2} = i\int\limits_0^\infty ds_{1,2}\exp\{-is_{1,2}(m^2+q_{1,2}^2)\},$$

а уже затем интегрировать по $\mathbf{q}_{1,2}$.

Представим теперь $\tilde{M}_{\rm I}$ как $\tilde{M}_{\rm I} \equiv M_{\rm I} - \delta M_{\rm I}$, где для $M_{\rm I}$ берется выражение (52) или (54), в котором интегрирование по ρ распространено до бесконечности, а в $\delta M_{\rm I}$ оно проводится от ρ_0 до бесконечности. Из (53) следует, что интеграл по ρ_1 в (52) сходится на $\rho_1 \sim 1/m$. Тогда при вычислении $\delta M_{\rm I}$ во всей области $\rho \ge \rho_0 \gg \rho_1$ и можно использовать разложение

$$1-\cos[\chi(\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\rho}_1)-\chi(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_1)] \approx 2\left(\boldsymbol{\rho}_1\cdot\frac{\partial\chi(\boldsymbol{\rho})}{\partial\boldsymbol{\rho}}\right)^2.$$

Кроме того, как и $\tilde{M}_{\rm II}$ (см. обсуждение после формулы (47)), величину $\delta M_{\rm I}$ следует учитывать только для передач импульса $\Delta \ll m$. Тогда $|\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho}_1| \ll 1$, и можно заменить величину $\exp[i(2x-1)\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho}_1]$ на единицу. После этого выполняем сначала интегрирование по $\boldsymbol{\rho}_1$, результат которого пропорционален $\delta(\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1)$, а затем по всем остальным переменным, кроме $\boldsymbol{\rho}$. Окончательно для $\delta M_{\rm I}$ находим

$$\delta M_{\rm I} = \frac{i\alpha\omega}{18\pi m^2} b_{ij} \times \\ \times \int\limits_{\rho_0}^\infty d^2\rho \exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial\chi(\boldsymbol{\rho})}{\partial\rho_i}\,\frac{\partial\chi(\boldsymbol{\rho})}{\partial\rho_j}, \quad (55)$$

где $b_{ij}^{(++)} = 7\delta_{ij}$, $b_{ij}^{(+-)} = -2e_ie_j$ (обозначение $(++)$ относится к амплитуде без изменения спиральности, а $(+-)$ — с изменением ее на обратную). Подчеркнем, что величина $M_{\rm I}$ уже не зависит от параметра сшивки ρ_0. Для достаточно больших передач (в кулоновском потенциале для $\Delta \gg m^2/\omega$) вся амплитуда сводится к $M_{\rm I}$.

Переходя к вычислению $\tilde{M}_{\rm II}$, напомним, что в этой величине следует пренебречь передачей импульса Δ по сравнению с массой m, а при усреднении $\langle\boldsymbol{\rho}|\ldots|\boldsymbol{\rho}\rangle$ все операторы внутри обкладок можно считать коммутирующими. В результате в $\tilde{M}_{\rm II}$

$$\langle\boldsymbol{\rho}|f(\mathbf{p}_\perp,\boldsymbol{\rho})|\boldsymbol{\rho}\rangle = \int\frac{d^2q}{(2\pi)^2} f(\mathbf{q},\boldsymbol{\rho}),$$

и мы получаем из (44)

$$\tilde{M}_{\rm II} = \frac{i\alpha}{\omega}\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\int\limits_{\rho_0}^\infty d^2\rho\exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho}) \times \\ \times\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2(1-x)^2}\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_{-\infty}^\infty dz\exp\left\{-\frac{i\tau\Phi}{2\omega x(1-x)}\right\}\times \\ \times\left\{m^2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*)+[\lambda_1\lambda_2+(2x-1)^2]\times\right. \\ \left.\times(\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{q}+\boldsymbol{\delta}(-\tau/2)))(\mathbf{e}_2^*\cdot(\mathbf{q}+\boldsymbol{\delta}(\tau/2)))\right\}, \quad (56)$$

где $\boldsymbol{\delta}(t)$ дается формулой (47) и

$$\Phi = m^2+\mathbf{q}^2+2(\mathbf{q}\cdot\langle\boldsymbol{\delta}\rangle)+\langle\boldsymbol{\delta}^2\rangle, \\ \langle\boldsymbol{\delta}\rangle = \frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} ds\boldsymbol{\delta}(s), \\ \langle\boldsymbol{\delta}^2\rangle = \frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} ds\boldsymbol{\delta}^2(s). \quad (57)$$

Теперь берем в (56) гауссов интеграл по $\mathbf{q}$, разлагаем экспоненту по $\boldsymbol{\delta}$ ($|\boldsymbol{\delta}| \ll m$) и вычитаем значение $\tilde{M}_{\rm II}$ при нулевом внешнем поле. Получаем

$$\tilde{M}_{\rm II} = -\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_{\rho_0}^\infty d^2\rho\exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho}) \times \\ \times\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^\infty\frac{d\tau}{\tau}\exp(-i\mu\tau)\int\limits_{-\infty}^\infty dzF, \quad (58)$$

где $\mu = m^2/[2\omega x(1-x)]$ и F имеет вид

$$F^{(++)} = \frac{x^2+(1-x)^2}{2x(1-x)}\left(\boldsymbol{\delta}\left(\frac{\tau}{2}\right)-\boldsymbol{\delta}\left(-\frac{\tau}{2}\right)\right)^2 + \\ +\frac{4}{\tau}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} dss\left(\frac{d\boldsymbol{\delta}(s)}{ds}\cdot(\boldsymbol{\delta}(s)-\langle\boldsymbol{\delta}\rangle)\right), \\ F^{(+-)} = 4\left(\mathbf{e}\cdot\left(\boldsymbol{\delta}\left(-\frac{\tau}{2}\right)-\langle\boldsymbol{\delta}\rangle\right)\right)\times \\ \times\left(\mathbf{e}\cdot\left(\boldsymbol{\delta}\left(\frac{\tau}{2}\right)-\langle\boldsymbol{\delta}\rangle\right)\right). \quad (59)$$

При получении $F^{(++)}$ в члене пропорциональном $m^2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2^*)$ в (56) проведено интегрирование по частям по переменной τ. Подставляя фурье-представление потенциала

$$V(\boldsymbol{\rho}) = \int\frac{d^2Q_\perp dQ_\parallel}{(2\pi)^3}\times \\ \times\exp(iQ_\parallel z)\exp(i\mathbf{Q}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho})\tilde{V}(\mathbf{Q}_\perp,Q_\parallel) \quad (60)$$

в выражение (47) для $\boldsymbol{\delta}(t)$, находим из (58)

$$\begin{gathered}
\tilde{M}_{\mathrm{II}}=\frac{\alpha}{\pi^2}\int\limits_{\rho_0}^{\infty}d^2\rho\exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho})\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}dQ_\parallel\times\\
\times\int\frac{d^2Q_{1\perp}}{(2\pi)^2}\int\frac{d^2Q_{2\perp}}{(2\pi)^2}\exp\{i(\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{Q}_{1\perp}+\mathbf{Q}_{2\perp}))\}\times\\
\times\tilde{V}(\mathbf{Q}_{1\perp},Q_\parallel)\tilde{V}(\mathbf{Q}_{2\perp},-Q_\parallel)Q^i_{1\perp}Q^j_{2\perp}\times\\
\times\int\limits_0^1\frac{dss}{(Q_\parallel s)^2-\mu^2+i0}F_{ij},\\
F_{ij}^{(++)}=\delta_{ij}\left[\frac{x^2+(1-x)^2}{4x(1-x)}+s(1-s)\right],\\
F_{ij}^{(+-)}=-s^2e_ie_j.
\end{gathered}\tag{61}$$

Представим произведение $\tilde{V}(\mathbf{Q}_{1\perp},Q_\parallel)\tilde{V}(\mathbf{Q}_{2\perp},-Q_\parallel)$ в (61) как

$$[\tilde{V}(\mathbf{Q}_{1\perp},Q_\parallel)\tilde{V}(\mathbf{Q}_{2\perp},-Q_\parallel)-\tilde{V}(\mathbf{Q}_{1\perp},0)\tilde{V}(\mathbf{Q}_{2\perp},0)]+\\+\tilde{V}(\mathbf{Q}_{1\perp},0)\tilde{V}(\mathbf{Q}_{2\perp},0)$$

и, соответственно, $\tilde{M}_{\mathrm{II}}\equiv M_{\mathrm{II}}+\delta M_{\mathrm{II}}$, где M_{II} — интеграл от разности в квадратных скобках в последнем выражении, а δM_{II} — от $V(\mathbf{Q}_{1\perp},0)V(\mathbf{Q}_{2\perp},0)$. Поскольку в M_{II} малые ρ не дают вклада, интегрирование можно распространить на всю область изменения ρ, т. е. заменить ρ_0 на нуль. После этого берется интеграл по $\boldsymbol{\rho}$:

$$\begin{gathered}
M_{\mathrm{II}}=\frac{\alpha\omega}{\pi^4m^2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^\infty dy\int d^2q\times\\
\times\Big[\tilde{V}(\mathbf{q},\mu y)\tilde{V}(\boldsymbol{\Delta}-\mathbf{q},-\mu y)-\\
-V(\mathbf{q},0)V(\boldsymbol{\Delta}-\mathbf{q},0)\Big]B,\\
B^{(++)}=(\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\Delta}-\mathbf{q}))\int\limits_0^1\frac{dss}{s^2y^2-1+i0}\times\\
\times\left[\frac{x^2+(1-x)^2}{4}+x(1-x)s(1-s)\right],\\
B^{(+-)}=(\mathbf{e}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{e}\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\Delta}))x(1-x)\times\\
\times\int\limits_0^1\frac{dss^3}{s^2y^2-1+i0},
\end{gathered}\tag{62}$$

где мы перешли к переменной $y=Q_\parallel/\mu$. Интегралы по s в (62) берутся элементарно:

$$\begin{gathered}
B^{(++)}=\frac{(\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\Delta}-\mathbf{q}))}{2y^2}\times\\
\times\left\{\frac{1}{4}(x^2+(1-x)^2)\ln(1-y^2-i0)+x(1-x)\times\right.\\
\left.\times\left[1-\frac{1}{y^2}\ln(1-y^2-i0)+\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1-y-i0}{1+y}\right)\right]\right\},\\
B^{(+-)}=\frac{1}{2y^2}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{e}\cdot(\mathbf{q}-\boldsymbol{\Delta}))x(1-x)\times\\
\times\left[1+\frac{1}{y^2}\ln(1-y^2-i0)\right].
\end{gathered}\tag{63}$$

Используя определение эйкональной фазы $\chi(\boldsymbol{\rho})$ (48) и уравнения (60), (61), представим δM_{II} в следующей форме:

$$\begin{gathered}
\delta M_{\mathrm{II}}=-\frac{\alpha}{\pi^2}\int\limits_{\rho_0}^{\infty}d^2\rho\exp(-i\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\rho})\frac{\partial\chi(\boldsymbol{\rho})}{\partial\rho_i}\frac{\partial\chi(\boldsymbol{\rho})}{\partial\rho_j}\times\\
\times\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}dQ_\parallel\int\frac{dss}{(Q_\parallel s)^2-\mu^2+i0}F_{ij},
\end{gathered}\tag{64}$$

где F_{ij} определены в (61). Интегралы по $Q_\parallel$, а затем и по x,s в (64) легко берутся, и мы убеждаемся, что $\delta M_{\mathrm{II}}=\delta M_{\mathrm{I}}$, где δM_{I} — величина, определенная в (55). Таким образом, полная амплитуда

$$M=\tilde{M}_{\mathrm{I}}+\tilde{M}_{\mathrm{II}}=\\=M_{\mathrm{I}}-\delta M_{\mathrm{I}}+M_{\mathrm{II}}+\delta M_{\mathrm{II}}=M_{\mathrm{I}}+M_{\mathrm{II}},$$

как и должно быть, не зависит от ρ_0.

Итак, для любых $\Delta\ll\omega$ амплитуда рассеяния фотона с $\omega\gg m$ на произвольном локализованном потенциале дается суммой выражений (62) и (52) (или (54)), причем в последнем интегрирование по $\boldsymbol{\rho}$ проводится по всей области. Подчеркнем, что до сих пор выражение для этой амплитуды, справедливое при любых $\Delta\ll\omega$ без каких-то дополнительных ограничений на параметры задачи, было известно только для кулоновского потенциала.

В качестве примера найдем теперь вклад в амплитуду M_{II} в потенциале Мольер [13], для которого

$$\begin{gathered}
\tilde{V}(\mathbf{Q})=-4\pi Z\alpha\sum_{n=1}^{3}\frac{a_n}{\mathbf{Q}^2+b_n^2},\\
a_1=0.1,\quad a_2=0.55,\quad a_3=0.35,\quad b_n=\beta_0\beta_n,\\
\beta_1=6,\quad\beta_2=1.2,\quad\beta_3=0.3,\\
\beta_0=mZ^{1/3}/121.
\end{gathered}\tag{65}$$

Заметим, что фурье-образ кулоновского потенциала получается из (65), если там положить $b_n=0$, $a_n=1/3$. Ниже будем считать, что орт $\mathbf{e}_1$ в векторе круговой поляризации $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1+i\mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$ находится в плоскости рассеяния ($\mathbf{e}_1\parallel\boldsymbol{\Delta}$). Тогда использованные, например, в [8] амплитуды с вектором линейной поляризации в плоскости рассеяния,

$M_\parallel$, и перпендикулярно этой плоскости, $M_\perp$, оказываются связанными со спиральными амплитудами простым соотношением:

$$M_\perp = M_{++} - M_{+-}, \quad M_\parallel = M_{++} + M_{+-}.$$

Подставляя (65) в (62) и используя параметризацию

$$(cd)^{-1} = \int_0^1 dt[ct + d(1-t)]^{-2},$$

вычисляем в (62) интегралы по $\mathbf{q}$ и y. После этого вклад $M_{\rm II}$ в полную амплитуду приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} M_{\rm II}^{Mol} &= \frac{4i\alpha(Z\alpha)^2\omega}{m^2}\int_0^1 dx\int_0^1 ds\int_0^1 dt\,\times \\ &\times \sum_{k,n=1}^{3} a_k a_n B_{Mol}, \\ B_{Mol}^{(++)} &= \left[x(1-x)[s^2+(1-s)^2] - \frac{1}{2}\right]\times \\ &\times\left[Q(t,s) + 2\ln\left(1 + \frac{i\mu}{sf(t)}\right)\right], \\ B_{Mol}^{(+-)} &= s^2x(1-x)Q(t,s), \end{aligned} \tag{66}$$

где по-прежнему $\mu = m^2/[2\omega x(1-x)]$ и введены обозначения

$$\begin{aligned} f^2(t) &= tb_k^2 + (1-t)b_n^2 + \Delta^2 t(1-t), \\ Q(t,s) &= \frac{\Delta^2 t(1-t)}{f(t)}\left[\frac{s}{i\mu + sf(t)} - \frac{1}{f(t)}\right]. \end{aligned} \tag{67}$$

Для кулоновского потенциала получаем $M_{\rm II}^C$ в форме (66), где сумма

$$\sum_{k,n} a_k a_n B_{Mol}$$

заменяется величиной B_C, для которой имеем

$$\begin{aligned} B_C^{(++)} &= \left[x(1-x)[s^2+(1-s)^2] - \frac{1}{2}\right]\times \\ &\times\left[g(s,t) - 1 - 2\ln g(s,t)\right], \\ B_C^{(+-)} &= s^2x(1-x)\left[g(s,t) - 1\right], \\ g(s,t) &= \left[1 + \frac{i\lambda}{2s\sqrt{t(1-t)}}\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{68}$$

где $\lambda = 2\mu/\Delta = m^2/[\omega\Delta x(1-x)]$. Заметим, что при $\Delta \sim m$ величина $M_{\rm II}^{Mol}$ совпадает с $M_{\rm II}^C$ с точностью до малых членов порядка b_n^2/Δ^2. В свою очередь при $\Delta \sim m$ величина B_C оказывается малой (порядка m/ω), что в явном виде подтверждает сделанное выше общее заключение о необходимости учитывать $M_{\rm II}$ лишь для $\Delta \ll m$. Сделав замену переменных $t \to (1+\sqrt{1-t^2})/2$, интегрируя по частям по t член пропорциональный логарифму в $B_C^{(++)}$ и выполняя интегрирование по x и s не содержащих $g(s,t)$ членов, находим

$$\begin{aligned} M_{\rm II}^C &= \frac{4i\alpha(Z\alpha)^2\omega}{m^2}\times \\ &\times\left[\int_0^1 dx\int_0^1 ds\int_0^1 dt F(s,t,x) + R_{\rm II}\right], \\ F^{(++)}(s,t,x) &= \left[x(1-x)[s^2+(1-s)^2] - \frac{1}{2}\right]\times \\ &\times\frac{s(2-t^2)}{\sqrt{1-t^2}(i\lambda + st)}, \\ F^{(+-)}(s,t,x) &= \frac{s^3t^2x(1-x)}{\sqrt{1-t^2}(i\lambda + st)}, \\ R_{\rm II}^{(++)} &= -\frac{7}{9}\left[1 + \ln\left(\frac{im^2}{2\omega\Delta}\right)\right] - 2, \\ R_{\rm II}^{(+-)} &= -\frac{1}{18}. \end{aligned} \tag{69}$$

Для получения полной амплитуды процесса рассеяния фотона в поле кулоновского центра при $\Delta \ll m$ надо сложить (69) с соответствующей асимптотикой вклада $M_{\rm I}$ (52). Поскольку полученное нами выражение для $M_{\rm I}^C$ совпадает с результатом работы [12], можно непосредственно воспользоваться формулой (17) из [12]. Окончательно находим

$$\begin{aligned} M^C(\Delta \ll m) &= \frac{4i\alpha(Z\alpha)^2\omega}{m^2}\times \\ &\times\left[\int_0^1 dx\int_0^1 ds\int_0^1 dt F(s,t,x) + R\right], \\ R^{(++)} &= \frac{7}{9}\times \\ &\times\left[\ln\left(\frac{2\omega}{m}\right) - \frac{i\pi}{2} - \frac{109}{42} - C - \operatorname{Re}\Psi(1+iZ\alpha)\right], \\ R^{(+-)} &= 0, \end{aligned} \tag{70}$$

где функции $F(s,t,x)$ определены в (69), $C = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера, $\Psi(y) = d\ln\Gamma(y)/dy$ — логарифмическая производная гамма-функции. Выражение (70) совпадает с формулой (8.1) работы [8], если в последней исправить очевидные опечатки: убрать лишний множитель 4 перед интегралом в (8.1) и изменить знак кулоновской поправки $C + \mathrm{Re}\,\Psi(1+iZ\alpha)$ во внеинтегральном члене.

Итак, найденное нами с помощью квазиклассического операторного метода выражение для амплитуды малоуглового ($\Delta \ll \omega$) упругого рассеяния фотона высокой ($\omega \gg m$) энергии для произвольного локализованного потенциала воспроизводит, в частности, все известные в литературе результаты. Развитый способ усреднения произведений некоммутирующих операторов позволяет использовать квазиклассический операторный метод для изучения разнообразных процессов КЭД в локализованном внешнем поле.

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-02-18007).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Байер, В. М. Катков, ЖЭТФ **53**, 1478 (1967).

2. V. N. Baier, V. M. Katkov, and V. M. Strakhovenko, *Electromagnetic Processes at High Energies in Oriented Single Crystals*, World Scientific, Singapore (1998).

3. W. Furry, Phys. Rev. **46**, 391 (1934).

4. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).

5. Sh. Zh. Akhmadaliev, G. Ya. Kezerashvili, S. G. Klimenko et al., Phys. Rev. C **58**, 2844 (1998).

6. A. I. Milstein and M. Schumacher, Phys. Rep. **243**, 183 (1994).

7. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. **182**, 1873 (1969).

8. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. D **2**, 2444 (1970).

9. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. D **5**, 3077 (1972).

10. А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **85**, 14 (1983).

11. Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн, ЖЭТФ **107**, 1393 (1995).

12. Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **116**, 78 (1999).

13. G. Z. Molière, Z. Naturforsch. **2a**, 133 (1947).