

# О СТОХАСТИЧЕСКОМ ПЕРЕМЕШИВАНИИ, ВЫЗВАННОМ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ РЭЛЕЯ–ТЕЙЛОРА

*Н. А. Иногамов<sup>a</sup>, А. М. Опарин<sup>b,\*</sup>, А. Ю. Демьянов<sup>c</sup>,  
Л. Н. Дембицкий<sup>c</sup>, В. А. Хохлов<sup>a</sup>*

<sup>a</sup> *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

<sup>b</sup> *Институт автоматизации проектирования Российской академии наук  
123056, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Московский физико-технический институт  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 5 сентября 2000 г.

Рассматривается процесс перемешивания контактирующих веществ. Численно исследована эволюция слоя перемешивания в течение продолжительного промежутка времени от многомодовых начальных возмущений в короткомасштабном и широкодиапазонном случаях. При короткомасштабной инициации течения является случайным в том смысле, что время представляющей интерес эволюции превышает время корреляции. Изучено влияние амплитуды широкодиапазонных возмущений на динамику перемешивания. Впервые исследованы масштабнo-инвариантные свойства спектральных и статистических характеристик турбулентного перемешивания. Найдены универсальные спектры, единым образом характеризующие турбулентность на всем автомодельном интервале. Моделирование основано на апробированных ранее эффективных алгоритмах с хорошими аппроксимирующими качествами.

PACS: 47.20.Bp, 47.27.Eq, 47.52.+j

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рэлей-тейлоровской называется неустойчивость гидростатического равновесия, при котором плотность в горизонтальных слоях увеличивается с высотой (тяжелое над легким) [1–4]. Проблема имеет широкий круг приложений в астрофизике и физике высоких плотностей энергии [1–4]. Достаточно отметить проведенные и планируемые эксперименты по изучению перемешивания на имеющихся и строящихся мощных лазерных системах, таких как «Искра-5» (Россия), NIF (США), LIL, LMJ (Франция). Ввиду важности и сложности проблемы ей посвящено большое количество работ (см. обзоры в [1–4]). Изложим вкратце известные представления. Это позволит подчеркнуть то новое, что предлагается в настоящей работе. Из-за вызванного рэлей-тейлоровской неустойчивостью перемеши-

вания горизонтальный скачок плотности между двумя чистыми веществами размывается в турбулентную переходную зону. Если «микромасштабы»  $\lambda_{micr}$  (вязкость, диффузия, капиллярность) малы, а внешние масштабы (сжимаемость и высота однородной атмосферы, размер кюветы или расчетной области) велики, то турбулентное перемешивание становится автомодельным. При этом толщина перемешанной зоны растет асимптотически по квадратичному закону:

$$\begin{aligned} h &= \alpha At gt^2, & h &= h_+ + h_-, \\ \alpha &= \alpha_+ + \alpha_-, & As &= \frac{h_-}{h_+} = \frac{\alpha_-}{\alpha_+}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $At = (1 - \mu)/(1 + \mu)$  — число Атвуда,  $\mu = \rho_l/\rho_h < 1$  — отношение плотностей легкой и тяжелой жидкостей,  $g$  — ускорение,  $h_+$ ,  $h_-$  — глубина пенетрации соответственно в тяжелую и легкую жидкости,  $As$  — коэффициент асимметрии. Тяжелая и легкая жидкости поступают в зону перемешивания

\*E-mail: oparin@landau.ac.ru

соответственно через верхнюю и нижнюю границы зоны. Средняя по зоне объемная доля тяжелого вещества равна  $1/As$ .

## 2. ДОМИНИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СТРУКТУР

Одно направление исследования перемешивания основано на теории пути турбулентного перемешивания и одномерных  $K$ - и  $K - \varepsilon$ -моделях [5, 6]. Турбулентный перенос аппроксимируют диффузионным потоком в виде закона Фика. Из феноменологических соображений составляют выражения для длины пути турбулентного перемешивания  $l_t$  и турбулентных скоростей  $w_t = \sqrt{(l_t \partial \ln \rho / \partial z) g l_t}$ , входящих в коэффициент турбулентной диффузии  $D_t = l_t w_t / 3$ , где  $z, w$  и  $x, y, u, v$  — вертикальные и горизонтальные (поперечные к ускорению  $\mathbf{g}$ ) координаты и скорости. При одномерном подходе мгновенный профиль плотности  $\rho$  зависит только от координаты  $z$ . Он похож на функцию арктангенса с типичным для диффузии колоколообразным профилем производной  $\rho'_z$ .

В молекулярно-кинетической теории существенной характеристикой является число Кнудсена<sup>1)</sup>, аналог которого в теории пути перемешивания это отношение  $\text{Kn}_t = l_t / h_+$ . Феноменологические коэффициенты подбираются из сравнения с экспериментом. Длина  $l_t$  порядка масштаба характерных структур в слое перемешивания. Из анализа экспериментальных данных следует, что  $\text{Kn}_t \sim 1$ , тогда как для применимости диффузионного приближения требуется  $\text{Kn} \ll 1$ . Темп расширения зоны (или слоя) перемешивания определяется поперечными структурами. Действительно, генерация движения вызвана обменами или перестановками тяжелой и легкой жидкостей. Такие перестановки невозможны без образования поперечных структур. Оказывается, чтобы обеспечить необходимый темп вертикального расширения, характерный масштаб структур не может быть мелким по сравнению с толщиной  $h_+$ . Исследованию этих важнейших крупных или доминирующих структур посвящена данная работа. В автомодельном пределе (1) структуры также становятся автомодельными.

В разделе 3 описана геометрия слоя перемешивания. В разделах 4, 5 и 6 даны основные определения и краткие сведения об использованных численных методах. В разделах 7 и 8 рассматриваются пере-

ходные процессы. Вопросам масштабной инвариантности посвящены разделы 9, 10 и 11. В разделах 12, 13 приводятся результаты для эволюции спектров. В разделах 14, 15 и 16 описаны автомодельные замены. В разделах 17 и 18 обсуждаются вопросы отделения случайной составляющей. Разделы 19–21 посвящены сравнению теоретических оценок спектров с результатами расчетов. В разделах 22–24 даются динамические оценки, связанные с масштабами поперечных структур. Сравнительному анализу двумерных и трехмерных случаев посвящен разд. 25. В разделе 26 рассмотрены спектры и статистика случайных-периодических функций, моделирующих зависимость флуктуирующих функций от горизонтальной координаты. Вопросы стимуляции перемешивания и торможения боковыми границами исследуются в разделах 27 и 28.

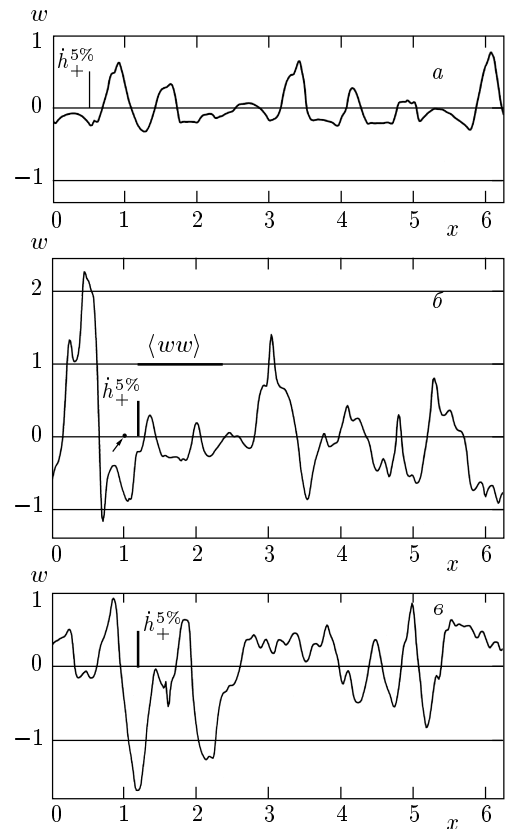
## 3. ОБМЕН ВО ВСТРЕЧНЫХ СТРУЯХ. КАСКАДНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ

На рисунках 1 и 2 представлены результаты типичного расчета. Ясно видна горизонтальная структура, состоящая из чередующихся колонок, в которых тяжелое вещество оседает вниз, а легкое всплывает вверх. Для сопоставления распределений  $\rho$  и  $\mathbf{v}\{u, v, w\}$  и подчеркивания корреляции между  $\rho$  и  $w$  на рис. 1 отмечено положение одной из струй тонущего тяжелого вещества ( $x \approx 1.03, z \approx 0$ ). Горизонталь  $z = 0$  дает начальное положение границы раздела. На верхней и нижней границах расчетной области поставлены условия непротекания. Влияние сжимаемости мало: число Маха  $\dot{h}_+ / c_h \sim 0.1$ ,  $c_h$  — скорость звука в тяжелом веществе. На боковых границах выполняются условия периодичности.

Рисунок 1 подчеркивает существование поперечной переменности (горизонтальной цепочки вытянутых по вертикали колонок). Конечное ускорение темпа расширения зоны перемешивания  $\dot{h}_+$  обеспечивается утолщением колонок с течением времени. Пусть  $\bar{\lambda}$  — средняя поперечная толщина пары смежных колонок<sup>2)</sup>,  $\bar{\lambda} \approx h_+$ . Длина вертикальных отрезков  $h_+^{5\%}$ ,  $h_+^{6\%}$  на рис. 1а, б и белых горизонтальных отрезков  $h_+^{5\%}$  вверху на рис. 1а, б, вычислена по формуле (1) с  $\alpha_+ = 0.05, \alpha_- = 0.06$ . Рисунок 2, на котором представлены профили вертикальной компоненты скорости в различных сечениях, дополняет рис. 1в. В верхней части (зоне пенетрации в тяжелое вещество) скорости невелики. Быстрые движения происходят

<sup>1)</sup> Отношение длины свободного пробега к геометрическому масштабу.

<sup>2)</sup> О процедуре усреднения и разбросе около среднего — ниже.

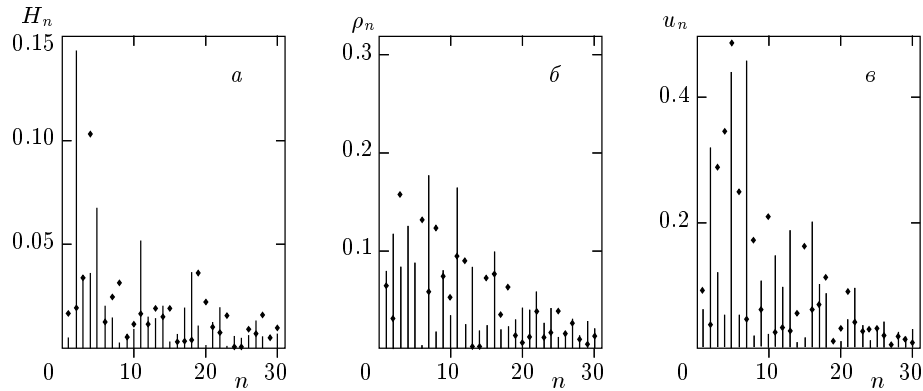


**Рис. 2.** Вертикальная компонента скорости  $w(x, z, t = 6)$  в горизонтальных сечениях на уровнях  $z$ , отмеченных стрелками на рис. 1в: *a* — верхний срез  $z = 0.7 h_+^{5\%}$ , *b* — средний срез  $z = 0$ , *в* — нижний срез  $z = -h_-^{6\%}$

**Рис. 1.** Эволюция 2D-течения (*a, б*) (после короткомасштабной инициации) и соответствие между мгновенным распределением  $\rho(x, z, t)$  (*б*) и полем скорости (*в*): *a, б*. Плотности  $\rho_h = 1$  (черный цвет) и  $\rho_l = 0.1$  (белый цвет), интенсивность серого цвета (палитра 30 оттенков) указывает на величину плотности,  $\rho_l \leq \rho \leq \rho_h$ . Внизу черными отрезками различной толщины указаны корреляторы  $K_w$  (тонкий) и  $K_H$  (толстый) (см. рис. 4). *в*. Трехцветное поле вертикальной компоненты скорости  $w(x, z, t = 6)$ . Серым цветом отмечены зоны покоя и относительно медленных движений ( $-w_s < w < w_s$ ,  $w_s = 0.8 h_+^{5\%}$ ). Белым цветом отмечены области, в которых  $w > w_s$ , а черным — области с  $w < -w_s$

в нижней части зоны перемешивания. Это хорошо видно и на рис. 1в. Отметим асимметрию струй тяжелой и легкой жидкостей на уровне  $z = 0$ . Восходящие струи уже и быстрее,  $\mu = 1/10$ . Эта асимметрия уменьшается при сближении плотностей  $\rho_l$  и  $\rho_h$ . В расчете с  $\mu = 1/3$  распределение  $w(x)$  примерно инвариантно к инверсии относительно вертикального направления  $w \rightarrow -w$ .

Наиболее важной особенностью эволюции является укрупнение структур со временем. Оно проявляется в росте поперечного масштаба  $\bar{\lambda}$  со временем  $t$ . В расчете приняты значения  $g = 1$ ,  $L_\perp = 2\pi$ , где  $L_\perp$  — поперечный размер расчетного «ящика». Отсюда ясны единицы измерения времени. Иерархия последовательных укрупнений называется инверсным, или обратным каскадом [3, 4]. Такой термин принят для того, чтобы подчеркнуть отличие от колмогоровского каскада дроблений в сторону высоких частот.



**Рис. 3.** Спектры  $H, \rho, u$  в средней плоскости  $z = 0$ , в которой при  $t = 0$  находилась контактная граница:  $a$  — амплитуды  $H_n(t = 6)$  разложения в ряд Фурье массы столба  $H(x, t)$ , характеризующей флуктуации плотности, связанные с колонками тяжелой (большие значения  $H$ ) и легкой (малые  $H$ ) жидкостей,  $b$  — спектр плотности  $\rho(x, z = 0, t = 6)$ ,  $v$  — спектр вертикальной скорости  $w(x, z = 0, t = 6)$ . Спектр из вертикальных отрезков относится к расчету с числом узлов по горизонтали  $N_x = 400$ , спектр из маркеров —  $N_x = 600$

**4. СПЕКТРЫ И КОРРЕЛЯТОРЫ. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ДЛИНА**

Турбулентное перемешивание в среднем инвариантно относительно сдвигов по горизонтали. Поэтому представляет интерес построение спектров переменных по пространственной координате  $x$ . «Бугры» на таких спектрах указывают на существование выраженных поперечных структур. На рисунке 3 представлены фурье-спектры  $H, \rho$  и  $w$  в момент  $t = 6$ , к которому относятся рис. 1б, в и рис. 2, где  $H(x, t) = [\int \rho(x, z, t) dz] / (\rho_h - \rho_l)$  — масса, содержащаяся в вертикальном столбе, интеграл берется от «дна»  $z = -h_{down}$  до «потолка»  $z = h_{up}$  ящика. Спектр  $w_n(z = 0, t = 6)$  вычислен по функции  $w(x, z = 0, t = 6)$ , график которой приведен на рис. 2б,

$$w_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad a_n = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} w c_{nx} dx,$$

$$b_n = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} w s_{nx} dx,$$

$$w(x, \dots) = \sum (a_n c_{nx} + b_n s_{nx}), \quad c_{nx} = \cos nx,$$

$$s_{nx} = \sin nx.$$

На рисунке 4 даны графики корреляторов (корреляция между колонками)

$$K_w(x, z, t) = \langle ww \rangle =$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} w(x', z, t) w(x' - x, z, t) dx'}{\int_0^{2\pi} [w(x', z, t)]^2 dx'}$$

$$K_H(x, t) = \langle HH \rangle \quad (2)$$

при  $z = 0, t = 6$ . Коррелятор (2) является четной функцией,  $K(x) = K(-x)$ , с периодом  $L_{\perp} = 2\pi$ , поэтому нет смысла изображать его график на интервале большем, чем  $0 < x < L_{\perp}/2$ . Свойства четности и периодичности функции  $K(x)$  на «длинном» отрезке  $L_{\perp}$  «навязаны» периодическими граничными условиями на боковых границах расчетной области. Отрезок  $L_{\perp}$  назван здесь длинным, поскольку интерес представляют характеристики коррелятора на одной — двух определенных ниже корреляционных длинах  $l_{corr}$ , пока корреляционная длина мала по сравнению с расчетным отрезком  $L_{\perp}$ . На поздних стадиях устанавливается полная корреляция поперек расчетной области,  $l_{corr} \approx L_{\perp}$ . При этом течение сильно «стеснено» боковыми границами. По вертикали на поздней стадии перемешивание скоррелировано на масштабе порядка  $L_{\perp}$ . Интересный пример поздней стадии перемешивания в вытянутом по вертикали ящике с зигзагообразной структурой внутри приведен в работе [7].

Функции  $\rho$  и  $w$  хорошо скоррелированы по вертикали (корреляция вдоль колонки). Это ясно из рис. 1 и сравнения рис. 2а, 2б и 2в, представляющих собой срезы на разных горизонталях, отмеченных стрелками на рис. 1в. На стадии, далекой от «стесненной», высота колонок мала по сравнению с поперечным

масштабом  $L_{\perp}$ .

Будем называть корреляционной длиной ( $\lambda_K$ ) расстояние до второго максимума от центра  $x = 0$  (первый максимум находится в центре). С этой длиной связано одно из определений среднего размера поперечной структуры. При таком определении средний размер характеризуется суммарной шириной по горизонтали двух соседних колонок, по одной из которых вещество опускается вниз, а по другой поднимается вверх<sup>3)</sup>. Важно, что в случае строго периодического чередования колонок эта длина равна периоду течения. Таким образом, данное определение представляет собой естественное обобщение на случайно-периодический случай, когда точного периода нет, а типичный масштаб имеется; описание случайно-периодических функций см. в [3, 4]. Выбор масштаба по общей ширине соседних колонок представляется более оправданным, чем его определение по полувысоте первого пика коррелятора, имеющего максимум в центре  $x = 0$ . Дело в том, что при таком определении данный масштаб имеет правильную асимптотику в пределе периодических функций.

Длины  $\lambda_K$ , найденные по функциям  $K_w$  и  $K_H$  на моменты времени  $t = 4$  и  $t = 6$ , даны соответственно в виде тонкого и жирного горизонтальных отрезков внизу на рис. 1а, б. Это сделано для того, чтобы обеспечить перекрестное сопоставление по-разному определенных размеров.

### 5. ВАРИАЦИИ ВЫСОТЫ «ЯЩИКА», ОТНОШЕНИЯ ПЛОТНОСТЕЙ И РАЗМЕРА РАЗНОСТНОЙ СЕТКИ

Из фурье-образов (рис. 3) и корреляторов (2) (рис. 4) извлекается информация о статистике поперечных структур. Прежде чем перейти к спектральной статистике, скажем кратко о численной процедуре. Были проведены серии расчетов, в которых варьировалась амплитуда и горизонтальный масштаб начальных шумов. Таким образом, был исследован вопрос о переходе от начальной к авто-модельной стадии. Проводились расчеты в 2D- и 3D-геометриях. Здесь приводятся результаты, полученные в двумерном случае, по которому накоплен обширный материал. В расчетах варьировался размер разностной сетки (число узлов  $N_x$  на отрезке оси  $x$  от 100 до 600). Менялась высота ящи-

ка  $h_{box} = h_{down} + h_{up}$  (варианты с  $h_{box}/L_{\perp}$  от 2 до 14; отношение  $h_{down}/h_{up}$  обычно было 3:2 или 5:4). Менялось отношение плотностей: варианты с большим ( $At \approx 1$ ,  $\mu = 1/10$ ), средним ( $At < 1$ ,  $\mu = 1/3$ ) и малым контрастом  $\rho$  ( $At \approx 0$ ,  $\mu = 1/1.2$ , режим Буссинеска). Расчеты проводились с помощью двух численных кодов. В одном использовался метод крупных частиц Белоцерковского и Давыдова [8–10], а в другом — квазимонотонная сеточно-характеристическая схема второго порядка аппроксимации [8–10]. Сеточно-характеристический метод проверялся путем сравнения с двух- и трехмерными аналитическими решениями одномерной задачи [11] и путем сравнения с двух- и трехмерными тестовыми задачами, предложенными на марсельской [12] и предшествующих конференциях по сжимаемому турбулентному перемешиванию.

### 6. КОРОТКОМАСШТАБНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ И ИНЕРЦИОННЫЙ ЗАЗОР

Рисунки 1–4 иллюстрируют развитие перемешивания после старта от короткомасштабных начальных возмущений. При  $t = 0$  задавалось приповерхностное поле скоростей вида

$$\mathbf{v} = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \sum \varphi_n, \quad (3)$$

$$\varphi_n = \text{sign } z (a_n^0 \cos nx + b_n^0 \sin nx) e^{-n|z|/n}.$$

В начальный момент граница контакта совпадает с горизонталью  $z = 0$ . Короткомасштабные моды имели волновые числа  $n$  ( $k_n = 2\pi/\lambda_n = n$  при  $L_{\perp} = 2\pi$ ) в диапазоне  $k_{sw1} < n < k_{sw3}$  с краями  $30 < n < 120$  или  $50 < n < 100$ . Амплитуды  $a_n^0, b_n^0$ , входящие в формулу (3), выбрасывались генератором случайных чисел (индекс 0 у амплитуд означает  $t = 0$ ). Максимум по модулю средней амплитуды находился в точке  $k_{sw2}$  с  $k_{sw2} = k_{sw1}$  или с  $k_{sw2}$  внутри отрезка  $[k_{sw1}, k_{sw3}]$ .

Важно, что между модой  $k_1$  с  $n = 1$  и с длиной волны  $\lambda_1$ , равной ширине «ящика»  $L_{\perp}$ , и короткомасштабным диапазоном имеется свободный от начальных возмущений зазор. Его логарифмическая ширина по удвоениям составляла  $N_{doubl} = \ln_2(k_{sw1}/k_1) = 5-6$ . Эта ширина определяет количество поколений парных «слияний» колонок или число удвоений масштаба [3, 4] и, соответственно, ширину инерционного интервала, в котором справедливы квадратичные зависимости (1). В этом инерционном интервале инверсный каскад идет в масштабно-инвариантном режиме.

<sup>3)</sup> Речь идет о связанных колонках и о прямом и возвратном токах. В несжимаемой жидкости возвратный ток компенсирует объем, ушедший вниз.

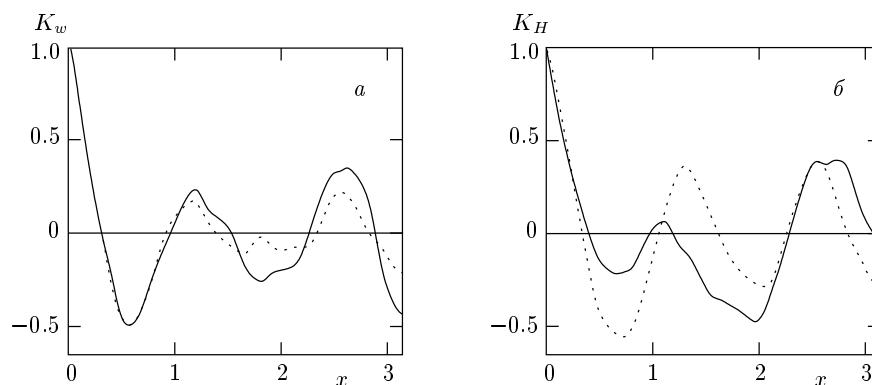


Рис. 4. Графики корреляторов вертикальной скорости  $K_w(x, z = 0, t = 6)$  и массы столба  $K_H(x, t = 6)$ . Сплошная кривая соответствует  $N_x = 400$ , штриховая —  $N_x = 600$ . Для оценки соответствия масштабы корреляционные длины нанесены в виде горизонтальных отрезков на рис. 1а, б

### 7. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ НА МАЛЫХ И ВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ НА КРАЯХ АВТОМОДЕЛЬНОГО ДИАПАЗОНА

Установление автомодельного режима при  $k \sim k_{sw}$  и его прекращение при  $k \sim k_1$  происходят постепенно. Отход от квадратичной автомодельности при  $k \sim k_1$  вызван «стеснением» течения боковыми граничными условиями. Стеснение перемешивания ведет к обеднению спектра и уменьшению представительности динамически существенных поперечных мод в распределении амплитуд по гармоникам  $f_n(z, t)$ , где  $f_n$  — фурье-образ одной из вычисляемых функций  $f(x, z, t) = (\rho, u, w, p)$ .

Боковинами расчетной области или экспериментальной кюветы порождается ряд динамических явлений. Ограничимся случаем, когда граничные условия сверху и снизу несущественны — кювета достаточно вытянута по вертикали. В связи с боковинами будем говорить о «горловине», о довольно раннем влиянии горловины при приближении к ней и о прохождении горловины. Скажем, что означает приближение к горловине. Имеется в виду приближение в пространстве волновых чисел. На языке мод к горловине относится мода  $k_1$  ( $n = 1$ ). Мгновенные поля переменных в зоне перемешивания можно описывать спектрами  $f_n$  по горизонтальным волновым модам  $k_n$ . Эти спектры оказываются довольно сосредоточенными, рис. 3. Пусть  $\bar{k}_n$ , или  $\bar{n}$  — обратный масштаб, около которого локализован спектр, т. е. сосредоточены существенные в данный момент времени амплитуды  $f_n$  («бугор» в спектре). С течением времени величина  $\bar{k}_n$  уменьшается (инверсный каскад). Соответственно спектр приближается к горловине  $k_1$ .

Из-за переходных процессов при  $k \sim k_{sw}$  и  $k \sim k_1$  реальная ширина автомодельного интервала  $N_{doubl}^{real} = N_{doubl} - (\Delta N_{sw} + \Delta N_1)$  меньше, чем  $N_{doubl}$ . Величины  $\Delta N_{sw}$  и  $\Delta N_1$  характеризуют потери, связанные с коротко- и крупномасштабными ограничениями. Увеличение величины  $N_{doubl}^{real}$ , необходимое для повышения точности исследования собственно автомодельного интервала, требует, во-первых, наращивания машинных ресурсов и, во-вторых, изучения переходных процессов на мелких и больших обрезаящих масштабах.

### 8. «ЗАБЫВАНИЕ» КОРОТКОМАСШТАБНЫХ ФАЗ — УСТАНОВЛЕНИЕ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ. ЗАДЕРЖКИ ИЗ-ЗА СХЕМНЫХ ЭФФЕКТОВ

Рассмотрим переходный процесс на больших волновых числах  $k \sim k_{sw}$ . Число ячеек сетки на длине волны  $\lambda_{sw1}/\Delta$  составляло от 4 до 15, где  $\lambda_{sw} = 2\pi/k_{sw}$ ,  $\Delta$  — пространственный шаг сетки. Например, в расчете, показанном на рис. 1, было  $\lambda_{sw1}/\Delta \approx 8$  (сетка  $400 \times 1000$ ). Установление автомодельного режима после короткомасштабного инициирования происходит в результате сложного процесса, заключающегося в усилении начальных возмущений до уровня нелинейного насыщения, а затем в усилении комбинационных гармоник, образующих «инфракрасное» крыло распределения амплитуд  $f_n$ .

В случае линейности начальных амплитуд грубая оценка продолжительности  $t_{trans}$  переходного

процесса дает

$$t_{trans} \approx (\gamma_{sw}^{code})^{-1} \ln(w_{sw}^{nonl} / \bar{w}_{sw}^0). \quad (4)$$

Здесь  $w_{sw}^{nonl} = 0.6\sqrt{(1-\mu)g/k_{sw}}$  — взятая для оценки предельная скорость подъема  $2D$ -пузырей в одномодовом режиме [11],  $\gamma_{sw}^{code} = \beta(\lambda_{sw}/\Delta)\gamma_{sw}$ ,  $\gamma_{sw} = \sqrt{Atgk_{sw}}$  — обычный инкремент рэлей-тейлоровской неустойчивости,  $\beta < 1$  — поправочный множитель, учитывающий стабилизирующее действие сеточной дискретизации. Его величина зависит от числа узлов, приходящихся на длину волны. При  $\lambda/\Delta \approx 1$  неустойчивость сильно стабилизируется,  $\beta \approx 0$ . При  $\lambda_{sw1}/\Delta = 3-6$  классический инкремент снижается в 1.5–3 раза.

Средняя начальная скорость коротковолновых возмущений дается выражением

$$\bar{w}_{sw}^0 = \sqrt{(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} [w(x, z=0, t=0)]^2 dx}.$$

Если в начальном спектре присутствовало  $N$  мод, то  $\bar{w}_{sw}^0 \sim \sqrt{N}\bar{c}_n^0$ , где  $\bar{c}_n^0 = \sqrt{(a_n^0)^2 + (b_n^0)^2}$ ,  $\sqrt{(a_n^0)^2} = \sqrt{(b_n^0)^2}$  — среднеквадратичная амплитуда начальных короткомасштабных шумов,  $N = k_{sw3} - k_{sw1}$  при  $L_{\perp} = 2\pi$ . Существенный множитель  $\sqrt{N}$ , связывающий величины  $\bar{w}^0$  и  $\bar{c}^0$ , возникает вследствие суммирования  $N$  случайных мод. В варианте, показанном на рис. 1, начальное возмущение  $\bar{w}_{sw}^0$  составляло примерно 2% от нелинейной скорости  $w_{sw}^{nonl}$ .

При небольших значениях числа  $\lambda_{sw}/\Delta$  происходит уменьшение эффективного значения начальной амплитуды скорости:

$$\bar{w}_{sw}^0 \rightarrow w_{eff}, \quad w_{eff} = \beta^t \bar{w}_{sw}^0, \\ \beta^t = \beta^t (\lambda_{sw}/\Delta) < 1,$$

которая определяет развитие неустойчивости согласно формуле (4). Это вызвано  $2\pi$ -эффектом и дискретизацией. Расстояние по вертикали  $h_e$ , на котором скорость (3) затухает в  $e$  раз, составляет  $\lambda/2\pi$ . Поэтому при  $\lambda_{sw}/\Delta = 3 \div 6$  получаем  $h_e = (0.5-1)\Delta$ . Это означает, что приповерхностный слой толщиной примерно  $h_e$ , в котором при  $t = 0$  сосредоточено поле скоростей, очень тонок по сравнению с шагом сетки  $\Delta$ . В этих условиях влияние сеточного огрубления существенно. Действие  $\beta$ - и  $\beta^t$ -факторов приводит к затягиванию переходного процесса. Итак, на продолжительность перехода  $t_{trans}$  (4) влияет число  $\lambda_{sw}/\Delta$ . При фиксированном значении  $k_{sw}$  на грубых сетках продолжительность

$t_{trans}$  больше. В сеточно-характеристическом методе  $t_{trans} \sim 1$  ( $\gamma_{sw1} = 1/6.4$ ) при  $N_x = 400$  (число узлов по горизонту) и  $k_{sw1} = 50$  (край короткомасштабного диапазона). Отметим, что при одинаковых параметрах переход в методе крупных частиц происходит быстрее, чем в сеточно-характеристическом методе.

### 9. ПОДОВИЕ И «СТАЦИОНАРНОСТЬ», ИЛИ УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ

В переходном процессе фазовая информация, сохранившаяся в высокочастотных модах, постепенно теряется. Процесс завершается установлением автомодельного течения, являющегося подобным, или универсальным и в этом смысле «стационарным» в соответствующих автомодельных переменных. Ценность автомодельности заключается именно в этой стационарности или универсальности и, следовательно, в относительной простоте перемешивания.

### 10. АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ ВЕРТИКАЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ

В рассматриваемом случае автомодельность является степенной (квадратичной). Стационарная (автомодельная) полная толщина слоя перемешивания равна  $H_{ss} = h/gt^2$ , индекс  $ss$  (self-similar) означает принадлежность автомодельному режиму. Стационарные скорость и ускорение расширения слоя, взятого в целом, определяются выражениями  $V_{ss} = \dot{h}/gt$  и  $G_{ss} = \ddot{h}/g$ . Толщина, скорость и ускорение расширения вверх перемешанного слоя тяжелой жидкости даются не зависящими от времени постоянными  $H_{ss}^+, V_{ss}^+, G_{ss}^+$ .

Указанные величины определяются двумя универсальными функциями отношения плотностей  $\mu$ . Запишем

$$H_{ss}^+ = \alpha_+ \frac{1-\mu}{1+\mu} = \alpha_+ At, \quad V_{ss}^+ = G_{ss}^+ = 2H_{ss}^+. \quad (5)$$

Множитель  $1-\mu$  в числителе соотношения (5) является точным. Он следует из закона Архимеда,  $g \rightarrow (1-\mu)g$ . Множитель  $1+\mu$  в знаменателе связан с инерцией легкой жидкости в смеси легкой и тяжелой жидкостей. Из натурных и численных экспериментов следует, что коэффициент  $\alpha_+$  в (1), (5) остается примерно постоянным при вариации отношения  $\mu$ . Точность современных экспериментов не позволяет уточнить слабую зависимость  $\alpha_+$  от  $\mu$ .

Поскольку для описания вертикальной структуры выбраны две геометрические характеристики  $h_+$  и  $h_-$  (1), то и универсальных функций, связанных с распределением по вертикали, две. Второй из них является функция  $H_{ss}^-(\mu)$ . Обычно вместо нее исследуют зависимость от  $\mu$  коэффициента асимметрии  $h_-/h_+ = As(\mu)$ ,  $H_{ss}^-(\mu) = \alpha_+ At As$  [3, 4].

### 11. АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ ИНВЕРСНОГО КАСКАДА

Каскад представляет собой последовательность логарифмических звеньев, или поколений, выстроенных иерархически наподобие геометрической прогрессии. Фиксируем некоторый момент времени  $t_f$ . Пусть  $\bar{k}_f = 2\pi/\bar{\lambda}_f$  — характерное волновое число горизонтальных структур в этот момент. Развитие во времени  $t > t_f$  заключается в насыщении (ограничение, прекращение роста и подавление) старших гармоник с  $k > \bar{k}_f$  и одновременно в усилении субгармоник с  $k < \bar{k}_f$  [3,4]. Следствием этого процесса является уменьшение величины  $\bar{k}$ . Одно звено каскада считается пройденным, когда обратный масштаб  $\bar{k}$  уменьшается в  $q$  раз, где  $q \approx 1$  — шаг геометрической прогрессии. Обычно говорят об удвоениях и берут  $q = 2$ , и для этого имеются определенные основания [3, 4]. В силу квадратичности автомодельности (1) шаг прогрессии по времени составляет  $t_{n+1}/t_n = \sqrt{q}$ .

Масштабная инвариантность каскада означает подобие поколений. Если сравнить мгновенные поля переменных  $(\rho_1, u_1, v_1, w_1, p_1)$  и  $(\rho_2, u_2, \dots)$  на моменты  $t_1$  и  $t_2$ , то они будут в среднем (с точностью до фаз) одинаковыми после преобразования подобия:

$$\begin{aligned} \langle \{ \rho_1(x, y, z), u_1(x, y, z), \dots, p_1(\dots) \} \rangle = \\ = \left\langle \left\{ \rho_2 \left[ \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^2 x, \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^2 y, \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^2 z \right], \right. \right. \\ \left. \left. \frac{t_1}{t_2} u_2 \left[ \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^2 x, \dots \right], \dots, \left( \frac{t_1}{t_2} \right)^2 p_2[\dots] \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Примеры трансформаций сжатия (6) приведены на рис. 5–8. Отвлекаясь от фазовой информации, видим, что имеется приближенное подобие полей плотности, рис. 5–7, и скорости, рис. 8. Отметим определенное остаточное влияние сетки. Автомодельно отмасштабированные пространственные размеры колонок по вертикали и горизонтали примерно одинаковы, ср. верхнее ( $t = 4$ ) и нижнее ( $t = 6$ ) поля на рис. 5. Из-за влияния сетки мелкая подструктура внутри доминирующих колонок при  $t = 6$  тоньше,

Рис. 5. Сравнение полей  $\rho(x, z, t)$  на моменты  $t = 4$  и  $t = 6$ . Координаты  $x, z$  отмасштабированы согласно (6), ср. с рис. 1а, б. Сетка  $400 \times 1000$ ,  $\mu = 1/10$ , сеточно-характеристический метод. Горизонтальными отрезками показан размер в 50 шагов сетки

ср. сетки  $400 \times 1000$  (рис. 5) и  $600 \times 1500$  (рис. 6). Рисунок 7 соответствует отношению плотностей  $\mu = 1/3$ , на рис. 5, 6 имеем  $\mu = 1/10$ .

Выше проведена определенная численная проверка выполнения критериев подобия. Показано, что вне начального (установление автомодельности) и конечного (влияние горловины, разд. 7) переход-



**Рис. 6.** То же, что и на рис. 5, но для более тонкой сетки  $600 \times 1500$

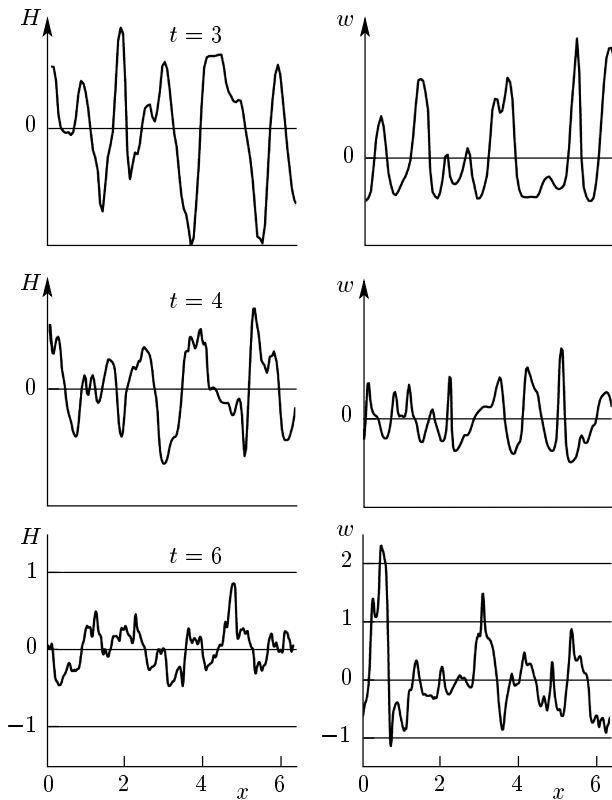
ных этапов эти критерии приближенно выполняются.

## 12. ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРОВ. НАЧАЛЬНЫЙ УЧАСТОК. МЕРА НЕЛИНЕЙНОСТИ НАЧАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В предыдущем разделе рассматривалась эволюция в обычных координатах (координатное представление, координатное пространство), но не только по вертикали, как в разд. 10, а по вертикали

**Рис. 7.** То же, что и на рис. 5, 6, при другом отношении плотностей  $\mu = 1/3$ ; сетка  $200 \times 500$

и по горизонтали. Перейдем к анализу развития по времени в пространстве волновых чисел (импульсное представление, импульсное пространство). На рисунке 9 приведена кинограмма, иллюстрирующая постепенную перестройку спектра. Спектр имеет вид бугра, локализованного около характерного обратного масштаба  $\bar{k} = 2\pi/\bar{\lambda}$ . В случае малых (линейных) начальных возмущений сначала происходит увеличение амплитуды начальных мод. Позиция бугра на оси  $n$  при этом неизменна (номера существенных мод не меняются) — увеличивает



**Рис. 8.** Горизонтальные профили  $H$  и  $w$  в сечениях на среднем уровне  $z = 0$  в моменты  $t = 3, 4$  и  $t = 6$ . Профили отмасштабированы по (6)

ся только его «высота». По достижении определенной высоты бугра (высота насыщения) дальнейший рост замедляется. Далее рост высоты сопровождается смещением бугра влево по оси  $n$ .

Пусть насыщение происходит при  $t \approx t_{sat}$ . При  $t > 0$  у бугра слева появляется инфракрасное, или субгармоническое крыло. Пока  $t \ll t_{sat}$ , его амплитуда мала по сравнению с амплитудой мод с  $k \approx k_{sw}$ . При  $t \approx t_{sat}$  амплитуды крыла и бугра сравниваются. Это и ведет к смещению бугра влево.

В случае насыщенных начальных амплитуд смещение влево начинается сразу. Это случай умеренных (средних) начальных возмущений или нелинейных с самого начала амплитуд. Величина амплитуды насыщения зависит от формы бугра и его ширины по  $n$ . Посмотрим, почему ширина спектрального диапазона, в котором сосредоточено начальное возмущение, влияет на амплитуду нелинейного насыщения. Рассмотрим прямоугольный бугор. Такой бугор составлен из мод примерно эквивалентной амплитуды, заполняющих спектральный диапазон  $k_{sw1} < k_n < k_{sw3}$ , где  $N = k_{sw3} - k_{sw1}$  — число мод в

начальном бугре. Считаем, что возмущение сосредоточено в спектральном диапазоне, не являющемся логарифмически широкодиапазонным:  $k_{sw3} \sim k_{sw1}$ , а не  $\ln(k_{sw3}/k_{sw1}) \gg 1$ . Фазы мод меняются случайно от моды к моде.

В случае одной моды ( $N = 1$ ) для оценки амплитуды насыщения по скорости примем скорость подъема периодических пузырей

$$\begin{aligned} w_{sat} &= w_b = F\sqrt{(1 - \mu)g/k_{sw}}, \\ k_{sw} &= k_{sw1} = k_{sw3}, \quad F \approx 0.6, \end{aligned} \tag{7}$$

см. [11] и список работ, цитируемых в [11],  $F^2$  — число Фруда. Для одной моды скорость подъема (7) по порядку величины совпадает с амплитудой гармоники [3, 4] (при  $t \sim t_{sat}$ ).

В случае многих мод ( $N \gg 1$ ) среднеквадратичная по пространству скорость

$$\bar{w} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [w(x, z = 0, t)]^2 dx} \tag{8}$$

существенно отличается от средней по бугру амплитуды  $\bar{w}_n$  [13, 14, 3, 4]. Для определенности в (8) взят средний срез  $z = 0$ . Ясно, что из-за сложения многих гармоник средняя по  $x$  скорость  $\bar{w}$  больше среднего по амплитуде  $\bar{w}_n$ . Если гармоники сфазированы, то вследствие интерференции имеем  $\bar{w} \sim N\bar{w}_n$ . Хорошо известно [13, 14, 3, 4], что при суммировании гармоник со случайными фазами сумма растет пропорционально корню из числа слагаемых:

$$\bar{w} \sim \sqrt{N}\bar{w}_n. \tag{9}$$

Действительно,

$$\left| \sum_{n=1}^N \exp(i\psi_n) \right| \approx \sqrt{N},$$

где  $\psi_n$  — случайная фаза на отрезке  $[0, 2\pi]$  (задача о блужданиях пьяницы или о диффузионном расплывании). Соответственно, грубая оценка амплитуды насыщения имеет вид

$$\bar{w}_{sat} \sim w_b, \quad \bar{w}_n \sim w_b/\sqrt{N}.$$

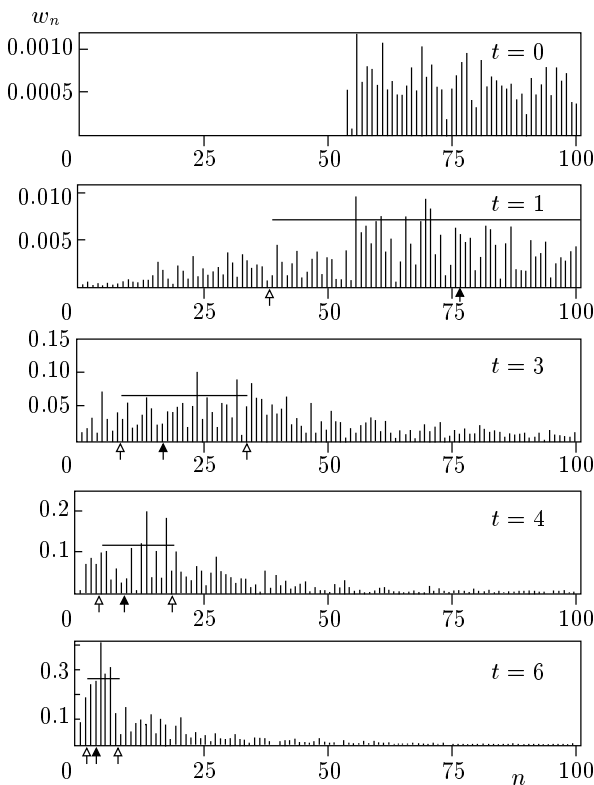
Эта формула следует из формулы (9). Здесь величина  $\bar{w}_{sat}$  вычисляется путем усреднения по формуле (8), а величина  $w_b$  дается формулой (7).

Кроме рассмотренных малых и средних по амплитуде начальных возмущений возможен случай больших начальных скоростей  $\bar{w}_0$ . Если величина  $\bar{w}_0$  значительно превышает  $w_{sat}$ , то на начальном участке влияние гравитации мало. При этом движение происходит в режиме перемешивания вследствие

неустойчивости Рихтмайера–Мешкова [15–20, 3, 4]. В этом режиме смещение по волновым числам  $n$  мало. Продолжительность начального участка порядка  $1/k_{sw}\bar{w}_0$ . За этот промежуток времени скорости рихтмайер-мешковского перемешивания уменьшаются до величин порядка  $w_{sat}$ . После этого начинается рэлей-тейлоровская эволюция.

**13. ЭВОЛЮЦИЯ В ЦЕЛОМ. ОБРАМЛЕНИЕ АВТОМОДЕЛЬНОГО УЧАСТКА**

Выделим автомодельный участок из эволюции в целом. Последняя состоит из начального, автомодельного и заключительного участков (всего три участка). Они представлены на рис. 9. При выбранных значениях плотности сетки ( $N_x = 200, 400, 600, L_{\perp} = 2\pi$ ), длины волны и амплитуды возмущения ( $k_{sw1} \approx 50$ , возмущение линейно) установление автомодельной стадии происходит при  $t_{begin} \approx 2.5/\sqrt{At}$ .



**Рис. 9.** Эволюция спектра вертикальной скорости. Приведены амплитуды  $w_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ . Шкала волновых чисел  $n$  общая. Черной стрелкой отмечен характерный обратный масштаб, а светлыми в два раза больший и меньший масштабы. Горизонтальной линией показана амплитуда насыщения

Заметное торможение перемешивания на горловине (разд. 7) начинается при  $t_{end} \approx (6 \div 7)/\sqrt{At}$ . Величина  $t_{end}$  слабо зависит от мелкомасштабных деталей (шага сетки и параметров короткомасштабного возмущения).

**14. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ В КООРДИНАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ**

Сделаем формальную замену

$$(x, z, t) \rightarrow (\hat{x}, \hat{z}, t), \quad f(x, z, t) \rightarrow \hat{f}(\hat{x}, \hat{z}, t), \quad (10)$$

$$f = (\rho, u, w, p),$$

$$\hat{x} = \frac{x}{gt^2}, \quad \hat{z} = \frac{z}{gt^2},$$

$$\rho(x, z, t) = \rho_h \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{z}, t),$$

$$u(x, z, t) = gt \hat{u}(\hat{x}, \hat{z}, t), \quad w(x, z, t) = gt \hat{w}(\hat{x}, \hat{z}, t),$$

$$p(x, z, t) = \rho_h g^2 t^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{z}, t).$$

Наборы переменных  $(x, z, t, f)$  и  $(\hat{x}, \hat{z}, t, \hat{f})$  эквивалентны. Они оба пригодны для описания течения общего (т. е. не обязательно автомодельного) вида. Автомодельные «координаты»  $\hat{x}, \hat{z}$  вместе со временем  $t$  необходимы для изучения установления и разрушения автомодельности. Установление и разрушение самоподобия происходит на начальном и заключительном участках соответственно (разд. 13).

Рассмотрим эволюцию зоны перемешивания в автомодельных переменных. Самоподобным является средний из трех участков (разд. 13). На нем в автомодельных переменных движение отсутствует (в среднем, с точностью до флуктуирующих фаз). В этом состоит «стационарность» (разд. 9, 10). В переменных  $(\hat{x}, \hat{z}, t, \hat{f})$  движение (т. е. зависимость от  $t$ , нестационарность) имеется на начальном участке. Движение «замирает» на автомодельном участке. При  $t_{begin} < t < t_{end}$  время  $t$  выпадает из набора аргументов  $(\hat{x}, \hat{z}, t)$  — переменные  $f$  становятся функциями только автомодельных «координат»  $(\hat{x}, \hat{z})$ . При  $t > t_{end}$  движение (нестационарность) возобновляется из-за приближения «горловины» (разд. 7).

На автомодельном участке в физических переменных  $(x, z, t, f)$  происходит укрупнение структур  $\bar{\lambda} \propto t^2$  и рост амплитуды флуктуаций  $u, w, p$  (амплитуда флуктуаций  $\rho$  не меняется). То, что эволюция сводится к преобразованию масштаба (скейлингу), и улавливается подстановками (10). Рассмотрим, например, случайно-периодическую функцию, относящуюся к вертикальной компоненте скорости

$w(x, z, t)$ . Шаг и амплитуда этой функции растут соответственно пропорционально  $t^2$  и  $t$ . Это продемонстрировано на рис. 8.

Отметим, что термин случайно-периодическая функция [3, 4] (или распределение) лучше, чем термин квазипериодическая функция, подходит к изучаемым нами мгновенным распределениям, флуктуирующим при смещении по горизонтали. Он адекватно характеризует возникающие структуры. Квазипериодической функцией называется конечная сумма периодических функций [21]. Она имеет качественно отличающиеся фурье-образ и коррелятор.

**15. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ**

Координатное и импульсное представления связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{ikx} f(x), \quad f(k) = a(k) + ib(k), \quad (11)$$

$$|f(k)| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$f(x) = \text{Re} \left[ \left( \int_{-\infty}^{\infty} dk \right)_s e^{-ikx} f(k) \right]. \quad (12)$$

Например,

$$w(x, 0, t) = \text{Re} \left[ \left( \int_{-\infty}^{\infty} dk \right)_s e^{-ikx} w(k, 0, t) \right]. \quad (13)$$

В (11), (12) и ниже  $f(x) \equiv f(x, z, t)$ ,  $f(k) \equiv f(k, z, t)$ . В импульсном представлении эквивалент замены (10) по волновому числу имеет вид

$$k \rightarrow \hat{k}, \quad \hat{k} = kgt^2. \quad (14)$$

Посмотрим, как преобразуются спектральные плотности (фурье-образы) искомым функций при автомодельной замене. Тут имеется тонкость, связанная с дельта-коррелированностью фурье-образа  $f(k)$  и особым характером интегрирования дельта-коррелированных функций. В случае гладких функций  $f(k)$  в автомодельном режиме разложение Фурье (13) имеет вид

$$\hat{w}(\hat{x}, 0) = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{k} e^{-i\hat{k}\hat{x}} \hat{w}(\hat{k}, 0),$$

$$w(k, 0, t) = g^2 t^3 \hat{w}(\hat{k}, 0),$$

где  $\hat{k}$  дается соотношением (14). В задаче о перемешивании спектральные функции  $f(k)$  далеки от гладких и автомодельная связь  $w(k) \propto t^3 \hat{w}(\hat{k})$  не имеет места. Правильным является соотношение  $w(k) \propto t^2 \hat{w}(\hat{k})$ , к выводу которого мы переходим.

В изучаемой нами проблеме  $w(x)$  является случайно-периодической функцией, а  $w(k)$  — дельта-коррелированной (игольчатой) [3, 4]. Чтобы подчеркнуть особый характер интегрирования таких сильно негладких функций, в (12), (13) введены скобки и индекс  $s$ . При замене интеграла пределом суммы следует заменить линейный дифференциал  $dk$  корневым  $\sqrt{dk}$  [3, 4]. Соответственно размерность спектральной плотности  $f(k)$  оказывается дробной (содержит полуцелую степень размерности длины).

Это обстоятельство имеет важное следствие, касающееся скейлинга автомодельных представителей искомым функций. Из-за корневого дифференциала спектральные плотности при автомодельной замене преобразуются по правилам

$$H(k, t) = g^{3/2} t^3 \hat{H}(\hat{k}, t),$$

$$\rho(k, z, t) = \rho_h \sqrt{gt} \hat{\rho}(\hat{k}, \hat{z}, t),$$

$$w(k, z, t) = g^{3/2} t^2 \hat{w}(\hat{k}, \hat{z}, t),$$

$$p(k, z, t) = \rho_h g^{5/2} t^3 \hat{p}(\hat{k}, \hat{z}, t),$$

где  $H$  — масса столба (разд. 4). В автомодельном режиме время выпадает и поэтому мы получаем

$$\hat{H}(\hat{k}) = \frac{H(k, t)}{g^{3/2} t^3}, \quad \hat{\rho}(\hat{k}, \hat{z}) = \frac{\rho(k, z, t)}{\rho_h \sqrt{gt}}, \quad (15)$$

$$\hat{w}(\hat{k}, \hat{z}) = \frac{w(k, z, t)}{g^{3/2} t^2}, \quad \hat{p}(\hat{k}, \hat{z}) = \frac{p(k, z, t)}{\rho_h g^{5/2} t^3}.$$

Соотношения (15) существенны. В частности, из (15) следует нетривиальный вывод о том, что максимальная спектральная амплитуда флуктуаций давления увеличивается пропорционально  $t^3$ . Эти соотношения позволяют приступить к исследованию вопроса об универсальных спектрах, описывающих перемешивание в автомодельном режиме. Спектры универсальны в координатах  $\hat{k}, \hat{f}$ .

Покажем, как выводятся соотношения (15). Рассмотрим для примера преобразование скорости на среднем срезе,  $z = 0$ . В автомодельном режиме имеем:  $w(x, 0, t) = gt \hat{w}(\hat{x}, 0)$ , (10). Разложение Фурье (13) при игольчатой спектральной плотности  $w(k, 0, t)$  записывается в виде

$$w(x, 0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{dk} e^{-ikx} w(k, 0, t). \quad (16)$$

Заменим в формуле (16)  $x \rightarrow \hat{x}$  и  $w(x)$  на  $\hat{w}(\hat{x})$  согласно (10);  $dk$  на  $d\hat{k}$  и  $k$  на  $\hat{k}$  согласно (14). В результате разложение (16) примет вид

$$\hat{w}(\hat{x}, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{d\hat{k}} e^{-i\hat{k}\hat{x}} \frac{w(k, 0, t)}{g\sqrt{gt^2}}. \quad (17)$$

По смыслу автомодельный аналог разложения (16) должен иметь вид

$$\hat{w}(\hat{x}, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{d\hat{k}} e^{-i\hat{k}\hat{x}} \hat{w}(\hat{k}, 0). \quad (18)$$

Сравнивая интегралы (17) и (18), находим, что автомодельная спектральная плотность  $\hat{w}(\hat{k}, 0)$  в (18) равна дробному выражению под интегралом (17). Отсюда следует преобразование для скорости, входящее в набор преобразований (15). Остальные выражения в этом наборе выводятся аналогично.

### 16. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В ЯЩИКЕ

Подкрепим формальный вывод важных соотношений (15) более наглядным. Рассмотрим перемешивание в ящике. Имеется разница между интегралом и рядом Фурье. Интеграл пишется для неограниченных систем с  $x \in (-\infty, \infty)$ . Для нас важен случай ящика и соответствующего ему разложения в ряд по ящичным модам  $\{k_n = n\}$ . Вывод соотношений (15) опирался на специфику интегрирования дельта-коррелированных функций,  $(f dk)_s = f \sqrt{dk}$ . Главное свойство спектральных плотностей  $f(k)$  и  $\hat{f}(\hat{k})$ , определенных через интеграл  $\int \sqrt{dk}$ , заключается в том, что они оказываются не зависящими ни от характера дискретизации оси  $k$ , ни от ограничений  $L_{\perp}$ ,  $L_{\perp} = \infty$  или  $L_{\perp} < \infty$  (это показано в [3, 4]). Поэтому они подходят для построения универсальных спектров. Определим аналог спектральных плотностей в ящике.

Далеко от горловины ( $\bar{\lambda} \ll L_{\perp}$ ) перемешивание в ящике не отличается от перемешивания в неограниченной системе. Фурье-спектр по  $x$  в зоне перемешивания  $-h_{-} < z < h_{+}$  имеет вид довольно широкого ( $\Delta k \sim \bar{k}$ ) бугра, расположенного около характерного волнового числа  $\bar{k}$  (разд. 4, 7, 12), рис. 3. В бугор попадают порядка  $\bar{k}/(k_{n+1} - k_n) = L_{\perp}/\bar{\lambda}$  эквидистантных ( $k_{n+1} - k_n = \text{const}$ ) ящичных мод. Важно, что далеко от горловины это число велико,  $L_{\perp}/\bar{\lambda} \gg 1$ . Рассмотрим большой  $l$  и малый  $s$  ящики с поперечными размерами  $L_l$  и  $L_s < L_l$ . Пока  $\bar{\lambda} \ll L_s$ , тече-

ния в ящиках, запущенные одновременно, статистически эквивалентны. Следовательно,  $f_l(x) = f_s(x)$ , где координатные функции  $f_l(x)$  и  $f_s(x)$  относятся к разным ящикам. В то же время амплитуды разложения в ряд Фурье функций  $f(x)$  в разных ящиках различны,  $(f_n)_l \neq (f_n)_s$ ,  $(f_n)_l < (f_n)_s$ . В этом состоит неудобство этих амплитуд. Ясно, что это вызвано разницей в количестве мод, попавших в бугор в разных ящиках, поскольку величина  $\bar{k}$  одинакова, а расстояние между уровнями  $k_n$  в большом ящике меньше. Аналог спектральной плотности (15), инвариантный по отношению к ширине ящика, нетрудно получить путем нормировки:

$$\tilde{f}_n = \frac{f_n}{\sqrt{\delta k}}, \quad \delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{L_{\perp}}. \quad (19)$$

Похожим образом обстоит дело при развитии во времени. Возьмем ящик  $L_{\perp} = 2\pi$ . Сравним моменты времени  $t_s$  и  $t_l > t_s$ ,  $\bar{\lambda}(t_l) \ll L_{\perp}$ . Из формул (10) известен скейлинг по времени автомодельных функций  $f(x)$  в координатном представлении. Например,  $w(x, 0, t) \propto t$ . Сравним спектральные бугры  $w(k, 0, t)$  при  $t_s$  и  $t_l$ . Число ящичных мод, накрываемых бугром  $t_l$ , меньше. Это вызывает дополнительное увеличение амплитуды  $w_n$ . Чтобы получить инвариантную величину, одинаковую во всех автомодельных поколениях укрупнения, необходимо скомпенсировать это увеличение.

Рассмотрим величину  $w(x, 0, t)/t$ . В автомодельном режиме она пропорциональна ускорению и постоянна, см. формулу (10). Рассмотрим амплитуду Фурье  $w_n(0, t)/t$  разложения этой величины в ряд Фурье. Построим ряд амплитуд не как функцию номера гармоники  $n$ , а как функцию автомодельного индекса (номера):

$$\hat{n} = nt^2. \quad (20)$$

Считаем, что  $g = 1$ ,  $L_{\perp} = 2\pi$ . Преобразование (20) обобщает преобразование (14) на случай ящика. В автомодельном режиме позиция бугра амплитуд  $w_{\hat{n}}(0, t)/t$  на оси  $\hat{n}$  неизменна. Пусть  $\hat{n}_{max}$  — положение максимума бугра, а  $\Delta\hat{n}$  — его спектральная ширина. В автомодельном режиме эти величины не зависят от времени.

В отличие от них амплитуды  $w_{\hat{n}}(0, t)/t$  растут со временем  $t$ . Это вызвано уменьшением числа мод на интервале  $\Delta\hat{n}$ . Расстояние между соседними модами на оси  $\hat{n}$  равно

$$\delta\hat{n} = (n + 1)t^2 - nt^2 = t^2. \quad (21)$$

Как видим, оно растет с  $t$ . Поэтому число мод в бугре порядка

$$N_{mod} = \frac{\Delta \hat{n}}{\delta \hat{n}} = \frac{\Delta \hat{n}}{t^2} \quad (22)$$

и уменьшается с  $t$ . Сумма фурье-гармоник  $w_n(0, t)/t$ , составляющих бугор, дает величину  $w(x)/t$ ,

$$\text{Re} \sum \frac{w_n(0, t)}{t} e^{-inx} = \frac{w(x, 0, t)}{t}. \quad (23)$$

В автомодельном режиме эта величина в среднем постоянна во времени. Очень важно то, что при  $N_{mod} \gg 1$  фазы соседних гармоник  $w_{\hat{n}}/t$  с номерами  $n$  и  $n + 1$  не скоррелированы между собой. Поэтому, чтобы обеспечить постоянство  $w(x)/t$  (23), амплитуды  $w_{\hat{n}}/t$  растут пропорционально  $1/\sqrt{N_{mod}}$ , где  $N_{mod}$  определяется формулами (21), (22). Чтобы скомпенсировать этот рост и получить требуемую инвариантную величину, необходимо, как и в случае (19), ввести спектральную плотность

$$\tilde{w}_{\hat{n}} = \frac{w_{\hat{n}}(0, t)/t}{\sqrt{\delta \hat{n}}} = \frac{w_{\hat{n}}(0, t)}{t^2}. \quad (24)$$

Формула (24) представляет аналог спектральных плотностей (19) и (15).

Формула (24) определяет спектральные автомодельные переменные в случае ящика. И так, в ящике универсальными являются спектры в переменных

$$\hat{n}, \tilde{f}. \quad (25)$$

Обобщая проделанный выше вывод для частного примера вертикальной скорости на среднем срезе  $z = 0, \hat{z} = 0$  на общий случай  $\tilde{f}(\hat{x}, \hat{z})$ , получим выражения для  $\tilde{f}_{\hat{n}}(\hat{z})$  и  $\tilde{H}_{\hat{n}}$  вида

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\hat{n}} &= \frac{H_n(t)}{t^3}, & \tilde{\rho}_{\hat{n}}(\hat{z}) &= \frac{\rho_n(z, t)}{\rho_h t}, \\ \tilde{w}_{\hat{n}}(\hat{z}) &= \frac{w_n(z, t)}{t^2}, & \tilde{p}_{\hat{n}}(\hat{z}) &= \frac{p_n(z, t)}{\rho_h t^3}. \end{aligned} \quad (26)$$

Условно можно сказать, что они получаются из формул (10) делением на  $\sqrt{\bar{n}}$ ,  $\bar{n} \propto 1/t^2$ . Например,  $H_n(t) \propto t^2 \tilde{H}_{\hat{n}}/\sqrt{\bar{n}}$ .

### 17. О ПРИНЦИПИАЛЬНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ СХОДЯЩЕГОСЯ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Быстродействие и объем памяти многопроцессорных ЭВМ быстро возрастают. В будущем это позволит существенно уплотнить сетки (увеличение  $N_x$ , уменьшение шага  $\Delta$ ), сократить шаг по времени (уменьшение числа Маха и эффектов сжимаемости на поздних стадиях) и, соответственно, расширить

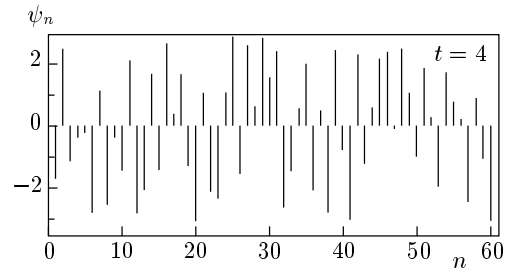


Рис. 10. Приведены фазы  $\psi_n = \text{arctg}(b_n/a_n)$  для вертикальной скорости  $w(x, z = 0, t = 4)$

автомодельный диапазон. Спрашивается, как правильно распорядиться растущими ресурсами (стратегия на перспективу)? Речь идет именно о фундаментальном, или теоретическом (сходимость описания автомодельности) аспекте проблемы, а не об инженерных приложениях. В последних всегда присутствуют детали, требующие дополнительных ресурсов. Ниже предложена уточняемая, или улучшаемая (и в этом смысле сходящаяся) процедура обработки результатов численного моделирования. Последовательные уточнения связаны с постепенным усилением ЭВМ. В основе процедуры лежит исследование статистических особенностей перемешивания, позволяющее отделить случайный шум и выявить главное в перемешивании. Этим главным является существование кластеров колонок (пузырей). Уточнению подлжит описание кластера и взаимодействия колонок внутри него.

Первичной продукцией любого моделирования (высококачественного в том числе) являются записи, хранящиеся в памяти ЭВМ, последовательности мгновенных полей (кадров)  $f(\mathbf{r}, t_i), t_1, t_2, \dots$ , аналогичных приведенным на рис. 1а, б. Посмотрим, как требуется построить обработку продукции в целях исчерпывающего (в перспективе) описания автомодельности.

Обработка состоит из трех этапов. На начальном этапе доказываем автомодельность перемешивания путем проверки выполнения условий статистического (т. е. в среднем, разд. 11, 14) самоподобия полей (6), (10). Примеры приведены на рис. 5–8. Видим, запись поля «длинная» (в идеале  $L_{\perp} \gg \bar{\lambda}$ ) и перегружена фазовой информацией. Последняя состоит из записей конкретных амплитуд и положений колонок на оси  $x$ .

На среднем этапе обработки данных сжимаем запись в широком ( $L_{\perp} \gg \bar{\lambda}$ ) ящике в запись на конечном отрезке. Это достигается путем перехода к импульсному представлению и фурье-образам. За-

мена возможна благодаря инвариантности к сдвигам в поперечном к ускорению  $\mathbf{g}$  направлении. В спектрах избыточная (фазовая) информация заключена в дельта-коррелированных флуктуациях фазы, рис. 10. В случае таких флуктуаций фаза гармоники в спектре меняется на большую величину  $\sim \pi$  при инфинитезимальном сдвиге волнового числа  $k$  в спектре [3, 4]. При численном моделировании получаются дискретные ряды Фурье. В случае рядов избыточная информация о взаимном фазовом расположении кластеров колонок содержится во флуктуациях фазы  $\psi_n$  на большую величину  $\sim \pi$  от одной соседней гармоники к следующей, рис. 10.

Фазовая информация не представляет интереса. Ее случайность вызвана затуханием коррелятора (рис. 4) при сдвиге на расстояние порядка нескольких ширин колонки. Фазы меняются на 100% от реализации к реализации. Это вызвано экспоненциальным разбеганием траекторий соответствующей динамической системы, из-за которого фазы скоррелированы во времени на промежутках продолжительностью порядка одного шага укрупнения (определения шагов  $q$  и  $\sqrt{q}$  см. в разд. 11). Этим объясняются различия рис. 5 и 6, полученные в расчетах с одинаковыми начальными данными и разными сетками. В будущем интересно было бы извлечь сведения о корреляционном времени из численных данных. Отношение  $q_{corr} = t_{lose}/t_{obs}$  характеризует продолжительность корреляции во времени. Здесь  $t_{obs}$  — произвольный момент времени, с которого начинается измерение корреляции,  $t_{lose}$  — момент, к которому корреляция потеряна,  $t_{lose} > t_{obs}$ . На автомодельной стадии отношение  $q_{corr}$  является постоянной величиной. Введение отношения  $q_{corr}$  требуется, поскольку продолжительность шага укрупнения сама растет во времени ( $\propto t^2$ ).

Задача о корреляции во времени непроста. Фиксируем произвольную точку  $x_f$  на срезе  $z = 0$ . Рассмотрим зависимость функции  $W(t) = w(x_f, z = 0, t)/t$  от аргумента  $t$ . На автомодельном участке эта функция знакопеременна, рис. 11. Пусть  $\Delta t_1$  — продолжительность одного из промежутков времени, в течение которого функция  $W(t)$  не меняла знака, например, была положительна. Следующий отрезок времени  $\Delta t_2$ , в течение которого эта функция положительна, будет в среднем в  $q_t$  раз продолжительнее, чем  $\Delta t_1$ . Отрезок  $\Delta t_3$  еще продолжительнее, в среднем имеем:  $\Delta t_3 = q_t^2 \Delta t_1$ . Ясно, что эта последовательность образует геометрическую прогрессию. Интересно было бы найти знаменатель этой прогрессии  $q_t$  и сравнить его с величинами  $q_{corr}$  и  $\sqrt{q}$ , разд. 11.

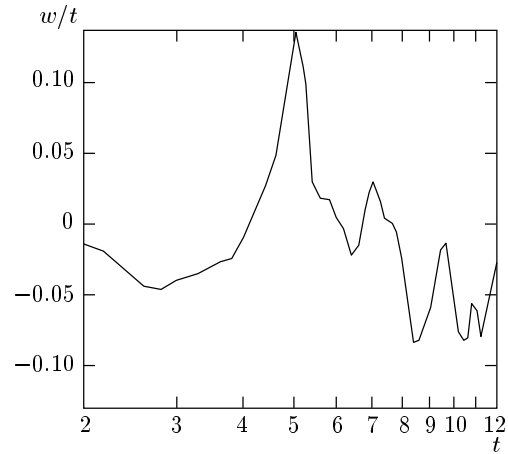


Рис. 11. Перемены знака крупномасштабных турбулентных флуктуаций. Представлена величина  $w(x_f, z = 0, t)/t$

На рисунке 11 построен график  $W(t)$ . Число перемен знака дает по порядку величины количество поколений укрупнения. Рассмотрим  $W(t)$  как функцию  $\ln t$ . Величина  $q_{corr}$  определяется коррелятором

$$K(\ln t) = \langle W(\ln t' - \ln t)W(\ln t') \rangle,$$

где усреднение ведется по  $\ln t'$ . Разумеется, чтобы вычислить такой коррелятор, требуется очень продолжительная автомодельная стадия со многими поколениями укрупнения, см. разд. 6, 7 и определения чисел  $N_{doubl}$ ,  $N_{sw}$  и  $N_1$ . Продолжительность этой стадии определяется мощностью ЭВМ.

Выше представлены начальный и средний этапы обработки данных, выявлены причины флуктуаций фазы. Важно избавиться от случайности, связанной с этими флуктуациями, поскольку она доминирует и, таким образом, заслоняет физически содержательную информацию. В этом и состоит заключительный этап обработки, к изложению которого мы переходим.

### 18. СГЛАЖИВАНИЕ МОДУЛЕЙ ФУРЬЕ-ОБРАЗОВ, ВЫЯВЛЕНИЕ КЛАСТЕРОВ

Выявим содержательную информацию. Для этого избавимся от фазовых флуктуаций, во-первых, переходя к модулю фурье-образа  $w_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  (отказываемся от случайной фазы  $\psi_n$ ) и, во-вторых, сглаживая флуктуации модуля. Типичные модуль  $w_n$  и фаза  $\psi_n$  гармоник показаны на рис. 9 и 10. Сглаживание модуля заключается в замене  $w_n$  на

среднее по соседним гармоникам  $\bar{w}_n$ . Вычисление среднего  $\bar{w}_n$  осуществляется по  $\Delta n_{intrn}$  соседним гармоникам. Чтобы подавить флуктуации, связанные со случайным перемешиванием кластеров, требуется  $\Delta n_{intrn} \gg 1$ .

Ясно, что для получения достаточно точных средних необходимы производительные ЭВМ, на которых можно моделировать логарифмически продолжительный ( $N_{doubl} = \ln_2 k_{sw1}/k_1$ ) автомодельный каскад, разд. 6, 7. Дело в том, что число гармоник в бугре  $\Delta n$  (разд. 7, 12) порядка  $L_\perp/\bar{\lambda}$ . Усреднение будет точным в пределе  $\Delta n \gg 1$ , поскольку  $1 \ll \Delta n_{intrn} \ll \Delta n$ .

Подробное описание автомодельного перемешивания содержится в сглаженных спектрах  $\bar{H}_n$ ,  $\bar{\rho}_n$ ,  $\bar{u}_n$ ,  $\bar{w}_n$ ,  $\bar{p}_n$  основных функций. Как сказано, эти спектры получаются путем трехэтапной обработки результатов численного моделирования. Качество спектров должно быть таково, чтобы можно было судить о форме бугра в спектре. Ниже мы приведем образцы сглаженных спектров. Графики сглаженных спектров должны строиться в автомодельных координатах, определенных в разд. 15, 16.

Выше обсуждался пример со средним срезом  $z = \hat{z} = 0$ . Для характеристики зоны перемешивания требуются спектры на нескольких срезах, например,  $\hat{z} = \pm 0.5h_+/gt^2$ . С усилением ЭВМ можно покрыть зону перемешивания —  $As h_+ < z < h_+$  более плотной последовательностью автомодельных ( $z_{cut} \propto \hat{z}_{cut} t^2$ , где  $z_{cut}$  — вертикальная координата плоскости среза) срезов. С усилением ЭВМ уточняется прорисовка спектрального бугра. В уплотнении срезов и уточнении прорисовки и заключается сходимость перспективной процедуры исследования автомодельного перемешивания.

Для сравнения отметим неупрощаемый в смысле сходимости характер теории пути турбулентного перемешивания. Эта феноменология может неплохо описывать вертикальный профиль. Тем не менее она всегда имеет погрешность, вообще говоря, порядка единицы.

Из сглаженных спектров, полученных на разной высоте среза, извлекается намного более содержательная информация о механике перемешивания по сравнению с информацией, заключенной в коэффициенте  $\alpha_+$ , (1), (5). Очень важно то, что сглаженные спектры тесно связаны с корреляторами (2) [3, 4] и кластеризацией нескольких соседних колонок. Они являются характеристикой, или мерой кластеризации. Например, протяженность левого крыла автомодельного бугра определяет число колонок в кластере. Степень, с которой амплитуда убывает в корот-

комасштабную сторону, связана с фрактальной размерностью. Обрыв спектра происходит на вязком, диффузионном, или сеточном масштабе.

Сглаженные автомодельные спектры универсальны (так же, как коэффициент  $\alpha_+$ ). Поэтому их расчеты необходимо привлекать для взаимного тестирования разных численных кодов.

## 19. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

Основными параметрами, которыми задается сглаженный автомодельный бугор в спектре, являются, во-первых, позиция максимума бугра  $\hat{n}_{max}$  на оси волновых чисел  $\hat{n}$ , во-вторых, максимальная амплитуда  $\hat{f}_{max}$  и, в-третьих, ширина бугра на полувысоте  $\Delta\hat{n}$ . Спектральные автомодельные переменные  $\hat{n}$ ,  $\hat{f}$  определены в разд. 15, 16 формулами (14), (15), (20), (25), (26). Оценим положение бугра на оси  $\hat{n}$ . Скорость подъема периодического (т. е. в вертикальной потенциальной трубе [11]) пузыря,  $w_b$ , дается формулой (7). В трубе постоянной ширины  $\lambda_{theor}$  в  $2D$ -случае имеем  $F \approx 0.6$ . Заменяем в (7)  $k_{sw}$  на  $k_{theor}$ . Приравняем скорость  $w_b(k_{theor})$  к скорости  $\dot{h}_+$ , см. разд. 10, формулы (1), (5) [22, 20]. В результате получим теоретическую оценку поперечного масштаба

$$\hat{k}_{theor}(\alpha_+, F) = \hat{n}_{theor} = n_{theor} t^2 = \frac{1}{4} \frac{F^2}{\alpha_+^2} \frac{(1+\mu)^2}{1-\mu}. \quad (27)$$

Оценим характерную амплитуду бугра  $(w_n)_{theor}$  в спектре вертикальной скорости. Величина  $\dot{h}_+$  дает типичную скорость; см. рис. 2, на котором эта скорость сравнивается со скоростями в колонках. Масштабно-инвариантные скорость или ускорение пропорциональны  $\dot{h}_+/t$ , разд. 14, уравнение (10). Распределим это автомодельное ускорение среди  $N_{mod}$  мод со случайной фазой, составляющих бугор. Согласно (9) имеем

$$2\alpha_+ At gt \approx (w_n)_{theor} \sqrt{N_{mod}}. \quad (28)$$

Запишем

$$N_{mod} \approx k_{max} = 2\pi/\lambda_{max}, \quad \lambda_{max} = \alpha_H At gt^2, \quad (29)$$

где аналогично коэффициенту  $\alpha_+$  введен коэффициент  $\alpha_H$ , относящийся к характерному горизонтальному масштабу. Подставляя  $N_{mod}$  из (29) в (28), получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_{\hat{n}})_{theor} &= \frac{(w_n)_{theor}}{t^2} \approx \\ &\approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\alpha_H}{\alpha_+}} \alpha_+^{3/2} At^{3/2} g^{3/2}. \quad (30) \end{aligned}$$



Если положить  $g = 1$ ,  $\alpha_+ = 5\%$  и  $\alpha_H = \alpha_+$ , то получим  $(\tilde{w}_{\hat{n}})_{theor} \approx 10^{-2} At^{3/2}$ . Оценки, аналогичные (30), можно вывести и для характерных спектральных амплитуд  $\tilde{H}_{\hat{n}}$ ,  $\tilde{\rho}_{\hat{n}}$ ,  $\tilde{p}_{\hat{n}}$  (26).

Ширину бугра теоретически оценить сложно. Вопрос о ширине связан с вопросом о кластерах колонок. Ниже попытаемся оценить ширину, сравнивая значение (27) и данные численного моделирования.

### 20. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПЕКТР. ДОАВТОМОДЕЛЬНАЯ И ПОСЛЕАВТОМОДЕЛЬНАЯ СТАДИИ

Эволюция спектра в автомодельных переменных  $\hat{n}$ ,  $\tilde{w}_{\hat{n}}$  показана на рис. 12. Эти кадры на те же моменты времени получены из кадров эволюции, представленных на рис. 9, путем замены (20), (26). С течением времени промежутки между гармониками на оси  $\hat{n}$  растут (21) и число мод в бугре  $N_{mod}$  убывает (22) (от густого к редкому спектру). В своем развитии процесс перемешивания проходит начальную, авто-

модельную и заключительную стадии, разд. 13. На начальной стадии спектр «сконденсирован» в «длинноволновой» — относительно автомодельных переменных — области (возле точки  $\hat{n} = 0$ ). Из-за конечных при  $t = 0$  скоростей этот спектр далек от автомодельного:  $\tilde{w}_{max} \rightarrow \infty$ ,  $\hat{n}_{max} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  (величины  $\tilde{w}_{max}$ ,  $\hat{n}_{max}$  определены в разд. 19). В результате переходного процесса длинноволновый спектр постепенно перемещается в среднюю область волновых чисел  $\hat{n}$  и трансформируется в автомодельный спектр.

Очень важно, что на автомодельной стадии устанавливается стационарный бугор в спектре, разд. 9. Это показано на рис. 12. Продолжительность автомодельной стадии и, соответственно, количество поколений в обратном каскаде, вообще говоря, могут быть сколь угодно велики. Они определяются числом узлов  $N_x$  и отношением  $N_{doubl} = \ln_2(k_{sw1}/k_1)$ , разд. 6. В приведенных выше расчетах наблюдалось  $N_{doubl}^{real} = 1.5-2.5$  удвоений, разд. 7. Все это время спектр остается стационарным в среднем. Сказанное означает, что стационарен сглаженный спектр. При этом индивидуальные гармоники живут своей жизнью. Гармоника приходит в стационарный бугор на рис. 12 слева из длинноволновой области. За время порядка жизни одного поколения гармоника проходит бугор слева направо и затем теряется в короткомасштабной области.

С течением времени запас гармоник в длинноволновой области исчерпывается. Бугор приближается к масштабу  $k_1$ , определяемому шириной ящика (горловина, разд. 7). При этом число мод снижается до величины  $N_{mod} \sim 1$ , (22). Квадратичная автомодельность заканчивается и начинается заключительный этап, на котором скорость перемешивания определяется боковыми условиями (стеснение боковыми границами и торможение перемешивания, разд. 4, 7, 13). Бугор теряет стационарность, становится короткомасштабным ( $\hat{n}_{max} = t^2 \rightarrow \infty$ ), широким ( $\Delta \hat{n} \approx t^2$ ) и низким ( $\tilde{w}_{max} \rightarrow 0$ ).

### 21. СОПОСТАВЛЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ЧИСЛЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНЫХ АМПЛИТУД

На автомодельной стадии средняя форма бугра в спектре фиксирована. Амплитуда (30) нанесена на спектры на рис. 12 в виде тонкой прямой. Видим, что амплитуды и позиция автомодельного бугра примерно фиксированы на интервале времен  $2.5 < t < 6$ . Сравнения теоретического и численного

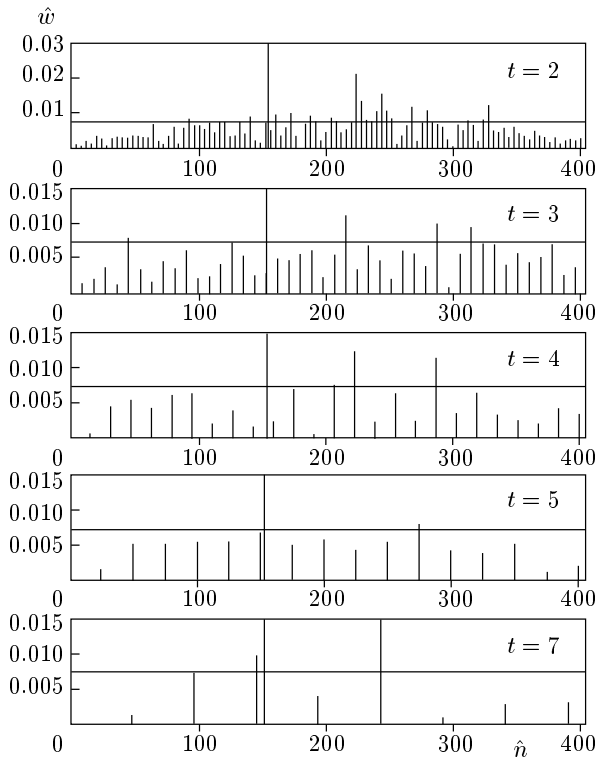


Рис. 12. Универсальный или «стационарный» спектр. Используются автомодельные переменные  $\hat{n}$ ,  $\tilde{w}$ . Тонкая горизонтальная прямая представляет формулу (30), а вертикальная — характерный обратный масштаб

спектров состоят из сравнений амплитуд и волновых чисел. Существенно, что автомоделная амплитуда хорошо согласуется с теоретической оценкой (30). Перейдем к волновым числам.

## 22. МЕХАНИКА РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Прежде чем перейти к волновым числам и поперечным размерам, проанализируем связь горизонтальных и вертикальных масштабов. Важнейшей характеристикой турбулентного перемешивания является коэффициент  $\alpha_+$ . Он дает смещение, скорость и ускорение по вертикали верхней границы зоны перемешивания (5). Отметим, кстати, что в приложениях от него зависит длина пути  $S_{ff}(t_{perf}) = gt_{perf}^2/2$ , пройденного ускоряемой фольгой толщиной  $h_{foil}$  к моменту прорыва  $t_{perf}$  [23]. Отношение  $h_{foil}/S_{ff}(t_{perf}) \approx 2\alpha_+ At$  дает относительную толщину оболочки в задачах инерционного синтеза. Из соотношения  $h_{foil} \approx \alpha_+ At gt_{perf}^2$  следует оценка  $t_{perf}$ . В целях оптимизации сжатия и увеличения энергетического выхода выгодно иметь возможно большие значения  $S_{ff}/h_{foil}$  [24].

Коэффициент  $\alpha_+$  определяется сложным сочетанием случайных и нелинейных процессов. Оценим  $\alpha_+$ . Пусть длина волны  $\lambda_{theor}$ , входящая в формулу (27), дается формулой (29),  $\lambda_{theor} = \alpha_H At gt^2$ . Здесь коэффициент  $\alpha_H$  связан с горизонтальным масштабом, определяющим темп пенетрации зоны перемешивания в тяжелую жидкость и, соответственно, первичного (грубого) дробления этой жидкости. Подставляя выражение (29) с таким образом определенным коэффициентом  $\alpha_H$  в формулу (27), находим

$$\alpha_+ = \frac{F^2}{8\pi}(1 + \mu)R_{HV}, \quad R_{HV} = \frac{\alpha_H}{\alpha_+}. \quad (31)$$

Будем называть  $R_{HV}$  в (31) горизонтально-вертикальным отношением. Если положить  $R_{HV} = 1$  и принять  $F = 1/\sqrt{3}$  (2D-расчет в лейцеровском приближении [2–4, 11], см. также [25–29]), то получим

$$\alpha_+ = \frac{1}{24\pi}(1 + \mu) \approx 1.3(1 + \mu)\%. \quad (32)$$

Оценки (31), (32) поясняют причины числовой малости коэффициента  $\alpha_+$ . Это связано с геометрическим ограничением (« $2\pi$ -эффект», отношение  $k$  и  $\lambda$ , разд. 8), динамикой разделения пузырями идущего навстречу им однородного потока тяжелой жидкости (коэффициент  $F$ ) и фабрикации горизонтальных масштабов посредством нелинейных и слу-

чайных процессов ( $\bar{\lambda}$  и отношение  $R_{HV}$ ). Из анализа полей плотности, представленных на рис. 1, 5–7, следует, что положение верхнего фронта зоны перемешивания определяется текущими позициями вершин колонок (пузырей), внедряющихся в тяжелую жидкость. Чтобы «поднять» вершины пузырей, скажем, до  $\alpha_+ = 4\%$  от слишком малого значения (32), требуется увеличить коэффициент  $F$  и отношение  $R_{HV}$ . Необходимо примерно трехкратное увеличение произведения  $F^2 R_{HV}$  по сравнению со значением  $F^2 R_{HV} = 1/3$ , принятым в (32).

В соотношение (31) входят вертикальная ( $\alpha_+$ ) и горизонтальная ( $R_{HV}$ , кластеризация) меры и динамический коэффициент  $F$ . Последний связан с пересчетом горизонтального масштаба в вертикальный. Он определяется гравитацией и инерцией. Изучение механики перемешивания состоит в исследовании динамического ( $F$ ) и масштабного ( $R_{HV}$ ) факторов. Сведения о коэффициенте  $\alpha_+$  и отношении  $R_{HV}$  извлекаются из численного моделирования. Оценка фактора  $F$  следует из теоретических ограничений на его возможные значения. Рассмотрим по очереди факторы  $F$  и  $R_{HV}$ .

## 23. КОЛЛИМАЦИОННЫЙ ЭФФЕКТ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ БЫСТРОЙ ВОСХОДЯЩЕЙ СТРУИ ЛЕГКОЙ ЖИДКОСТИ НА СПЛОШНУЮ ТЯЖЕЛУЮ ЖИДКОСТЬ

Основное динамическое сопротивление внедрению пузырей в тяжелую жидкость, которым обусловлена малость коэффициента  $F$ , складывается в окрестности вершины пузыря (там, где колонка «упирается» в тяжелую жидкость). Пузырь разделяет первоначально однофазную (без легкой жидкости) тяжелую жидкость (первичное дробление). Разделение «набегающего потока» тяжелой жидкости происходит в вершине пузыря. Скорости подъема пузырей в области фронта зоны перемешивания определяют скорость перемещения самого фронта (коэффициент  $\alpha_+$ ).

Обычно считается, что колонки в зоне турбулентного перемешивания примерно аналогичны периодическим пузырям [22, 20]. При оценках полагают, что легкая жидкость под куполом пузыря в окрестности его вершины движется как целое вместе с куполом. Тогда динамический напор легкой жидкости  $p_{ram}^l$  равен нулю. В этом случае из баланса плавучести и напора тяжелой жидкости  $p_{ram}^h$  следует формула (7) с архимедовским фактором  $\sqrt{1 - \mu}$  и с  $F \approx 0.6$  в 2D-геометрии и  $F \approx 1$  в 3D-геометрии [11].

Уточним картину взаимодействия легкой и тяжелой жидкостей в верхней части зоны перемешивания. Из анализа расчетов следует, что в турбулентном случае напор  $p_{ram}^l$  существен для динамики пузырей и оценки  $\alpha_+$ , если отношение плотностей  $\mu$  не слишком мало,  $\mu > \mu_{thr}$ ,  $\mu_{thr} = 10^{-3}-10^{-2}$  (диапазон  $\mu < \mu_{thr}$  относится к сверхмалым значениям параметра  $\mu$ ). Это означает, что при расчете пузырей вместе с гравитацией и инерцией тяжелой жидкости следует учитывать инерцию легкой жидкости.

Несомненна определяющая роль напора  $p_{ram}^l$  в формировании грибов на концах струй. Под действием этого напора струя тяжелой жидкости тормозится, раздваивается ( $2D$ ) (или принимает дискообразную форму,  $3D$ ) и поворачивает. Явление торможения и раздвоения тесно связано с появлением вихревых диполей ( $2D$ ) и колец ( $3D$ ) и с задачей о столкновении струй [3, 4, 30]. Оно типично для любой (гравитация может отсутствовать) струи, распространяющейся в окружающем веществе.

Расчеты периодических течений показывают, что максимальная скорость легкой жидкости может быть большой. Например, в расчетах [3, 4, 30] она на порядок превышала скорость подъема пузыря. Повышение скорости происходит постепенно. Большие скорости достигаются на поздних стадиях. При  $\mu = +0$  легкая жидкость внутри пузыря поднимается вверх со скоростью пузыря  $+w_b$  (ось  $z$  направлена вверх). Лишь малый объем легкой жидкости вблизи конца тяжелой струи движется со скоростью этой струи  $-w_j$ . На поздних стадиях имеем  $w_j \gg w_b$ .

Ограничимся диапазоном средних и довольно малых значений параметра  $\mu$ ,  $\mu_{thr} < \mu < \mu_{mid}$ ,  $\mu_{mid} \approx 0.3$ . В стационарном пузыре легкая жидкость поднимается со скоростью  $\approx w_b$ . В расчетах [30] при  $\mu = 1/10$  на довольно поздних стадиях тяжелая струя пролетает в поле тяжести значительные расстояния, и вещество в ней разгоняется до больших скоростей  $w_j$ . Эта струя тормозится с образованием гриба. Разгон тяжелой жидкости в струе гравитацией происходит постепенно, а торможение напором легкой жидкости оказывается достаточно резким. При таком торможении гравитационное ускорение довольно мало по сравнению с ускорением, обусловленным динамическими напорами легкой и тяжелой жидкостей. Большие положительные скорости легкой жидкости  $w_{coll} \gg w_b$  достигаются вблизи грибовидного образования. Это обусловлено сужением прохода легкой жидкости в пузырь. В этом заключается коллимация струи легкой жидкости. В периодическом пузыре коллимированный грибом участок

легкой струи находится далеко от вершины пузыря. Вблизи вершины напор  $p_{ram}^l$  мал, и оценка (7) приближенно справедлива.

Новое обстоятельство, которое следует из анализа турбулентных полей  $\rho$  и  $w$ , заключается в коллимации легких струй довольно длинными трубками, подводщими быструю струю в окрестность вершины пузыря, рис. 1, 2, 5–8. Образование узких проходов, по которым происходит лифтинг легкой жидкости в пузырь, оказывается довольно общим явлением, важным для динамики перемешивания. Часто такие проходы пережимаются и образуются «захваченные» пузыри, отделенные от основного объема легкой жидкости. Это напоминает бульканье при опорожнении бутылок. Такие явления связаны с заметными скачками давления («хлопки»). Они должны иметь существенное значение для трансформации небольшой доли энергии перемешивания в звуковую энергию. В результате вокруг зоны перемешивания формируется поле акустических колебаний. Вопрос акустической генерации интересен и нуждается в дополнительных исследованиях.

Оценим влияние напора  $p_{ram}^l$  на динамику пузырей в этих условиях. Рассмотрим рис. 1, 2, 5–8. На рис. 1б, в и 2б ясно видны быстрые узкие струи легкой жидкости, находящиеся при  $x \approx 0.4$ , 3 и 5.3. Мощные хорошо коллимированные струи проходят в крупные пузыри, располагающиеся при  $x \approx 1.36$  и 3.6 на рис. 6б. Из анализа графиков, подобных приведенным на рис. 2, следует, что скорость  $w_{coll}$  лифтинга может достигать больших значений  $\approx 4\dot{h}_+^{5\%}$ , см., например, рис. 2б с легкой струей при  $x \approx 0.4$ .

Ускорение легкой жидкости в проходах или каналах до высоких скоростей обусловлено значительной разницей давлений  $\Delta p_{mb} = p_m - p_b$  между основным объемом легкой жидкости и пузырем (втягивание или всасывание легкой жидкости пузырем). Пузыри поднимаются на большие высоты внутри тяжелой жидкости. Давление  $p_b$  на этих высотах мало. Разность давлений  $\Delta p_{mb}$  поддерживается вследствие того, что широкие по  $x$  блоки преимущественно тяжелой жидкости «опираются» на подстилающий основной объем легкой жидкости. Блоки представляют собой конгломераты, или кластеры более мелких струй. Такие кластеры четко видны на рис. 5 и 6. Например, на рис. 5б мощные конгломераты находятся при  $x \approx 1.6$  и 4.6; на рис. 6б — при  $x \approx 0.6$ , 2.8 и 5.6; на рис. 6а — правее и левее центрального пузыря. Блочная структура проявляется и на рис. 7б, представляющем расчет при меньшем значении числа Атвуда.

Тяжелые блоки довольно широкие. Расстояния

между крупными пузырями, которые они разделяют, порядка  $(1.5-2)h_+^{5\%}$ . Тяжелое вещество, занимающее большую часть объема блока, оседает медленно, см. рис. 2б. Быстрые тяжелые струи узки и опускаются внутри легкой жидкости на больших глубинах под блоками, см. рис. 1б, 1в и 2в. Возле верхнего и нижнего фронтов зоны миксинга присутствуют фрагменты, связанные с предшествующими по отношению к текущему поколениями. Эта преемственность легко выявляется при просмотре последовательных кадров эволюции. Возле верхнего фронта такими фрагментами являются отдельные относительно небольшие, по сравнению с текущим масштабом, пузыри, потерявшие связь с основным объемом легкого вещества. Возле нижнего фронта это сильно растянутые извилистые остатки тяжелых струй. Они оторвались от основного объема тяжелого вещества на предыдущих этапах развития. Фрагменты выигрывают в позиции, но проигрывают в скорости новым поколениям и поэтому постепенно поглощаются центральной зоной миксинга. «Опираие» блоков на подстилающий объем означает, что ускорение тяжелого вещества вниз в них гораздо меньше архимедовского значения. Действительно, при не слишком малых отношениях  $\mu > \mu_{thr}$  величина  $2\alpha_- At g = 2\alpha_+ As At g$  составляет  $1/10-1/5$  от  $(1-\mu)g$ . Вследствие опирания конгломерат стремится перекрыть доступ в пузыри. Поэтому каналы получаются довольно узкими и время от времени забиваются перемычками из тяжелой жидкости.

Трубки в пузыре поддерживаются благодаря высокой скорости транспортировки. Напор  $p_{ram}^l$  значительный. Под этим напором забивающие проход тяжелые перемычки втягиваются внутрь пузыря или прорываются. Втекающая в пузырь легкая жидкость «прихватывает» с собой тяжелое вещество со стенок трубки. Это хорошо видно на всех полях плотности на рис. 1, 5-7. Следствием такого «прихвата» является образование довольно тонкой смеси тяжелой и легкой фаз.

Перейдем к оценке влияния инерции легкого вещества на фактор  $F$ . Рассмотрим задачу о внедрении струи в полупространство (задача о пробивании брони уединенной кумулятивной струей) [31, 32]. Обобщение на периодический случай дано в [3, 4, 30], где рассмотрена цепочка тяжелых струй, проникающих в полупространство, заполненное легким веществом. Отношение плотностей несущественно. Решение преобразуется на интересующий нас случай, когда легкие струи внедряются в тяжелое вещество. Если пренебречь гравитацией, то из интеграла Бернулли следует равенство напоров тяжелой и легкой

жидкостей  $\rho_h(w_h^c)^2 = \rho_l(w_l^c)^2$  в точке торможения (вершине) струи, где  $w^c$  — скорости в системе координат, связанной с вершиной. Возвращаясь в лабораторную систему координат, в которой жидкости вне зоны перемешивания покоятся, получаем

$$w_{coll} = (1 + 1/\sqrt{\mu})w_b, \quad (33)$$

где  $w_b, w_{coll}$  — скорости подъема вершины пузыря и легкой струи в лабораторной системе.

В расчетах с параметром  $\mu = 1/10$  типичное значение плотности смеси фаз  $\rho_{mix}$ , втягиваемой в пузырь через трубку, порядка  $(2-3)\rho_l$ . Соответственно имеем  $1 + 1/\sqrt{\mu_{mix}} \approx 3-4$ . Беря скорости  $w_{coll}$  с графиков, аналогичных представленным на рис. 2б, 8, из формулы (33) находим, что типичных значений  $w_{coll}$  достаточно, чтобы обеспечить  $w_b \approx \dot{h}_+$  с  $\alpha_+ = 5\%$ .

Выше приведена оценка величин  $w_b, h_+$  и  $\alpha_+$ , связанных со сложным, распределенным, или интегральным действием весовой нагрузки тяжелого вещества на легкое. При таком действии тяжелое вещество проседает широкими блоками, или конгломератами, разделяющими довольно крупные пузыри, поднимающиеся с наибольшей скоростью. Поперечные размеры пузырей значительно меньше ширины конгломерата. Весом больших блоков разгоняются быстрые струи легкой жидкости, инжектируемые в пузыри. Импульс этих струй передается в относительно небольших окрестностях вершин пузырей в движение тяжелой жидкости вверх со скоростью (33). Таким сложным образом осуществляется обмен тяжелого и легкого веществ и понижение центра масс системы при интегральном механизме.

Простая, или локальная оценка гравитационных значений величин  $w_b, h_+$  и  $\alpha_+$  (без импульса легких струй) на основе установившегося периодического решения дается формулой (7). Подставляя в (7) характерную для рис. 1, 5-7 ширину кластеров  $\bar{\lambda}_{dyn} \approx 2h_+^{5\%}$  и беря  $\mu_{mix} \approx 0.2$ , получаем  $\alpha_+ \approx 3\%$ . Например, на рис. 6б скорость пузыря, находящегося при  $x \approx 1.2$  между кластерами тяжелых струй, равна  $w_b \approx 0.45, \dot{h}_+^{5\%}(t=6) \approx 0.5$ . Локальная оценка (7) дает  $w_b \approx 0.36$  при  $\bar{\lambda}_{dyn} \approx 2h_+^{5\%}$ . Отсюда можно заключить, что локальный гравитационный эффект несколько меньше интегрального. Отметим, что оценка (7) справедлива в случае стационарных периодических пузырей. Такие пузыри имеют диаметры приблизительно равные расстоянию между ними. Если эти расстояния  $\approx 2h_+$ , то и диаметры должны быть примерно такими же. Диаметры пузырей на рис. 5, 6 заметно меньше. Это означает, что

они еще не вышли на стационарную стадию и находятся в режиме ускорения. На стационарную фазу можно выйти как со стороны однодогового гармонического возмущения, так и со стороны «уединенного» пузыря. В первом случае радиус кривизны в вершине пузыря убывает с  $t$  от большого значения  $R_{ini}$  и асимптотически стремится к стационарному, или предельному значению  $R_{stat}$ ;  $R_{ini} > R_{stat}$ . Во втором случае — наоборот, сначала радиус пузыря  $R_{ini}$  мал,  $R_{ini} < R_{stat}$ . С течением времени радиус пузыря растет, стремясь к  $R_{stat}$ . Начальные стадии расширения пузыря во втором случае напоминают расширение пузыря в клине (2D) или конусе (3D) [2] или расширение уединенного пузыря [33] (к периодическому случаю относится пузырь в вертикальной полосе (2D) или трубе неизменного поперечного сечения (3D) [11]). Формула (7) дает в этом случае оценку сверху скорости всплывания ускоряющегося пузыря.

Для более точного ответа на вопрос об относительной важности локального и интегрального гравитационных механизмов разрушения сплошности тяжелой жидкости необходимо исследовать поля ускорения  $a = v + (v \nabla)v$  и давления. Если доминирует локальное действие, то, во-первых, ускорение легкой жидкости  $a_l$  в верхней части зоны перемешивания положительно и мало ( $\approx 2\alpha_+ Atg \approx 0.1(1 - \mu)g$ ), и, во-вторых, давление внутри пузыря меняется мало (при небольших  $\mu$ ). В обратном случае, во-первых, ускорение  $a_l$  вблизи вершины пузыря отрицательно (ось  $z$  повернута вверх) и по модулю намного больше чем  $0.1(1 - \mu)g$  (оно  $\sim g$ ), и, во-вторых, внутри пузыря давление растет вверх. Во всем течении это единственное место, где возможна смена знака градиента давления. Если подъем пузыря определяется импульсом легких струй (в этом случае справедлива формула (33)), то падение давления вдоль границы пузыря в направлении от вершины вниз должно происходить быстрее, чем гидростатическое падение давления в тяжелой жидкости при смещении вверх.

Отметим еще, что положительные ускорения тяжелой жидкости довольно малы. Они вызваны подъемом пузыря. В периодическом случае, пользуясь параболической аппроксимацией [11], нетрудно вычислить по аналитическим формулам для потенциала скорости поле ускорений тяжелого вещества  $a_h$ . На линейной стадии развития однодогового гармонического возмущения ускорение  $a_h$  мало и на оси пузыря монотонно убывает по направлению вверх от вершины. С переходом на нелинейный режим зависимость  $a_h(\Delta z, t)$  от  $\Delta z$  становится

немонотонной, здесь координата  $\Delta z$  отсчитывается от вершины,  $a_h(\Delta z, t) = a_h(x = 0, \Delta z, t)$  (2D) или  $a_h(x = 0, y = 0, \Delta z, t)$  (3D), центр  $x = 0$  или  $x = y = 0$  находится в вершине. Над вершиной появляется точка максимума ускорения  $a_h$ . На стационарной стадии этот максимум находится на расстоянии  $k^{-1} \ln 2 \approx 0.1\lambda$  над вершиной, где  $\lambda$  — период течения. Это относится как к 2D-геометрии, так и к наиболее интересным [11] в связи с 3D-турбулентностью гексагональным и квадратным решеткам в 3D-геометрии. Максимальная величина  $a_h$  составляет  $(1 - \mu)g/12$  в 2D- и  $(1 - \mu)g/4$  в 3D-случае.

#### 24. СПЕКТРАЛЬНАЯ ШИРИНА БУГРА И ВЫЯВЛЕНИЕ КЛАСТЕРНОЙ «НАДСТРУКТУРЫ»

То, что интегральный эффект важнее, означает, что локальная оценка  $F \approx 0.6$  (7) (2D) несколько занижает значение  $F$ . Из анализа, данного выше, следует, что эффективно коэффициент  $F$  больше примерно на 20–30%, чем значение (7). Соответственно реально число Фруда  $F^2$  примерно в 1.5 раза больше. Согласно формуле (31) произведение этого числа на горизонтально-вертикальный фактор определяет коэффициент  $\alpha_+$ . Получается, что, для того чтобы обеспечить значения  $\alpha_+ = 4\text{--}5\%$ , необходимы отношения  $R_{HV} = 1.7\text{--}2$ . Посмотрим, согласуется ли это со спектральными данными.

Рассмотрим поперечные структуры в зоне перемешивания. Информация о них содержится в спектрах по горизонтальной координате, инвариантной к сдвигам. Типичные примеры таких спектров представлены на рис. 9 и 12. Проанализируем спектры. Центральная часть бугра в автомодельном спектре на рис. 12 располагается при  $\hat{n} = 180\text{--}250$ . Рисунок 12 представляет расчет с  $\mu = 1/10$ . При больших  $\mu$  бугор смещается вправо в соответствии с формулой (27). Правое (ультрафиолетовое) крыло бугра образуют высокочастотные гармоники, левое (инфракрасное) длинноволновое крыло — субгармоники. Со значением параметра  $R_{HV} = 1$  связано автомодельное волновое число  $\hat{n}_+ = 2\pi / At \alpha_+$ ,  $\hat{n}_+(\alpha_+ = 5\%, \mu = 1/10) = 150$ . Получается, что если ориентироваться на максимум бугра, то для центральной зоны перемешивания,  $\hat{z} \approx 0$ , характерны довольно мелкие поперечные масштабы,  $\lambda_{\perp} = (0.6\text{--}0.8)h_+$ ,  $\hat{n}_{max} = (1.2\text{--}1.5)\hat{n}_+$ . Это согласуется с числом всплесков функций от  $x$  на рис. 1в, 2, 8 и с корреляционной длиной на рис. 4 (ср. среднее

расстояние между всплесками и длину горизонтальных отрезков на рис. 1в, 2).

Важно, что на спектрах имеется разброс масштабов в длинноволновую сторону. Масштабы  $\hat{n}_{max} = (1.2-1.5)\hat{n}_+$  не могут обеспечить значений  $\alpha_+ = 4-5\%$ . Беря скорость подъема пузырей такого поперечного размера и вычисляя автомодельную скорость верхнего фронта перемешивания, получаем лишь  $\alpha_+ \approx 1\%$ . Динамика расширения определяется субгармоническим крылом распределения по гармоникам, рис. 12. Из (27) имеем

$$\hat{n}_{theor}(\alpha_+ = 5\%, F = 0.6) \approx 50 \quad (34)$$

при  $\mu = 0.1$ . Субгармоническое крыло простирается до значений порядка (34), см. рис. 12. С коррекцией  $F$  из разд. 23 получаем  $\hat{n}_{theor} \approx 75$ .

Выраженную структуру с  $n_{max} \approx 1.2n_+$  и  $\lambda_{\perp} \approx (0.7-1)h_+$  нетрудно выявить в центральной зоне  $\hat{z} \approx 0$  в данных моделирования. Детальный анализ выявляет более крупномасштабную «надструктуру», ответственную за наблюдаемый темп расширения зоны перемешивания. Она имеет  $\lambda_{dyn} \approx 2h_+$ ,  $n_{dyn} \approx n_+/2$ . В нижней части зоны перемешивания эта крупномасштабность проявляется в виде огибающей или длинноволновой модуляции. Это хорошо видно на рис. 1в. Чередующиеся черные и белые колонки (ширина пар  $\approx (0.5-0.7)h_+^{5\%}$ ) группируются в кластеры, состоящие примерно из двух, трех пар колонок. Такие кластеры образуют обсуждавшиеся выше блоки из тяжелых струй. Кластеры разделяются крупными пузырями. Им соответствуют мощные белые колонки на рис. 1в при  $x \approx 0.4$  и 3.2. С мощными пузырями связаны быстрые легкие струи, проявляющиеся в виде узких по координате  $x$  положительных всплесков большой амплитуды на рис. 2б. Подытоживая скажем, что характерное значение  $R_{HV} = \bar{\lambda}_{dyn}/h_+$ , оцененное по надструктуре, оказывается порядка 1.7-2. Подчеркнем, что масштаб  $\bar{\lambda}_{dyn}$  определяется не простая переменность с этим шагом, а длинноволновая модуляция более мелкой переменности. Поэтому спектральный бугор получается таким широким, а не сосредоточенным возле волнового числа  $\bar{k}_{dyn}$ .

## 25. 3D-ГЕОМЕТРИЯ

Интересно в будущем обобщить проведенный анализ на 3D-геометрию. В связи с этим кратко отметим особенности 3D-случая. Турбулентность однородна по отношению к сдвигам в поперечной плоскости  $x, y$ . Поэтому основу теоретического анализа образуют периодические по координатам

$x, y$  решения [11] и тесно связанные с ними спектральные модели<sup>4)</sup>. Важно выявить горизонтально-вертикальные характеристики и основную, или крупную ячейку в слое перемешивания.

Формула (7), связывающая период  $\lambda$  и предельную скорость  $w_b$ , остается. Коэффициент  $F$  принимает другое значение. Обозначим его  $F_{3D}$ . Периоды  $\lambda = 2\pi/k$  решеток определены в [11]. Решения с симметрией квадратной ( $4m$ ) или гексагональной ( $6m$ ) решеток приближенно задаются парой  $\mathbf{k}_i$ ,  $i = 1, 2$ , или тройкой  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , волновых векторов, направленных под углами  $90^\circ$  ( $4m$ ) или  $60^\circ$  ( $6m$ ) градусов друг к другу. С каждым вектором  $\mathbf{k}_i$  связана своя плоская волна. Нас будут интересовать спектры величин  $f(x, y, z, t)$  в произвольной вертикальной плоскости. Такая плоскость параллельна оси  $z^5)$ . Из-за проектирования волновых векторов на эту плоскость (плоскость идет под произвольным углом к вектору  $\mathbf{k}_i$ ) характерное волновое число будет немного меньше (в среднем на 10-20%) волнового числа, связанного с периодом решения<sup>6)</sup>. Будем называть это проекционным сокращением  $k$  и увеличением  $R_{HV}$ .

Автомодельные соотношения (1), (5) переносятся на 3D-случай. Приравнивая скорости (7) и  $\dot{h}_+$ , как в разд. 22, приходим к формуле (31), в которую входят величины  $\alpha_+^{3D}$ ,  $F_{3D}$  и  $R_{HV}^{3D}$ . Из натуральных и численных экспериментов следует, что трехмерность мало сказывается на темпе первичного дробления тяжелого вещества,  $\alpha_+^{2D} \approx \alpha_+^{3D}$  [35-40]<sup>7)</sup>. С другой стороны, очень важно, что 3D-число Фруда  $F_{3D}^2$  на решетках  $6m$  и  $4m$  втрое больше, чем в плоском случае [11]. Эти решетки представляют наибольший интерес в связи с проблемой 3D-турбулентности. Отсюда согласно формуле (31) вытекает существенный вывод о том, что относительный горизонтальный масштаб в 3D-геометрии значительно меньше ( $R_{HV}^{3D} \approx 1$ ) по сравнению с плоским случаем. Небольшая проекционная корректировка не меняет данного вывода. Следовательно, в 3D-случае основная ячейка более вытянута по вертикали, чем в 2D-случае.

<sup>4)</sup> Отметим интересную спектральную модель, предложенную в работе [34].

<sup>5)</sup> Так сказать, плоскость «лазерного ножа» [35] в расчетной 3D-области в виде параллелепипеда [11].

<sup>6)</sup> Например, в случае квадратной решетки в плоскости, параллельной вектору  $\mathbf{k}_i$ , характерное волновое число равно  $k$ , а в диагональной плоскости характерное волновое число в  $\sqrt{2}$  раз, или на 30% меньше.

<sup>7)</sup> В работе [41] рассмотрен вопрос о влиянии расходимости или сходимости потока на коэффициент  $\alpha$  при сжатии или разлете цилиндрических или сферических оболочек.

Интересным представляется вопрос об относительной роли локального и интегрального гравитационных эффектов, о коллимации и быстрых узких струях, разд. 23. Возможно, из-за вытянутости ячейки интегральный эффект здесь меньше. Топологически 3D-ситуация несравненно богаче плоской [11, 42]. Это относится уже к довольно простому периодическому случаю. Интересной топологической особенностью 3D-случая является образование уплощенных струй вокруг округлых пузырей и пересечение этих уплощенных струй в виде трехлучевых звезд [11]. Такие пересечения характерны при плотной упаковке пузырей. В периодическом режиме пузыри упакованы плотно. В плоском случае пузыри упакованы плотно в блоках или конгломератах, разд. 23. Крупные пузыри между блоками вырываются в режим ускорения. Влияние соседей на них ослабевает. Поэтому они раздуваются не только по вертикали, но и по горизонтали. Из-за малости горизонтально-вертикального отношения  $R_{HV}^{3D}$  в 3D-геометрии, возможно, упаковка плотнее и равномернее. Все эти вопросы нуждаются в дополнительных исследованиях.

Отметим, что в 3D-геометрии скейлинг спектральных автомодельных переменных меняется по сравнению с 2D-случаем. Это вызвано тем, что ряды Фурье физических переменных  $f(x, y, z_f, t_f)$  даются не одинарной суммой по гармоникам  $n$  (см. разд. 4), а двойной суммой по индексам  $n$  и  $m$  вида

$$f(x, y, \dots) = \sum \sum (a_{nm} c_{nx} c_{my} + b_{nm} c_{nx} s_{my} + d_{nm} s_{nx} c_{my} + e_{nm} s_{nx} s_{my}),$$

$c_{nx} = \cos nx$ ,  $s_{nx} = \sin nx$ , см., например, [11]. Соответственно спектральный бугор содержит не  $\approx \bar{n}$ , а  $\approx \bar{n}^2$  гармоник. На автомодельной стадии среднее волновое число убывает (укрупнение) степенным образом,  $\bar{n} \propto 1/t^2$ . Рассмотрим масштабирование скорости. Величина  $w(x, y, \dots)/t$  инвариантна на автомодельной стадии (см. разд. 14, формулу (10)). Она создается суммарным действием  $\approx \bar{n}^2$  гармоник со случайной фазой. Поэтому  $w(x, y, \dots)/t \sim (w_{nm}/t)\sqrt{\bar{n}^2}$ , ср. с разд. 16. Следовательно, инвариантные спектральные амплитуды даются выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\hat{n}\hat{m}} &= \frac{H_{nm}(t)}{t^4}, & \tilde{\rho}_{\hat{n}\hat{m}}(\hat{z}) &= \frac{\rho_{nm}(z, t)}{\rho_h t^2}, \\ \tilde{w}_{\hat{n}\hat{m}}(\hat{z}) &= \frac{w_{nm}(z, t)}{t^3}, & \tilde{p}_{\hat{n}\hat{m}}(\hat{z}) &= \frac{p_{nm}(z, t)}{\rho_h t^4}. \end{aligned}$$

Они заменяют формулы (26) в 3D-случае.

## 26. ПРОСТЫЕ И КЛАСТЕРНЫЕ СЛУЧАЙНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Численное моделирование на плотных сетках требует дорогостоящих продолжительных расчетов. Ряд спектральных и статистических свойств турбулентных полей могут быть изучены на простых примерах случайно-периодических функций [3, 4]. К ним относятся, в частности, вопросы сходимости или сравнительный анализ простых и кластерных ячеек. Такие функции могут быть получены разными способами. Остановимся на следующем примере. Рассмотрим последовательность случайных точек  $x'_j$  на оси  $x'$ . Пусть

$$x'_{j+1} = x'_j + 1 + \beta(2\xi_j - 1), \quad x'_1 = 0, \quad (35)$$

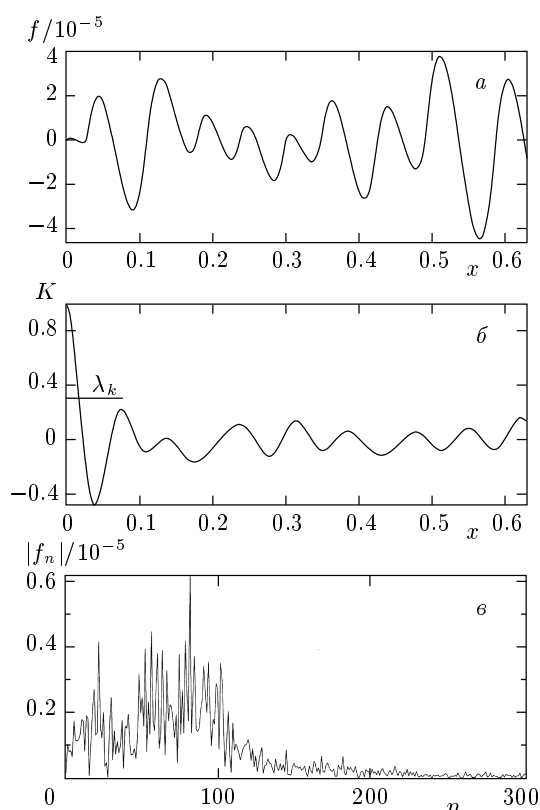
где  $j = 1, 2, \dots, 2N + 1$ ,  $\xi_j$  — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0, 1]$ ,  $\langle \xi_j \rangle = 1/2$ , для каждого нового значения  $j$  величина  $\xi_j$  выбрасывается независимо. Назовем (35) случайно-периодической цепочкой. Параметр  $\beta$  является мерой случайности. При  $\beta = 0$  приходим к периодической цепочке с шагом 1 длины  $2N$ . Если  $\beta \gg N$ , получаем распределение точек на оси  $x'$ , заполняющее промежутки шириной  $\sim 2\beta$ . При этом расстояния между соседними парами точек варьируют в широких пределах. Пределы  $\beta \ll 1$  и  $\beta \gg 1$  неинтересны. Рассмотрим значения  $\beta \approx 1$ , поскольку турбулентные функции  $f(x)$  флуктуируют со средним шагом  $\lambda$ , отклоняясь от него на каждом шаге на величину порядка  $\Delta\lambda \approx \lambda$ .

Построим модельную функцию  $f(x)$ . Сожмем цепочку (35) на отрезок  $[0, 2\pi]$  на оси  $x$ ,  $x_j = (x'_j/x'_{2N+1})2\pi$ . Рассмотрим тройки точек  $x_{2n-1}, x_{2n}, x_{2n+1}$ . Индекс  $n = 1, 2, \dots, N$  пробегает пары восходящих и нисходящих колонок. На подотрезке  $x_{2n-1} < x < x_{2n+1}$  представим функцию  $f(x)$  в виде

$$f(x) = (x - x_{2n-1})(x - x_{2n})(x - x_{2n+1}).$$

Если это вертикальная скорость  $w(x)$ , то между первой парой точек она положительна (восходящая колонка), а между второй — отрицательна (нисходящая). Из функций  $f(x)$  на подотрезках «соберем» функцию  $f(x)$  на целом отрезке  $[0, 2\pi]$ . Это непрерывная функция. Продолжим ее вправо и влево за отрезок  $[0, 2\pi]$  с периодом  $2\pi$ . Пример функции с  $\beta = 0.6$ ,  $N = 100$  приведен на рис. 13а. Показана часть отрезка  $[0, L_\perp]$  шириной  $L_\perp/10$ , на котором в среднем должно располагаться 10 пар колонок ( $N = 100$ ),  $L_\perp = 2\pi$ .

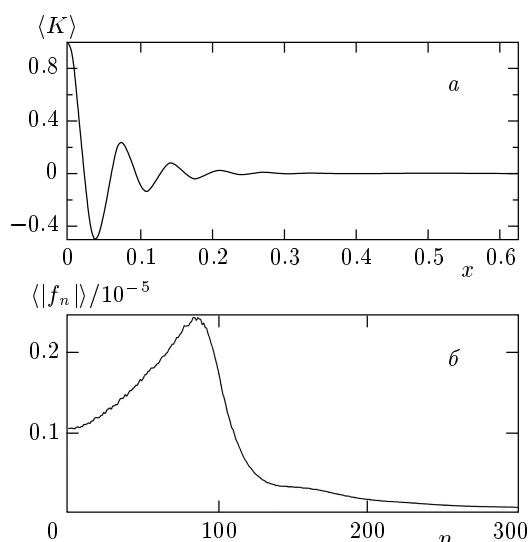




**Рис. 13.** *a* — Пример случайно-периодической функции, задаваемой последовательностью (35), *б* — ее коррелятор и *в* — спектр

Вычисленный по формуле (2) коррелятор  $K(x)$  от функции  $f(x)$ , рис. 13*a*, и спектр  $|f_n|$  (разложение в ряд Фурье периодической функции) представлены на рис. 13*б* и *в* (ср. с рис. 4 и рис. 3, 9, 12). Центральный максимум при  $x = 0$  коррелятора представляет усредненную колонку (например, положительную), минимум рядом с ним — парную к положительной отрицательную колонку, наконец, второй по отношению к центральному максимум представляет следующую к данной паре положительную колонку. На рисунке 13*б* корреляционная длина  $\lambda_K$ , определенная в разд. 4, на 20% превышает среднюю ширину пар  $\bar{\lambda} = L_{\perp}/N$ .

На рисунке 13 приведена реализация (35), задаваемая конкретным случайным набором  $\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N + 1$ . В связи с предложенными в разд. 17 и 18 процедурами сглаживания, гасящими влияние случайной фазы, представим результаты усреднения по многим реализациям. Они зависят только от параметра  $\beta$  (35). Из графика усредненного коррелятора  $\langle K(x) \rangle$  (рис. 14*a*) следует, что усреднение подавляет случайные флуктуации, ср. с



**Рис. 14.** Устранение несущественных фазовых флуктуаций. Усредненные по 4000 реализаций коррелятор (*a*) и спектр случайно-периодической функции (*б*)

рис. 13*б*. Периодическая составляющая, связанная с шагом 1 в (35), постепенно «тонет» в случайной (член с фактором  $\beta$ ). Поэтому максимумы, относящиеся к последовательным положительным колонкам, монотонно убывают<sup>8)</sup>. В периодическом случае (кристалл) коррелятор периодический, см. разд. 4. На рисунке 14*б* показан усредненный спектр  $\langle |f_n| \rangle$ . Усреднение сглаживает случайные «иглы» спектра.

Опишем спектр  $|f_n|$  на рис. 13*в*. Типичный размер  $\lambda_F$ , определенный по максимуму  $n_F$  амплитуд Фурье ( $\lambda_F = 2\pi/n_F$ ), как и корреляционная длина  $\lambda_K$ , несколько больше среднего  $\bar{\lambda}$ , рис. 14*б*. Пары колонок  $f(x)$  не имеют внутренней структуры на масштабе  $\approx \bar{\lambda}$ , см. рис. 13*a*. Поэтому короткомасштабное крыло спектрального бугра быстро убывает при  $n > N$ . При  $n \gg N$  имеем  $|f_n| \sim 1/n^2$ , поскольку в данном примере функция  $f(x)$  «счита» с разрывом производной в точках смыкания подотрезков.

Важным является длинноволновое (левое на рис. 13*в*, 14*б*) крыло, поскольку от его ширины зависит динамика перемешивания, разд. 22–24. Из-за стохастики спектральный бугор уширяется в левую сторону. Проиллюстрируем это. Рассмотрим функцию  $f_{\star}(x)$ , составленную из дуг парабол случайной высоты. Определим  $f_{\star}$ . Разделим отрезок

<sup>8)</sup> Напоминает структурную функцию, характеризующую упорядоченность соседних молекул в жидкости.



$[0, 2\pi]$  на  $N_*$  равных подотрезков периодической последовательностью точек  $x_*^j = (j - 1)2\pi/N_*$ ,  $j = 1, \dots, N_* + 1$ . На каждом подотрезке имеем  $f_*(x) = (2\xi_j - 1)(x - x_*^j)(x - x_*^{j+1})$ . В короткомасштабную сторону спектр  $f_n^*$  убывает пропорционально  $n^{-2}$ . Центральная часть спектра находится на гармониках  $n \approx N_*$ . Пусть  $N_* \gg 1$ . Рассмотрим длинноволновую асимптотику  $n \ll N_*$ . Имеем

$$a_n = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} dx f_*(x) \cos nx.$$

Фиксируем  $n$ . Разделим этот интеграл на сумму по отдельным волнам:

$$a_n = \sum_{i=1}^n I_i, \quad I_i = \int dx f_* \cos nx,$$

по  $x$  от  $(2\pi/n)(i - 1)$  до  $(2\pi/n)i$ . Внутри пределов интеграла  $I_i$  находится  $N_*/n$  дуг парабол. Поэтому  $I_i \propto \sqrt{N_*/n}$  со случайным знаком. Найдем сумму  $a_n = \sum I_i$ . Она имеет  $n$  случайных слагаемых  $I$ . Следовательно,  $a_n \sim \sqrt{n}I$ . Подставляя сюда  $I \propto \sqrt{N_*/n}$ , получаем  $a_n \propto \sqrt{N_*}$ . Видим, что асимптотически зависимость от  $n$  в спектре  $|f_n^*|$  пропадает — левое крыло принимает форму «полочки». Этим объясняются медленное убывание  $|f_n|$  в промежутке  $n \in [0, N]$  на рис. 13*в* и конечные значения  $|f_n|$  при  $n = 0$  и  $n \sim 1$  на рис. 14*б*.

Возможные асимптотики  $n \ll N$  ограничены двумя крайними вариантами. В первом имеем

$$|f_n| \sim \sqrt{N} \bar{f} \bar{\lambda}, \quad \bar{f} = \sqrt{\langle (f - \langle f \rangle_x)^2 \rangle_x}, \quad (36)$$

где  $\langle \dots \rangle_x$  — усреднение по  $x$ . Это — полочка. Во втором варианте

$$|f_n| \sim \sqrt{n} \bar{f} \bar{\lambda}. \quad (37)$$

Какой вариант осуществляется, зависит от поведения накопленного интеграла

$$F(x) = (x\bar{f})^{-1} \int_0^x f(x') dx'. \quad (38)$$

При случайно-периодической функции общего вида имеем  $|F(x)| \sim \sqrt{x}$ . Тогда длинноволновая асимптотика имеет вид полочки (36). Если же  $|F(x)| \sim 1$ , то осуществляется асимптотика (37). Например, в случае вертикальной скорости  $w$  интеграл (38), имеющий смысл потока объема, ограничен в силу сохранения при перестановках объемов несжимаемой жидкости на конечных отрезках по  $x$ .

Как видим, из-за стохастичности спектральный след случайно-периодической функции, казалось бы локализованной на масштабах  $\sim \bar{\lambda}$ , простирается далеко в длинноволновую область. Для оценки динамической роли этого явления необходимо сравнить длинноволновую амплитуду с предельными, насыщенными, или мажорирующими амплитудами. Например, в случае скорости спектральная амплитуда насыщения дается выражением

$$|w_n^{sat}| \approx \frac{F\sqrt{1-\mu}}{n}, \quad (39)$$

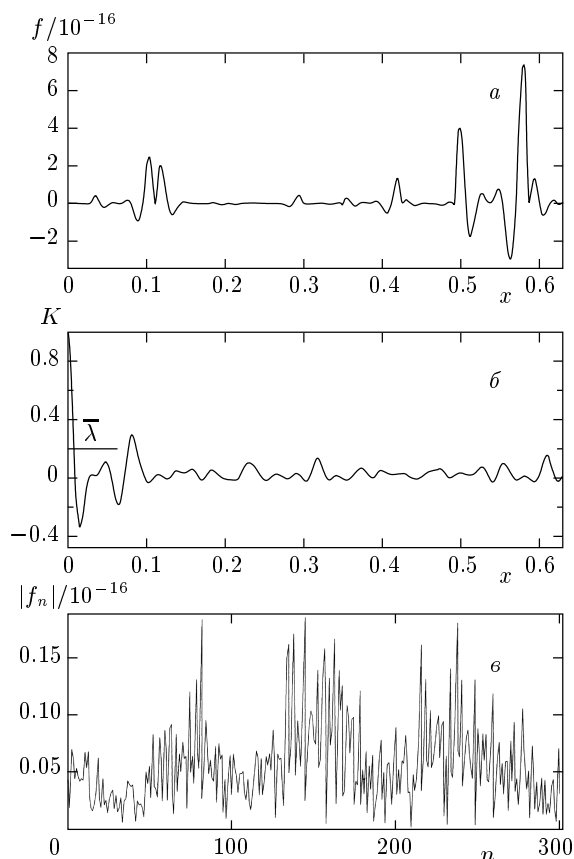
см. разд. 12. Она определяется нелинейными и случайными процессами. Составим отношение скоростей  $|w_n| \sim \sqrt{n}(F\sqrt{1-\mu}/\sqrt{N})2\pi/N$  (37) и (39), где  $N$  — число пар колонок или число пузырей на отрезке  $L_\perp = 2\pi$ . Имеем  $|w_n|/|w_n^{sat}| \sim (n/N)^{3/2}$ . Из данных проведенного нами численного моделирования следует, что несущественны возмущения, амплитуда которых порядка нескольких процентов от амплитуды насыщения и меньше. Отсюда следует грубая оценка наибольших существенных масштабов  $n_{lw} \sim N/5$ , генерируемых случайным разбросом.

Выше рассмотрен случай простой случайно-периодической функции. Такая функция характеризуется одной ячейкой масштаба  $\bar{\lambda}$ , поскольку соседние ячейки того же порядка (дисперсия  $\Delta\lambda \sim \bar{\lambda}$ ). Средняя ячейка не имеет подструктуры, см. рис. 13*а*. При турбулентном перемешивании ячейки, во-первых, не эквивалентны (кластеры) и, во-вторых, имеют внутреннюю подструктуру. Интересно изучить вызванные этим изменения в корреляторе и спектре.

Рассмотрим пример, в котором на подотрезке  $[x_{n-1}, x_{n+1}]$  функция вычисляется по формуле

$$f(x) = [(x - x_{2n-1})(x - x_{2n})(x - x_{2n+1})]^2 \times \\ \times \left[ x - \left( x_{2n-1} + \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{3} \right) \right] \times \\ \times \left[ x - \left( x_{2n-1} + 2\frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{3} \right) \right] \times \\ \times \left[ x - \left( x_{2n} + \frac{x_{2n+1} - x_{2n}}{3} \right) \right] \times \\ \times \left[ x - \left( x_{2n} + 2\frac{x_{2n+1} - x_{2n}}{3} \right) \right], \quad (40)$$

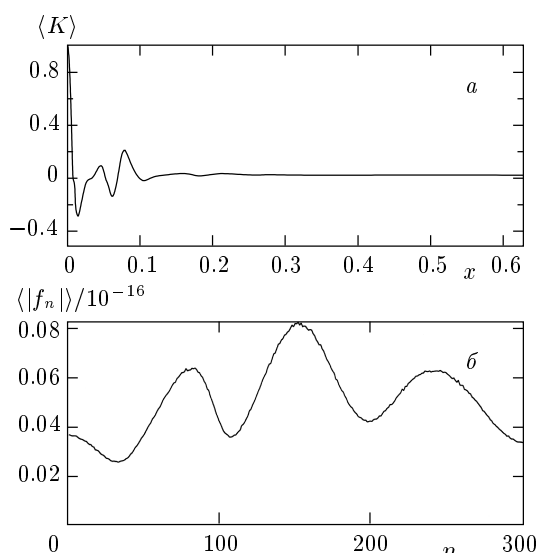
где последовательность  $x_j$  находится по правилу (35), индекс  $n = 1, \dots, N$  нумерует ячейки или пары колонок. Функция  $f(x)$  на рис. 13*а* порядка  $\bar{\lambda}^3$ , где  $\bar{\lambda} = 2\pi/N \ll 1$ , в наших примерах  $N = 100$ . Обозначим ее  $f_1$ . Функция (40) порядка  $\bar{\lambda}^{10} \approx f_1^{10/3}$ . Возведение в степень малых величин сильно увеличивает их случайный разброс. Большая часть ячеек



**Рис. 15.** *a* — Кластерная случайно-периодическая функция. Пример (40), набор  $\xi_j$  такой же, как на рис. 13, ( $\beta = 0.6$ ). Число ячеек  $N = 100$ . Ячейки значительно различаются: 4–5 «слабых» ячеек на одну «сильную», *б* — коррелятор  $K(x)$ , *в* — спектр  $|f_n|$

оказывается «слабыми» с малой величиной  $f$ , изредка они перемежаются «сильными» ячейками, в которых значение  $f$  значительно больше, чем в слабых, см. рис. 15*a*. Такое поведение напоминает рис. 2*a* и 2*б*.

Интересно, что кластерная структура мало проявляется в корреляторе, рис. 15*б*. Группа первых существенных пиков в нем имеет ширину примерно  $\bar{\lambda}$ , которая значительно меньше средних расстояний между «сильными» ячейками, ср. рис. 15*a* и 15*б*. Эта группа связана с внутренней структурой ячейки. Из-за подструктуры спектр на рис. 15*в* сильно уширяется в короткомасштабную область вправо от характерного волнового числа  $\bar{n} = 2\pi/\bar{\lambda} = N = 100$ . Кластеры проявляются в некотором усилении длинноволнового крыла. В целом, анализируя частную реализацию (рис. 15) и усредненные данные (рис. 16), следует заключить, что



**Рис. 16.** Усредненные по  $10^4$  реализациям коррелятор  $\langle K(x) \rangle$  (*a*) и спектр  $\langle |f_n| \rangle$  (*б*) в кластерном случае. Деление на три в функции (40), слабо проявляющееся на флуктуирующем графике на рис. 15*в*, ясно проявляется на сглаженном спектре на рис. 16*б*

спектр функции (40) оказывается весьма широким. В его формировании участвуют сильно различающиеся масштабы.

### 27. МАЛОСТЬ $\alpha_+$ И СТИМУЛЯЦИЯ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ДЛИННОВОЛНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В предыдущих разделах рассмотрено перемешивание в идеальных условиях, когда вязкость  $\nu = +0$ , коэффициенты поверхностного натяжения и диффузии  $\sigma = +0$ ,  $D = +0$ , соответственно, стабилизационный масштаб  $\lambda_{micr} = +0$ . В таких условиях краевая задача некорректна по Адамару ([43, 4, 44], разд. 8<sup>9)</sup>), поскольку инкремент неограничен,  $\gamma \propto \sqrt{k} \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . При этом перемешивающая турбулентность возникает «сразу» (от  $t = +0$ ) и сразу является автомодельной (1), (5). Естественно назвать такое перемешивание спонтан-

<sup>9)</sup> В этой работе обсуждаются условия, при которых возможно существование гладкого одномодового решения с периодом  $\lambda$ . Требуется, во-первых, чтобы отношение  $\lambda_{micr}/\lambda$  было мало (идеальная гидродинамика), и, во-вторых, необходимо экспоненциальное подавление шумов вплоть до масштаба  $\lambda_{micr}$ . Для выполнения последнего условия отношение  $\lambda_{micr}/\lambda$  должно быть конечно.

ным, поскольку при  $t > 0$  нет никакой информации о начальном возмущении. Каждая реализация неповторима.

Спрашивается, что может быть «видно» на фоне спонтанного перемешивания? До этого неявно полагалось, что при  $t = 0$  возмущения инфинитезимальны. Важно, что численно коэффициент  $\alpha_+$  спонтанного перемешивания довольно мал (разд. 10, 22) и разрушение первоначальной целостности тяжелого вещества идет относительно медленно. Если разрушение сплошности происходило бы с архимедовским (т. е. предельным) ускорением (тогда  $G_{ss}^+ g \approx (1 - \mu)g$ , разд. 10), то повлиять на него (т. е. еще ускорить) с помощью малых возмущений конечной амплитуды было бы нельзя. Именно благодаря малости коэффициента  $\alpha_+$  конечное по длинам волн и амплитудам возмущение может проявиться на фоне спонтанного перемешивания.

Рассмотрим два случая. В одном возмущения периодические (одна длина волны  $\lambda$ ), в другом — логарифмически широкодиапазонные (набор сильно различающихся длин  $\lambda$ , например, смесь волн миллиметрового, сантиметрового, дециметрового и т. д. диапазонов). Подчеркнем, что возмущения конечны. Это означает, что имеется порог. Его существование довольно ясно по смыслу, поскольку речь идет о конкуренции возмущения со спонтанным перемешиванием — течением с конечными скоростями и перемещениями. Возмущение может быть заметно (запороговая амплитуда), а может быть и не заметно (допороговая амплитуда) на фоне спонтанного течения. Вопрос о пороговой амплитуде в случае периодических возмущений рассматривался [45, 46]. В запороговом режиме периодическое возмущение одето «шубой» короткомасштабных мод, связанных со спонтанной турбулентностью, «идущей» из коротковолновой области [4], разд. 18, [47, 48]. Период  $\lambda$  периодического возмущения определяет характерное время  $t_\lambda = (At gk)^{-1/2}$ . При  $t \gg t_\lambda$  след этого возмущения залечивается и перемешивание возвращается на спонтанный режим.

Рассмотрим широкодиапазонный случай<sup>10)</sup>. Наиболее интересно однородное по волновым числам  $k$

<sup>10)</sup> Теория стимуляции предложена в работах [22, 23, 3, 4]. В них, во-первых, представлено разложение шума по плотному ряду случайных гармоник (41), позволяющее единым образом задать амплитуду шума. (В [3, 4] шум зависел не только от амплитуды, но и от выбора того или иного лакунарного разложения. Сравнить можно было только шумы разной амплитуды с одинаковым лакунарным разложением.) Во-вторых, приведены результаты систематических численных расчетов, определен порог и изучена запороговая динамика.

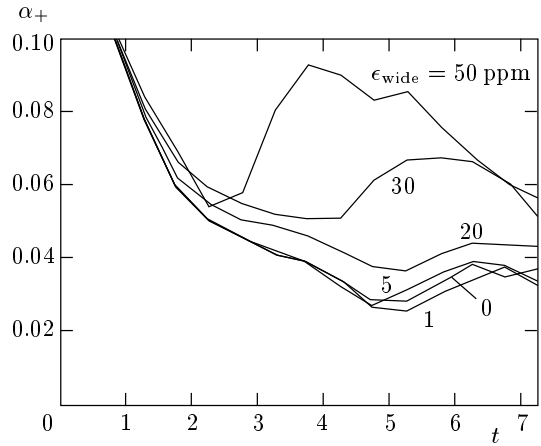


Рис. 17. Зависимость эволюции коэффициента  $\alpha_+$  от амплитуды широкодиапазонных шумов  $\epsilon_{wide}$ , указанной у кривых в промилле

возмущение. Оно не привносит выделенного масштаба и поэтому сохраняет квадратичную автомодельность (1), (5). Подчеркнем, это означает сохранение автомодельного показателя или индекса. Сами автомодельные функции  $\hat{f}(\hat{x}, \hat{z})$  (10),  $\tilde{f}_n$  (25), (26) автомодельных переменных при достаточной амплитуде возмущения, превышающей порог, меняются в зависимости от безразмерного параметра, задающего превышение над порогом. Залечить надпороговое широкодиапазонное возмущение нельзя.

Предъявим однородные широкодиапазонные возмущения скорости, удобные при численном моделировании. Запишем начальные возмущения в виде разложения по гармоникам (3). Пусть

$$\begin{aligned} a_n^0 &= \frac{F\sqrt{1-\mu}}{n} (2\xi_n - 1)\epsilon_{wide}, \\ b_n^0 &= \frac{F\sqrt{1-\mu}}{n} (2\xi'_n - 1)\epsilon_{wide}, \end{aligned} \quad (41)$$

где  $\xi_n$  — генератор случайных чисел (35),  $\xi_n$  и  $\xi'_n$  независимы. Видим, что начальное поле (3), (41) сформированно тремя составляющими. Во-первых, это скорость насыщения (39), во-вторых, случайный оператор и, в-третьих, безразмерный параметр  $\epsilon_{wide}$ . Это поле не имеет выделенного масштаба. Оно задается одним параметром — амплитудой  $\epsilon_{wide}$  случайных широкодиапазонных шумов.

На рисунках 17–19 собраны основные результаты расчетов многочисленных вариантов, выполненных методом крупных частиц, разд. 5,  $N_x = 200\text{--}400$ ,  $\mu = 1/10$ . Начальное возмущение представлялось в виде суммы короткомасштабного (разд. 6) и широкодиапазонного (41) возмуще-

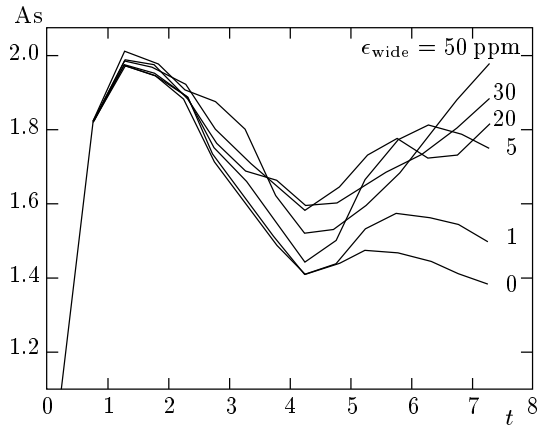


Рис. 18. Зависимость эволюции коэффициента асимметрии  $As$  от амплитуды шумов  $\epsilon_{wide}$ , указанной у кривых в промилле

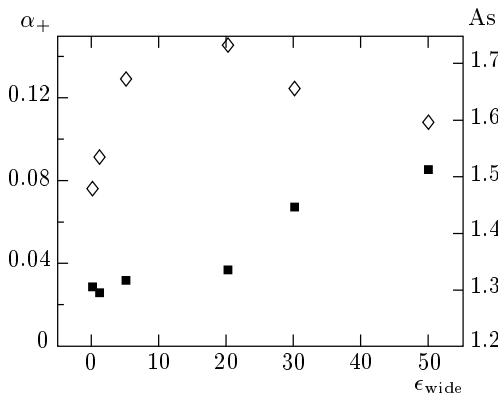


Рис. 19. Зависимости коэффициентов  $\alpha_+(t = 5)$  ( $\diamond$ ) и  $As(t = 5)$  ( $\blacksquare$ ) от амплитуды  $\epsilon_{wide}$  в промилле. При слабых шумах течение не отличается от спонтанного. Влияние шума становится существенным при  $(\epsilon_{wide})_{thr} \approx 10^{-2}$

ний. Коэффициент  $\alpha_+$  находился по правилу  $\alpha_+ = [h_+(t_{i+1}) - h_+(t_i)] / At(t_{i+1}^2 - t_i^2)$  на отрезках  $t_{i+1} - t_i = 0.5-2$ . Из расчетов следует существование порога  $(\epsilon_{wide})_{thr}$  примерно 10 промилле. Это небольшая амплитуда, примерно процент от скорости насыщения (39), на которой становится существенна нелинейность. Поэтому околопороговые возмущения линейны. Малость порога связана с малостью коэффициента  $\alpha_+$ .

При амплитудах, меньших пороговых, перемешивание происходит в спонтанном режиме, влиянием шумов можно пренебречь. При запороговых амплитудах течение перестраивается. Спектральный бугор смещается в длинноволновую сторону. Это отра-

жает усиление субгармоник. Отношение  $R_{NV}$  увеличивается. С усилением длинноволнового крыла связана интенсификация перемешивания, проявляющаяся в увеличении коэффициента  $\alpha_+$ . Если в спонтанном процессе происхождение субгармоник связано с центральным бугром в спектре, то при стимуляции часть субгармоник «черпается» из широкодиапазонных шумов, присутствующих изначально.

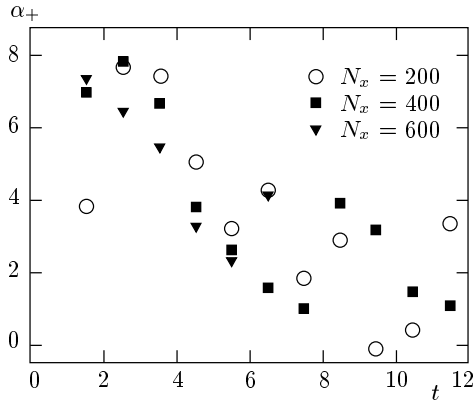
Пороговая амплитуда значительна. Величина порога существенна. Если рассмотреть идеальные условия ( $\lambda_{micr} = +0, \dots$ ), то дорогостоящее снижение амплитуды шумов за счет технологических улучшений (например, полировка) ниже пороговой амплитуды не имеет смысла (предельная чистка).

### 28. ВЛИЯНИЕ БОКОВЫХ УСЛОВИЙ И СМЕНА АВТОМОДЕЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ

Выше изучено спонтанное и стимулированное перемешивание. Рассмотрен случай, когда процессы обмена протекают в свободных условиях. Свободных в том смысле, что внешние геометрические ограничители находятся далеко,  $\bar{\lambda} \ll L_{\perp}, h_{up}, h_{down}$ , разд. 5. С течением времени масштаб  $\bar{\lambda}$  растет (рис. 1а, б) согласно формуле (29) с коэффициентом  $\alpha_H$  и, таким образом, приближается к внешним масштабам. Горизонтальные ( $h_{up}, h_{down}$ , потолок, дно) и боковые ( $L_{\perp}$ ) границы замедляют обмен. Влияние горизонтальных границ рассматривалось в работах [5, 40]<sup>11)</sup>. При выбранной в наших расчетах геометрии «ящика» (разд. 5) раньше проявляются боковые границы (стеснение течения «горловиной», разд. 4, 7, 20).

На рисунке 20 показано поведение коэффициента  $\alpha_+$  в спонтанном случае. К этому же случаю относятся кривые с малым шумом на рис. 17,  $\epsilon_{wide} = 0, 1, 5$  промилле. Заметны флуктуации и снижение  $\alpha_+$  при

<sup>11)</sup> Рассматривалось перемешивание слоя с начальной толщиной  $h_0$  у верхней или нижней границы. На малых временах выполняется  $t \ll t_{trans} = \sqrt{h_0/g} / \sqrt{At} \alpha_{\pm}$ ,  $\bar{\lambda} \approx h_{\pm} \propto t^2$ , знак плюс или минус в зависимости от того, у какой границы слой. При  $t \sim t_{trans}$  скорость расширения слоя стремится к асимптотическому значению  $\dot{h} \sim \sqrt{gh\Delta\rho/\rho_{out}} \approx \sqrt{gh(\rho_{in}h_0/h)/\rho_{out}}$ , где  $h(t)$  — текущая толщина слоя,  $\rho_{in}, \rho_{out}$  — плотности слоя (начальная) и среды, в которой он находится. В связи со сказанным упомянем близкое по духу (решение находится в приближении турбулентной диффузии) автомодельное решение задачи о нестационарной конвекции возле границы среды с нейтральной плавучестью [49]. Решение существенно для геофизики (температурная волна при «включении» механизма охлаждения на поверхности моря).



**Рис. 20.** Коэффициент  $\alpha_+$  в отсутствие стимуляции. Заметное снижение  $\alpha_+$  при  $t \approx 7$ , видимо, вызвано ранним влиянием боковых условий. Сеточно-характеристический метод,  $\mu = 1/10$ ,  $N_x$  — число узлов по горизонтали

$t \approx 7$  (расчет с  $\mu = 1/10$ ), возможно, в связи с началом тормозящего действия горловины. Хотя значения  $h_+(t=7)/L_\perp = 1/5-1/3$  казалось бы еще довольно малы. Для оценки действия боковых границ следует брать отношение  $\lambda_{dyn}/L_\perp$ , где  $\lambda_{dyn}$  — наибольший развитый масштаб в спектре амплитуд. В двумерном случае отношение  $R_{HV} = \lambda_{dyn}/h_+$  достаточно большое (разд. 23, 24), поэтому боковые границы начинают влиять рано.

В сильно вытянутых по вертикали ящиках (разд. 5, [7]) после переходного процесса примерно при  $t_{trans} = \sqrt{L_\perp/g}/\sqrt{At} \alpha_+$  происходит смена автомодельного режима. Рассмотрим асимптотику  $h = h_+ + h_- \gg L_\perp$  с помощью методов теории пути турбулентного перемешивания [5,6]. Запишем выражение для турбулентной скорости:

$$w_{turb} = \sqrt{gl_{turb} \left( l_{turb} \frac{\partial \ln \bar{\rho}}{\partial z} \right)}, \quad (42)$$

где  $l_{turb}$  — размер наибольших вихрей, определяющих турбулентный перенос, комбинация в скобках играет роль локального числа Атвуда,  $\bar{\rho}$  — средняя по горизонтали плотность. В рассматриваемой асимптотике масштаб  $l_{turb}$  в (42) определяется поперечным размером ящика или 2D-, 3D-трубы:

$$l_{turb} = L_\perp. \quad (43)$$

Поэтому коэффициент турбулентной диффузии принимает вид

$$D_{turb} = \frac{1}{3} l_{turb} w_{turb} = \frac{1}{3} \sqrt{gl_{turb}^2 \sqrt{\bar{\rho}'_z/\bar{\rho}}}.$$

Соответственно диффузионное уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{3} g^{1/2} l_{turb}^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\bar{\rho}^{1/2}} \left( \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right)^{3/2} \right]. \quad (44)$$

В задаче о распаде начального скачка плотности параметров размерности [l] или [t] нет. Следовательно, решение уравнения (44) должно быть автомодельным:

$$\bar{\rho}(z, t) = \bar{\rho}(\xi), \quad \xi = \text{const } z/t^\delta. \quad (45)$$

Подставляя (45) в (44), получаем

$$-\xi \bar{\rho}'_\xi = \frac{\text{const}^{5/2} g^{1/2} l_{turb}^2}{3\delta} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{(\bar{\rho}'_\xi)^{3/2}}{\bar{\rho}^{1/2}} \right]. \quad (46)$$

Чтобы (46) было обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, необходимо постоянство фактора  $l_{turb}^2/t^{5\delta/2-1}$ . В случае свободной турбулентности, рассмотренном таким способом в [5], имеем  $l_{turb} \propto h \propto t^2$ . Отсюда  $\delta = 2$ , см. разд. 10, 11, 14. В разбираемом здесь случае длиной трубки масштаб  $l_{turb}$  фиксирован (43). Поэтому в таких 2D- и 3D-трубках закон расширения перемешанной зоны дается степенной зависимостью вида

$$h = L_\perp (t/t_{trans})^{2/5} = C(\alpha_+ At g)^{1/5} L_\perp^{4/5} t^{2/5}, \quad (47)$$

где  $C \sim 1$  — безразмерная постоянная.

Вертикальный автомодельный профиль средней плотности находится в результате интегрирования уравнения (46). Видим, это уравнение одно и то же в случаях свободной и стесненной турбулентности. Его анализ дан в [5]. Профиль имеет вид сглаженной ступеньки<sup>12)</sup>. Таким образом, квадратичная зависимость (1), (5) при  $t \sim t_{trans}$  сменяется законом (47) с затухающим ускорением. Запишем формально

$$h_+(t) = \alpha_+(t) At g t^2 = C_1 (\alpha_+^{free} At g)^{1/5} L_\perp^{4/5} t^{2/5},$$

где  $\alpha_+^{free}$  — значение в свободном случае. Находим

$$\begin{aligned} \alpha_+(t) &= C_1 (\alpha_+^{free})^{1/5} (L_\perp / At g)^{4/5} t^{-1.6} = \\ &= C_2 \alpha_+^{free} (t/t_{trans})^{-1.6}. \end{aligned}$$

Коэффициент  $\alpha_+(t)$  убывает. В этом проявляется торможение боковыми границами.

<sup>12)</sup> Отметим, в случае  $\mu = +0$  (перемешивание с «вакуумом») имеем:  $h_+ \propto t$ ,  $h_- \propto t^2$ . В этом выделенном случае закон (47) неприменим.

## 29. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована рэлей-тейлоровская турбулентность. Темп расширения слоя перемешивания по вертикали связан с поперечной структурой слоя. Слой состоит из одного горизонтального ряда основных ячеек или кластеров, находящихся в непрерывном изменении. Развитие во времени заключается в усилении длинноволновых флуктуаций, ведущих к зарождению крупномасштабных по отношению к текущим перетоков масс. Над и под основным рядом движутся фрагменты предыдущих поколений каскада. Исследована подструктура основной ячейки. В  $2D$ -случае ячейка состоит не из одной пары восходящей и нисходящей колонок, а из нескольких таких пар (кластер).

Исследованы факторы, влияющие на коэффициент  $\alpha_+$ . Начальный длинноволновый шум действует в сторону увеличения  $\alpha_+$  путем стимуляции перемешивания. В обратном направлении влияют боковые стороны расчетной области. Они ограничивают горизонтальный размер кластеров, затрудняют перемешивание и уменьшают  $\alpha_+$ . В работе предложена важная формула (41), описывающая широкодиапазонные шумы. Найдена пороговая амплитуда шумов, влияющих на коэффициент  $\alpha_+$ . Решена задача об асимптотике течения на больших временах в вытянутых расчетных областях. Начало перестройки течения со свободной асимптотикой,  $h \propto t^2$ , на стесненную,  $h \propto t^{2/5}$ , уменьшает коэффициент  $\alpha_+$ .

Информация о структурах содержится в спектре. Важно обработать численные данные так, чтобы, во-первых, получить универсальные (автомодельные) спектры и, во-вторых, отделить случайную составляющую, связанную со стохастическими фазами, от систематической. Эти вопросы решены в работе. Во-первых, предложено автомодельное приведение к безразмерному виду спектральных амплитуд (26), учитывающее случайность фаз соседних гармоник. Во-вторых, найдена процедура сглаживания спектральных данных для выделения систематической составляющей. Показана ее эффективность на модели случайно-периодических функций.

Авторы благодарны С. И. Анисимову и О. М. Белоцерковскому за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99-02-16666, 00-01-00250).

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. H. Sharp, *Physica D* **12**, 3 (1984).
2. H.-J. Kull, *Phys. Rep.* **206**, 197 (1991).
3. N. A. Inogamov, *Astrophys. Space Phys. Rev.* **10** (part 2), 1 (1999).
4. Н. А. Иногамов, А. Ю. Демьянов, Э. Е. Сон, *Гидродинамика перемешивания*, Издательство МФТИ, Москва (1999).
5. С. З. Беленький, Е. С. Фрадкин, *Труды ФИАН* **29**, 207 (1965).
6. В. Е. Неуважаев, *ПМТФ* вып. 6, 82 (1976).
7. E-print archive, [http://esd.gsfc.nasa.gov/ESS/annual\\_reports/ess95contents/app.inhouse.fryxell.html](http://esd.gsfc.nasa.gov/ESS/annual_reports/ess95contents/app.inhouse.fryxell.html).
8. О. М. Белоцерковский, *Численное моделирование в механике сплошных сред*, Физматлит, Москва (1994).
9. О. М. Белоцерковский, В. А. Гущин, В. Н. Коньшин, *ЖВМ и МФ* **27**, 594 (1987).
10. О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин, *Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу*, Наука, Москва (2000).
11. Н. А. Иногамов, А. М. Опарин, *ЖЭТФ* **116**, 908 (1999).
12. *Proc. of the 6<sup>th</sup> International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing*, ed. by G. Jourdan, L. Houas, *Institute Universitaire des Systemes Thermiques Industriels*, Marseille (1997).
13. S. W. Naan, *Phys. Rev. A* **39**(11), 5812 (1989).
14. S. W. Naan, *Phys. Fluids B* **3**(8), 2349 (1991).
15. R. D. Richtmyer, *Comm. Pure Appl. Math.* **13**(2), 297 (1960).
16. Е. Е. Мешков, *МЖГ* вып. 5, 151 (1969).
17. С. Г. Зайцев, Е. В. Лазарева, В. В. Чернуха, В. М. Беляев, *ДАН* **283**(1), 94 (1985).
18. J. F. Naas and V. Sturtevant, *J. Fluid Mech.* **181**, 41 (1987).
19. В. Б. Розанов, И. Г. Лебо, С. Г. Зайцев, Е. В. Лазарева, Е. И. Чеботарева, А. Н. Алешин, С. Н. Титов, А. М. Василенко, О. В. Буряков, О. В. Куропатенко, В. И. Ольховская, В. П. Ратников, В. Г. Яковлев, И. Г. Жидов, Е. Е. Мешков, Н. В. Невмержицкий, *Экспериментальное исследование гравитационной неустойчивости и турбулентного перемешивания стратифицированных потоков в поле*

- ускорения в связи с задачами инерциального термоядерного синтеза, Препринт ФИАН № 56, Москва (1990).
20. U. Alon, J. Hecht, D. Ofer, and D. Shvarts, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 534 (1995).
  21. *Математическая энциклопедия*, под ред. И. М. Виноградова, Советская энциклопедия, Москва (1979).
  22. S. I. Anisimov, Ya. B. Zel'dovich, N. A. Inogamov, and M. F. Ivanov, in: *Shock Waves, Explosions and Detonation*, ed. by M. Summerfield. Vol. 87, AIAA, Washington, DC (1983), p. 218.
  23. Н. А. Иногамов, *Письма в ЖТФ* **4**(12), 743 (1978).
  24. А. М. Прохоров, С. И. Анисимов, П. П. Пашинин, *УФН* **119**(3), 401 (1976).
  25. D. T. Dumitrescu, *Z. Angew. Math. Mech.* **23**(3), 139 (1943).
  26. R. M. Davies and G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **200**, 375 (1950).
  27. P. R. Garabedian, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **241**(1226), 423 (1957).
  28. G. Birkhoff and D. Carter, *J. Math. Mech.* **6**(6), 769 (1957).
  29. J.-M. Vanden-Broeck, *Phys. Fluids* **27**(5), 1090 (1984).
  30. S. I. Anisimov, A. V. Chekhlov, A. Yu. Dem'yanov, and N. A. Inogamov, *Russian J. Computational Mechanics* **1**, 5 (1993).
  31. Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло, *Струи, следы и каверны*, Мир, Москва (1964). G. Birkhoff and E. H. Zarantonello, *Jets, wakes and cavities*, Academic Press Inc. Publishers, New York (1957).
  32. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, Москва (1970).
  33. С. Ф. Гаранин, *Вопр. атомной науки и техн. Серия: теор. и прикл. физ. вып. 3/1, 12* (1995). (S. F. Garanin, in: *Proc. 5<sup>th</sup> Int. Workshop Comp. Turb. Mixing*, ed. by D. Youngs, J. Glimm, and B. Boston, World Scientific, Singapore (1995).)
  34. P. Wilson, M. Andrews, and F. Harlow, *Phys. Fluids* **11**(8), 2425 (1999).
  35. M. B. Schneider, G. Dimonte, and B. Remington, *Phys. Rev. Lett.* **80**(16), 3507 (1998).
  36. D. L. Youngs, *Phys. Fluids A* **3**(5), 1312 (1991).
  37. K. I. Read, *Physica D* **12**(1-3), 45 (1984).
  38. Ю. В. Янилкин, *Вопр. атомной науки и техн. Серия: матем. модел. физ. процессов*, вып. 4, 88 (1999).
  39. J. Glimm, J. W. Grove, X.-L. Li, K.-M. Shyue, Q. Zhang, and Y. Zeng, *SIAM J. Sci. Comp.* **19**, 703 (1998).
  40. N. N. Anuchina, N. S. Es'kov, A. V. Polionov, O. S. Plyutina, O. M. Kozyrev, and V. I. Volkov, *Proc. of the 6<sup>th</sup> International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing*, ed. by G. Jourdan, L. Houas, Institute Universitaire des Systemes Thermiques Industriels, Marseille (1997).
  41. М. Д. Камчибеков, Е. Е. Мешков, Н. В. Невмержицкий, Е. А. Сотсков, *Турбулентное перемешивание на цилиндрической границе газ-жидкость*, Препринт № 46-96. РФЯЦ, ВНИИЭФ, Саров (1996).
  42. X. He, R. Zhang, S. Chen, and G. D. Doolen, *Phys. Fluids* **11**(5), 1143 (1999).
  43. G. Birkhoff, in: *Proc. of Symposia in Appl. Math.*, Vol. XIII, *Hydrodynamic Instability*, ed. by G. Birkhoff, R. Bellman, and C. C. Lin, Amer. Math. Society (1962) (пер. *Гидродинамическая неустойчивость*, Мир, Москва (1964)).
  44. Н. А. Иногамов, *ЖЭТФ* **107**(5), 1596 (1995).
  45. D. L. Youngs, *Physica D* **12**(1-3), 32 (1984).
  46. P. F. Linden, J. M. Redondo, and D. L. Youngs, *J. Fluid Mech.* **265**, 97 (1994).
  47. D. Ofer, D. Shvarts, Z. Zinamon, and S. A. Orszag, *Phys. Fluids B* **4**, 3549 (1992).
  48. D. Ofer, U. Alon, D. Shvarts, R. L. McCrory, and C. P. Verdon, *Phys. Plasmas* **3**(8), 3073 (1996).
  49. S. I. Voropayev and Y. D. Afanasyev, *Phys. Fluids A* **5**(10), 2461 (1993).