

ПОДАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

*В. В. Вечеславов**

*Институт ядерной физики им. Г. И. Буджера Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 26 июня 2000 г.

Описываются результаты выполненного недавно численного исследования канонического отображения с пилообразной силой. Обсуждаются динамические эффекты образования инвариантных резонансных структур различных порядков, наличие которых исключает возможность развития глобального хаоса и ограничивает диффузию по импульсу в фазовом пространстве. Исследуется динамическая ситуация вблизи сепаратрисы целого резонанса в окрестности критического режима и выясняются обстоятельства, обеспечивающие устойчивость этой сепаратрисы в критическом состоянии. Наряду с отображением рассматривается родственная ему непрерывная гамильтонова система. Для этой системы вводятся сепаратрисное отображение и интеграл Мельникова—Арнольда, анализ которых способствует пониманию причин, порождающих необычную динамику. Показано, что такая динамика сохраняется при значительных изменениях формы пилы. Отмечены возникшие новые проблемы и открытые вопросы.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg

1. ВВЕДЕНИЕ

Возникновение динамического хаоса, согласно современной теории нелинейных гамильтоновых систем, связано с эффектом разрушения сепаратрис резонансов и образованием на их месте хаотических слоев [1–3]. Как известно, сепаратриса одиночного нелинейного резонанса — это две пространственно-совпадающие ветви, отвечающие ходу времени соответственно вперед и назад. Обе ветви являются непрерывными траекториями с бесконечным периодом движения, которые выходят из положения неустойчивого равновесия (седло) и затем асимптотически к нему же приближаются. При наличии в системе других нелинейных резонансов они расщепляются и, по-прежнему выходя из седла навстречу друг другу, более к нему не возвращаются. Свободные концы ветвей расщепленной сепаратрисы образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины, которые заполняют при этом узкую область вблизи невозмущенной сепаратрисы, формируя хаотический слой [1–3]. Перекрывание хаотических слоев всех резонансов системы как раз и означает возникновение глобального хаоса.

Утверждение о том, что расщепление сепаратрисы резонанса и образование на ее месте хаотического слоя в типичной (т. е. неинтегрируемой) гамильтоновой системе происходят при почти любом возмущении, можно назвать центральным пунктом современных представлений. Считается также, что сепаратрисы разрушаются в первую очередь, потому что имеют нулевую частоту и взаимодействие нелинейных резонансов в их окрестности всегда существенно [1–3]. В этой «обычной» динамике переход от хаотического слоя к хаотическому морю с ростом параметра возмущения изучен достаточно хорошо и объясняется разрушением инвариантных кривых с иррациональными числами вращения и образованием так называемых кантор-торов [4].

Условия образования глобального хаоса различны для динамических систем с аналитическими и гладкими зависимостями возмущения от фазы. Основной темой здесь является вопрос о степени гладкости (число l непрерывных производных силы), при которой глобальный хаос имеет место не для сколь угодно малого значения параметра системы, а лишь выше некоторой пороговой величины.

Условия образования глобального хаоса различны для динамических систем с аналитическими и гладкими зависимостями возмущения от фазы. Основной темой здесь является вопрос о степени гладкости (число l непрерывных производных силы), при которой глобальный хаос имеет место не для сколь угодно малого значения параметра системы, а лишь выше некоторой пороговой величины.

*E-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

Исследования Мозера и Рюссмана показали, что такой порог существует всегда при $l > 3$ [5]. Однако отсутствуют доказательства обратного утверждения о том, что при $l \leq 3$ порога нет и диффузия по импульсу в фазовом пространстве ничем не ограничена.

Недавно появилась теорема Овсянникова о существовании у двумерного канонического отображения вида

$$\bar{p} = p + Kf(x), \quad \bar{x} = x + \bar{p} \pmod{1} \quad (1)$$

с периодической $f(x+1) = f(x)$ и антисимметричной $f(-x) = -f(x)$ пилообразной силой (степень гладкости $l = 0$):

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{при } x \leq 0.25, \\ 4(0.5 - x) & \text{при } |0.5 - x| \leq 0.25, \\ 4(x - 1) & \text{при } |x - 1| \leq 0.25, \end{cases} \quad (2)$$

неразрушенных сепаратрис целых резонансов при точно определенном счетном множестве критических значений параметра системы K [6]. Этот важный результат до сих пор не опубликован и поэтому для удобства читателя текст сообщения [6] приведен в Приложении.

Теорема Овсянникова послужила для нас толчком к интенсивному численному и теоретическому исследованию системы (1), (2) и ее модификаций [7, 8]. Было найдено, что не только для целых, но и для дробных резонансов любого порядка существуют свои критические числа, при которых их сепаратрисы также не расщепляются. Краткий обзор полученных нами к настоящему времени основных численных результатов дается ниже во втором разделе. К сожалению, авторам [6–8] была неизвестна важная и интересная математическая статья Булита [9], в которой исследовалась та же модель. По этой причине во второй раздел включены также сведения об основных строго доказанных результатах Булита и отмечены различия в его и наших подходах к проблеме.

В третьем разделе исследуется динамическая ситуация вблизи сепаратрисы целого резонанса в окрестности критического режима. Здесь выясняются некоторые обстоятельства, обеспечивающие удивительную устойчивость этой сепаратрисы в критическом состоянии.

Наряду с отображением (1), (2) будет рассмотрена также родственная ему непрерывная система с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H(x, p, t) &= H_0(x, p) + \epsilon U(x, t), \\ H_0 &= p^2/2 + \omega_0^2 V(x), \\ U(x, t) &= \cos(2\pi x - \tau - \tau_0) + \cos(2\pi x + \tau + \tau_0), \\ \tau &= \Omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

где $V(x) = -\int f(x)dx$ — потенциал пилы, $\epsilon \ll 1$ и возмущение содержит две симметричные гармоники. Исследование этой системы, выполненное в четвертом разделе, помогает понять некоторые детали динамического поведения отображения (1), (2).

Пятый раздел посвящен рассмотрению общей модели несимметричной пилы, частным случаем которой является симметричная пила (2). Здесь показано, что необычная динамика сохраняется внутри всего диапазона возможного изменения параметра перекоса и исчезает только в предельных точках (где двузубая пила превращается в однозубую). В заключении подводятся некоторые итоги и обсуждаются открытые вопросы.

2. КРИТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И КРИТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ СИСТЕМЫ (1), (2)

Периодическую орбиту и отвечающий ей резонанс принято обозначать числом вращения $\nu = P/Q$, где Q — число итераций отображения на P периодов орбиты [2]. Резонансы с $Q = 1$ называются целыми, остальные — дробными. Невозмущенные сепаратрисы резонансов имеют $\nu = 0$ и именно они являются объектами нашего рассмотрения.

Одной из важных черт обсуждаемой динамики оказалось наличие для резонанса любого порядка Q своего (по-видимому, счетного) множества «критических» значений параметра $K_{Q,m}$ ($m = 1, 2, \dots$), при которых его сепаратриса не только не расщепляется (несмотря на наличие сильного локального хаоса, см. рис. 1), но и оказывается непроходимым барьером для других траекторий. Имея полную протяженность по фазе, она изолирует внутренность «своего» резонанса (область с конечным фазовым объемом) от остальной части фазового пространства. Это инвариантное многообразие получило название инвариантной резонансной структуры [7]. Наличие таких структур, как и наличие инвариантных кривых, полностью запрещает глобальный хаос и ограничивает диффузию по импульсу.

Для поиска критических режимов использовалась разработанная нами ранее техника измерения

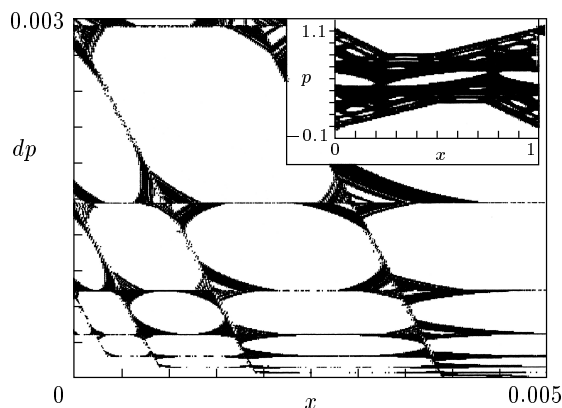


Рис. 1. Параметр системы равен второму критическому числу $K = K_{1,2} = 1/8$. Сильно увеличенная малая область «щели» (по импульсу) между одной хаотической траекторией с начальными координатами $x = 0, p = 0.37$ и нижней сепаратрисой целого резонанса (см. текст). Здесь $dp = p - p_s$, где $p(x)$ — импульс траектории и $p_s(x)$ — импульс на сепаратрисе. На вставке: область, занятая этой траекторией. Число итераций отображения равно 10^9

угла α_Q пересечения ветвей сепаратрис в центральной гомоклинической точке (см. [10], где описаны детали и результаты таких измерений для стандартного отображения).

Полученные численно зависимости $\alpha_Q(K)$ для всех обследованных нами резонансов системы (1), (2) оказались знакопеременными и колебательными [7], что качественно отличает их от хорошо изученной к настоящему времени аналогичной зависимости для стандартного отображения (последняя является знакопостоянной и строго монотонной [10]). Это отличие связано с существенно различным динамическим поведением этих двух систем.

Критические числа $K_{Q,m}$ ($m = 1, 2, \dots$) резонанса порядка Q отвечают условию $\alpha_Q(K_{Q,m}) = 0$ и оказываются двух типов: для нечетных m угол проходит через нуль в процессе плавного изменения, для четных m — скачком.

Анализ показал, что четные критические числа целых резонансов системы (1), (2) точно совпадают с элементами указанного в теореме Овсянникова счетного множества и определяются решениями трансцендентного уравнения (1.4) при целых значениях коэффициента k (см. Приложение). Оказалось, что не входящие в теорему Овсянникова нечетные критические числа также определяются решениями того же самого уравнения, но при полуцелых значениях коэффициента, и потому для любого критиче-

ского числа целого резонанса имеем

$$K_{1,m} = \sin^2(\beta_m/2), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где β_m — наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{2} \sin \frac{m\beta}{2} = \cos \frac{\beta}{2}. \quad (5)$$

Последние соотношения позволяют найти, в частности, точные значения двух первых критических чисел $K_{1,1} = 1/3$ и $K_{1,2} = 1/8$.

Отображение (1), (2) подробно исследовалось также в более ранней работе [9], где было строго доказано существование инвариантных кривых с рациональными и иррациональными числами вращения в широком диапазоне изменения параметра K . Сохранение сепаратрис и образование инвариантных резонансных структур различных порядков в [9] специально не обсуждаются, но имеются упоминания об инвариантных свойствах сепаратрис с $\nu = 0$ целых резонансов для первых критических чисел $K_{1,1} = 1/3$ и $K_{1,2} = 1/8$. По-видимому, именно в этой работе в полной мере был впервые установлен факт «необычного» динамического поведения системы (1), (2).

Факт существования счетного множества значений параметра K , при которых сепаратрисы резонансов не разрушаются, несмотря на возмущающее влияние многих других резонансов, приводит к важным динамическим последствиям.

На вставке к рис. 1 показана область, которую заняла одна хаотическая траектория при значении параметра системы, равном первому четному критическому числу $K = K_{1,2} = 1/8$. Нижняя и верхняя границы этой области весьма близки (это определение поясняется в следующем разделе) к вычисленным по точным формулам Овсянникова (1.5) сепаратрисам целых резонансов. Здесь все противоречит представлениям «обычной» динамики.

Известно, что имеется бесконечно много «нетипичных» гамильтоновых систем, у которых сепаратрисы всех резонансов нерасщеплены. Это так называемые полностью интегрируемые системы, в динамическом поведении которых нет никакого хаоса [2, 3]. Поразительной особенностью ситуации, представленной на рис. 1, является сосуществование неразрушенных сепаратрис двух соседних целых резонансов с областью мощного хаоса, где все остальные инвариантные резонансные структуры и инвариантные кривые с самыми устойчивыми иррациональными числами вращения разрушены и хаотические слои всех дробных резонансов перекрыты.

Критические числа дробных резонансов «щели»

Q	13	15	17	19	21	23
$K_{1,2} - K_Q$	$6.71 \cdot 10^{-8}$	$4.19 \cdot 10^{-9}$	$2.62 \cdot 10^{-10}$	$1.63 \cdot 10^{-11}$	$1.02 \cdot 10^{-12}$	$6.39 \cdot 10^{-14}$

Выяснение динамической ситуации вблизи такой сохранившейся сепаратрисы является одним из главных вопросов, частичный ответ на который дан в следующем разделе.

Положение дел с первым нечетным критическим числом $K = K_{1,1} = 1/3$ выглядит еще более удивительным. Для всех обследованных нами дробных резонансов численно (с 25 верными знаками после запятой) было получено равенство $K_{Q,1} = K_{1,1} = 1/3$. Отсюда следует, что резонансы всех порядков при $K = 1/3$ являются инвариантными резонансными структурами и хаотические траектории никогда не пересекают сепаратрису «своего» резонанса, внутри которого они стартовали.

3. ДИНАМИКА ВБЛИЗИ СЕПАРАТРИСЫ ЦЕЛОГО РЕЗОНАНСА ПРИ $K \approx K_{1,2}$

В этом разделе обсуждается один из основных вопросов — динамическая ситуация вблизи сепаратрисы целого резонанса при подходе к критическому состоянию, в критическом состоянии (см. рис. 1) и на выходе из него.

При небольшом отклонении параметра системы K от критической величины $K_{1,2} = 1/8$ в сторону увеличения сепаратриса начинает пропускать другие траектории, но среднее время (число итераций) T_C прохождения резонанса зависит от величины расстройки $\Delta K = K - K_{1,2} > 0$. В [7] получена эмпирическая зависимость для среднего времени прохождения целого резонанса:

$$\langle T_C \rangle = 135 \left(\frac{K_{1,2}}{K - K_{1,2}} \right)^{1.193} (1 \pm 0.09), \quad (6)$$

$$K > K_{1,2}.$$

Видно, что по мере приближения к критическому режиму время прохождения неограниченно растёт.

В критическом состоянии (см. рис. 1), как отмечалось выше, хаотическая траектория весьма близко подходит к сепаратрисам. Для количественной оценки этой близости фиксировалось минимальное (по импульсу) расстояние между этой траекторией и вычисленными по точным формулам Овсянникова сепаратрисами целых резонансов. Оказалось, что

между траекторией и нижней сепаратрисой (назовем ее главной) имеется «щель», минимальная ширина которой $dp_{min} \approx 3 \cdot 10^{-6}$. На рисунке 1 показана сильно увеличенная малая ее часть, откуда видно, что непосредственно к главной сепаратрисе примыкает область, заполненная дробными резонансами $1/Q$ относительно высоких порядков, которые располагаются слоями тем ближе к ней, чем больше величина Q (самый нижний еще различимый на этом рисунке резонанс есть $1/23$). Поскольку каждый такой резонанс имеет полную протяженность по фазе, то, чтобы попасть в нижний слой, надо пересечь верхний. Для некоторых из резонансов «щели» были найдены ближайшие к величине $K_{1,2} = 1/8$ критические числа K_Q , значения которых показаны в таблице. Видно, что с ростом порядка резонанса Q его число вращения $1/Q$ и его критическое число K_Q стремятся к числу вращения (нулю) и критическому числу $K_{1,2} = 1/8$ главной сепаратрисы, причем для любого Q имеет место неравенство $K_Q < K_{1,2}$.

Стремящаяся подойти к главной сепаратрисе хаотическая траектория должна эти резонансы пересечь, затрачивая на прохождение каждого из них определенное время. Прямое измерение времени проникновения траектории из хаотического моря в хаотическую область внутри дробного резонанса высокого порядка технически невозможно. По этой причине была измерена другая величина — среднее время T_E выхода из резонанса хаотической траектории, стартовавшей внутри него [7]:

$$\langle T_E \rangle = 80e^{0.705Q} (1 \pm 0.07). \quad (7)$$

Эта формула отражает тот факт, что с увеличением величины Q критические числа резонансов щели приближаются (снизу) к значению $K_{1,2} = 1/8$. Как следствие, собственные сепаратрисы этих резонансов становятся все менее и менее «прозрачными» и время выхода из них хаотической траектории неограниченно растёт. В критическом состоянии целого резонанса глобальный хаос, разумеется, полностью исключен.

Ситуация, возникающая при выходе из критического состояния (т. е. при отклонении K от критической величины $K_{1,2}$ в сторону уменьшения) оказалась намного сложнее.

При $K_{1,2} = 0.125 > K > K_{1,3} = 0.06191\dots$ и вдали от критических чисел глобальный хаос определенно имеет место. Так, например, в интервале $0.1090 \leq K \leq 0.1094$ наблюдалась глобальная диффузия, скорость которой резко убывала при приближении к краям интервала (начальные условия $x = 0, p = 0.37$, число итераций 10^9). Но если плавно уменьшать величину параметра, начиная от $K = K_{1,2} = 0.125$, то из данных, приведенных в таблице, следует, что резонансы щели будут один за другим последовательно попадать в свои критические режимы и не позволят траектории подходить к главной сепаратрисе на расстояние ближе некоторого dp_{min} . Так, при $K = 0.1249999581\dots$ (критическое значение для $Q = 15$) минимальное расстояние траектории от сепаратрисы оказалось равно $dp_{min} \approx 4.6 \cdot 10^{-5}$, а при $K = 0.12499993294\dots$ (критическое значение для $Q = 13$) $dp_{min} \approx 1.8 \cdot 10^{-4}$ при числе итераций отображения 10^{11} в каждом случае.

Итог всего рассмотрения можно подвести в следующей несколько образной форме. Резонансы высоких порядков формируют перед главной сепаратрисой своего рода «заслон», который «сопротивляется» приближению к ней хаотической траектории. В надкритическом режиме, $K > K_{1,2}$, траектории удаётся пересечь целый резонанс, затрачивая на это тем больше времени, чем ближе K к $K_{1,2}$. При $K = K_{1,2}$ в процессе очень длительной эволюции траектория может подойти к главной сепаратрисе сколь угодно близко, но никогда ее не достигнет. На выходе из критического режима при плавном уменьшении параметра K система будет последовательно проходить через критические состояния резонансов щели и развитие глобального хаоса принципиально возможно лишь внутри интервалов между соседними критическими числами.

4. СЕПАРАТРИСНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И ИНТЕГРАЛ МЕЛЬНИКОВА–АРНОЛЬДА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ (3)

Изложенные выше эмпирические факты нуждаются в объяснениях. В первую очередь хотелось бы понять природу механизма, ответственного за колебательный и знакопеременный характер основной зависимости $\alpha_1(K)$, о которой говорилось в разд. 2. Известно, что проводить численное исследование лучше с отображениями, а аналитическое — с непрерывными системами [2]. По этой причине ниже мы будем работать с гамильтонианом (3) и используем

затем полученные результаты в отношении отображения (1), (2).

Сепаратриса $(x_s(\psi), \psi = 2\omega_0 t)$ невозмущенной ($\epsilon = 0$) системы (3) может быть записана в виде:

$$x_s(\psi) = \begin{cases} ae^\psi & \text{при } -\infty < \psi < -\pi/4, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \psi \right) & \text{при } -\pi/4 < \psi < \pi/4, \\ 1 - ae^{-\psi} & \text{при } \pi/4 < \psi < \infty, \end{cases} \quad (8)$$

где обозначено $a = e^{\pi/4}/4$.

Значение гамильтониана на сепаратрисе равно $H_{0,s} = \omega_0^2/4$, а период движения вблизи нее вычисляется по формуле

$$T_s(w) \approx \frac{1}{2\omega_0} \ln \left(\frac{2e^{\pi/2}}{|w|} \right). \quad (9)$$

Здесь и далее $w = H_0/H_{0,s} - 1$ — относительное отклонение от сепаратрисы по энергии. Заметим, что формула (9) имеет сравнительно неплохую точность: даваемые ею значения отклоняются от найденных численно менее чем на 5% в интервале $-0.47 \leq w \leq 1.06$.

Сепаратрисное отображение для системы (3) записывается в виде [1]

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w + W \sin \tau, \\ \bar{\tau} &= \tau + \lambda \ln \left(\frac{2e^{\pi/2}}{|\bar{w}|} \right) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\lambda = \Omega/(2\omega_0)$ — параметр адиабатичности ($2\omega_0$ — частота колебаний вблизи точки устойчивого равновесия $x = 0.5, p = 0$). Входящая в (10) амплитуда W может быть найдена численно (и тогда мы будем писать $W = W_E$) или теоретически ($W = W_T$); сравнение этих зависимостей будет проведено ниже.

Теоретическое значение амплитуды W_T определяется формулой

$$\begin{aligned} W_T(\lambda) &= \pm \max |\bar{w} - w| = \\ &= \pm \frac{\max(\Delta H_0)}{H_{0,s}} = \frac{16\pi\epsilon}{\omega_0^2} W_{MA}(\lambda), \end{aligned} \quad (11)$$

где знак совпадает со знаком ΔH_0 и W_{MA} — интеграл Мельникова–Арнольда.

Следуя описанной в [1] методике, будем искать изменение невозмущенной энергии H_0 за полупери-

од колебаний или период вращения (здесь $\{\dots\}$ — скобка Пуассона):

$$\Delta H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H\} dt = -\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \frac{\partial U}{\partial x} dt.$$

Считая, что система движется достаточно близко к сепаратрисе, и вычисляя последнее соотношение при $x = x_s$, $p = p_s = \dot{x}_s = 2\omega_0 dx_s/d\psi$, находим:

$$\Delta H_0 = -4\pi\epsilon \sin \tau_0 \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_s(\psi)}{2\omega_0} \right] \sin [2\pi x_s(\psi)] \sin(\lambda \psi) d\psi.$$

Заметим попутно, что входящий в подынтегральное выражение множитель p_s снимает известную проблему специальной нормировки этого интеграла для подавления его осциллирующей части, поскольку асимптотически стремится к нулю на обоих пределах интегрирования (подробности в разд. 4.4 обзора [1]).

Окончательно интеграл Мельникова–Арнольда можно записать в виде

$$W_{MA}(\lambda) = \frac{\max \Delta H_0}{4\pi\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin \psi \right) \cos \psi \sin(\lambda \psi) d\psi + 2a \int_{\pi/4}^{\infty} e^{-\psi} \sin(2\pi a e^{-\psi}) \sin(\lambda \psi) d\psi. \quad (12)$$

Первое слагаемое в этой формуле описывает вклад от «эллиптического» участка сепаратрисы ($0.25 \leq x_s \leq 0.75$), второе — от остальной части. Оба слагаемых являются колебательными и знакопеременными, их колебания находятся почти в противофазе. Результирующая функция $W_{MA}(\lambda)$ также оказывается знакопеременной и колебательной (см. рис. 2). Интересно отметить, что формула (12) допускает весьма простое асимптотическое ($\lambda \gg 1$) представление:

$$W_{MA}(\lambda) \approx -1.17 \lambda^{-3.034} \cos \left(\frac{\pi}{4} \lambda \right), \quad (13)$$

среднеквадратичная ошибка которого составляет, например, в интервале $10 \leq \lambda \leq 150$ около 4%, а в интервале $50 \leq \lambda \leq 150$ около 1.3%.

Вычисленную по формулам (11), (12) теоретическую зависимость W_T необходимо сравнить с найденными численно величинами W_E . Поясним, как

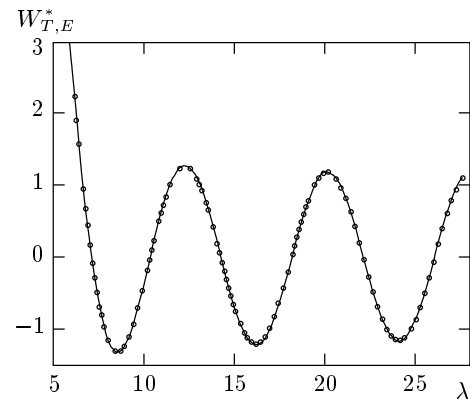


Рис. 2. Сплошная линия — нормированная теоретическая амплитуда W_T^* сепаратрисного отображения (10), кружки — нормированная амплитуда W_E^* , полученная в результате численного построения этого отображения по периодам движения системы

определялись значения W_E (подробности в [11]). Центральная точка пересечения ветвей сепаратрисы основного резонанса системы (3) лежит на линии $x = 0.5$, и в первую очередь на этой линии с высокой точностью отыскивалась ее ордината p_h . Начальные условия для орбит выбирались случайным образом на этой же линии в малой окрестности вокруг p_h гарантированно внутри хаотического слоя. Траектория совершала предписанное ей число периодов движения N (период движения T — интервал времени между соседними моментами прохождения устойчивой фазы $x = 0.5$). Для каждого T вычислялась средняя энергия по формуле

$$w = 2 \exp \left(\frac{\pi}{2} - 2\omega_0 T \right). \quad (14)$$

Определяя изменение энергии $\delta w = \bar{w} - w$ для пары соседних периодов и приписывая его к общему для этих периодов моменту времени t_k , можно построить сепаратрисное отображение (10) (δw_k , $\tau_k = \Omega t_k \pmod{2\pi}$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$) и найти его амплитуду W_E .

На рисунке 2 представлено сравнение полученной с помощью интеграла (12) теоретической W_T и найденной численно W_E амплитуд сепаратрисного отображения (10). Для обеспечения удобного масштаба сравниваются не сами эти величины, а их нормированные значения:

$$W_T^* = A W_T, \quad W_E^* = A W_E, \quad A = \frac{\omega_0^2 \lambda^{3.034}}{16\pi\epsilon} \quad (15)$$

(показатель степени λ в корректирующем множителе взят из подгоночной формулы (13)). Прекрас-

ное совпадение этих зависимостей позволяет в дальнейшем уверенно использовать формулу (12) для интеграла Мельникова–Арнольда и считать в (10) $W = W_T$.

Наиболее важной для практики величиной является не амплитуда W сепаратрисного отображения, а полуширина хаотического слоя w_{max} . Для всех указанных на рис. 2 кружками значений амплитуд было выполнено итерирование сепаратрисного отображения и найдены значения w_{max} . Оказалось, что установленное Чириковым соотношение (формула (6.8) в [1]) между размером слоя w_{max} и амплитудой W ,

$$w_{max} \approx \lambda |W|, \tag{16}$$

весьма неплохо выполняется в нашем случае, причем даже в окрестности нулевых W . При $\lambda > 10$, например, имеет место неравенство $0.94 \leq w_{max}/\lambda |W| \leq 1.3$.

Полученные для непрерывной системы (3) результаты можно распространить на отображение (1), (2). Будем называть критическими те значения $\lambda_{1,m}$ ($m = 1, 2, \dots$), для которых $W_{MA}(\lambda_{1,m}) = 0$ (первый индекс указывает на отношение к основному резонансу). Нетрудно заметить, что если перевести непрерывную систему (3) с параметром λ в отображение (1), (2) с параметром K или наоборот, то надо воспользоваться соотношением

$$K = \omega_0^2 = (\pi/\lambda)^2. \tag{17}$$

Это равенство позволяет пересчитать критические значения $\lambda_{1,m}$ системы (3) в критические значения параметра отображения. Обозначив найденные путем такого пересчета величины через K^* , получим

$$K_{1,m}^* = \left(\frac{\pi}{\lambda_{1,m}} \right)^2, \quad m = 1, 2, \dots \tag{18}$$

Эти числа следует сравнить с величинами $K_{1,m}$, вычисленными по формулам (4), (5). Результат такого сравнения хорошо описывается приближенной формулой

$$\frac{K_{1,m}}{K_{1,m}^*} \approx 1 + 0.676m^{-0.875}, \quad m = 1, 2, \dots$$

В асимптотическом пределе ($m \gg 1$) множества $K_{1,m}$ и $K_{1,m}^*$ совпадают, что и оправдывает применение полученных здесь результатов в отношении отображения (1), (2).

Можно считать, что сформулированная в начале настоящего раздела цель частично достигнута: периодическое прохождение амплитуды сепаратрисного отображения W_T через нуль (и отсутствие в

этих точках расщепления сепаратрис) «обеспечивает» интеграл Мельникова–Арнольда. Стала понятной и причина этого явления, связанная с тем, что на «эллиптическом» и «гиперболическом» участках сепаратрисы изменение энергии имеет разные знаки.

5. ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ

Представленная выше динамика оказывается, на наш взгляд, весьма нетривиальной. Возникает естественный вопрос: не является ли порождающая ее функция (2) чем-то уникальной и не исчезнут ли все необычные динамические эффекты при малом «шевелении» этой конструкции? Для ответа на этот вопрос рассмотрим в этом коротком разделе модель несимметричной пилы, введя в (2) параметр перекося s :

$$f(x, s) = \begin{cases} \frac{4x}{1+4s} & \text{при } 0 \leq x \leq 0.25 + s, \\ \frac{2-4x}{1-4s} & \text{при } 0.25 + s \leq x \leq 0.75 - s, \\ \frac{4(x-1)}{1+4s} & \text{при } 0.75 - s \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{19}$$

Параметр s может изменяться в интервале $-0.25 \leq s \leq 0.25$, и при $s = 0$ мы возвращаемся к симметричной модели (2).

В крайних точках указанного интервала двухзубая пила вырождается в однозубую, но динамическое поведение системы в этих предельных точках качественно различно. При $s = -0.25$ движение по сепаратрисе является простым гармоническим колебанием и мы не будем его рассматривать. В другом пределе, $s = 0.25$, сепаратрисы расщепляются при любом K и хаос становится глобальным. Динамика этого режима интенсивно исследовалась ранее и в ней нет ничего необычного (см., например, [12]). Главная цель данного раздела — понять основные детали этого перехода. Воспользуемся установленной выше эквивалентностью непрерывного и дискретного описаний и проследим эволюцию интеграла Мельникова–Арнольда при изменении параметра s .

При $s \neq 0$ «эллиптический» и «гиперболический» участки периода пилы оказываются неравными и движение на них описывается разными частотами, соответственно ω_1 и ω_2 :

$$\omega_1 = \omega_0/\sqrt{1-4s}, \quad \omega_2 = \omega_0/\sqrt{1+4s}. \tag{20}$$

В качестве независимой переменной здесь удобно использовать время t . Продолжительность T_{sm} движения по сепаратрисе от точки устойчивого равновесия $x = 0.5$ до точки излома $x = 0.75 - s$ определяется формулой

$$T_{sm} = \frac{1}{2\omega_1} \arcsin \sqrt{\frac{1-4s}{2}}. \tag{21}$$

Сепаратриса $x_s(t)$ невозмущенной системы (3) запишется в виде

$$x_s(t, s) = \begin{cases} a_s e^{2\omega_2 t} & \text{при } -\infty < t < -T_{sm}, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1-4s}{2}} \sin 2\omega_1 t \right) & \text{при } -T_{sm} < t < T_{sm}, \\ 1 - a_s e^{-2\omega_2 t} & \text{при } T_{sm} < t < \infty, \end{cases} \tag{22}$$

где обозначено $a_s = (1 + 4s)e^{2\omega_2 T_{sm}}/4$.

Интеграл Мельникова–Арнольда задается формулой

$$W_{MA}(\lambda, s) = 2\omega_1 \sqrt{\frac{1-4s}{2}} \int_0^{T_{sm}} \sin \left(\pi \sqrt{\frac{1-4s}{2}} \sin 2\omega_1 t \right) \cos(2\omega_1 t) \sin(\Omega t) dt + \\ + 4\omega_2 a_s \int_{T_{sm}}^{\infty} e^{-2\omega_2 t} \sin(2\pi a_s e^{-2\omega_2 t}) \sin(\Omega t) dt. \tag{23}$$

С помощью этой формулы удалось исследовать весь интервал изменения параметра s , и выяснилась следующая картина. Всюду внутри этого интервала сохраняется знакопеременный и колебательный характер интеграла Мельникова–Арнольда и, следовательно, множество критических чисел и отвечающих им инвариантных резонансных структур. При этом, однако, полупериод колебаний Λ_0 (расстояние по λ между соседними нулями этого интеграла) при $s \rightarrow 0.25$ неограниченно растет. При $s = 0.25$ первый нуль интеграла Мельникова–Арнольда уходит в бесконечность и восстанавливается «обычная» динамика [12].

Этот вывод полностью согласуется с результатами более ранней работы [9], где была рассмотрена близкая к (1), (19) модель несимметричной пилы и для нее было доказано существование инвариантных кривых с различными числами вращения, среди которых упоминалась также сепаратриса целого резонанса с $\nu = 0$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отображение (1), (2) и непрерывная система (3), демонстрирующие необычную динамику, заслуживают, по нашему мнению, дальнейшего изучения, и хотелось бы отметить несколько наиболее важных проблем.

Проведенные в работе [9] и выполненные нами исследования выявили следующую очень непростую динамическую картину отображения (1), (2). С каждым резонансом из счетного множества всех резонансов этой системы связано свое (вероятно, счетное) множество критических значений параметра K , при которых этот резонанс становится инвариантной структурой (с числом вращения $\nu = 0$) и не пропускает через себя другие траектории. К этому множеству надо добавить все те значения K (их также можно назвать критическими числами), для которых в [9] доказано существование инвариантных кривых с рациональными и иррациональными $\nu > 0$. Представляющее безусловный интерес изучение глобальной диффузии системы (1), (2) при $K \leq 1/3$ поможет, по-видимому, понять, как устроено и что из себя представляет множество всех критических чисел.

В разделе 3 описана динамика подхода к критическому режиму и выходу из него для целого резонанса. Является ли этот сценарий типичным, и справедлив ли он в отношении дробных резонансов — открытый вопрос.

В работе [8] представлена простая теория, объясняющая природу знакопеременного характера зависимости $\alpha_1(K)$ и устойчивость сепаратрисы целого резонанса. Следовало бы провести аналогичное рассмотрение в отношении дробных резонансов.

Возможно, ответы на поставленные и другие вопросы позволят существенно уточнить некоторые представления современной теории нелинейных гамильтоновых систем.

Автор глубоко благодарен Б. В. Чирикову за многочисленные обсуждения и советы и Д. Л. Шепелянскому за информацию о статье Булита [9]. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 97-01-00865).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Теорема Л. В. Овсянникова о сепаратрисах пилообразного отображения [6]

Рассматривается уравнение для функции $x(t)$, определенной на всей прямой $\mathcal{R}(-\infty < t < +\infty)$

$$x(t+h) + x(t-h) - 2x(t) = h^2 f(x(t)), \quad (1.1)$$

где $h > 0$ — заданная постоянная, а функция $f(x)$ — нечетная, 4-периодическая и задана для $0 \leq x \leq 2$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Решение $x(t)$ уравнения (1.1) с функцией (1.2) называется сепаратрисой, если $x(t)$ монотонна и непрерывна на всей оси \mathcal{R} , $x(0) = 0$ и $x(t) \rightarrow 2$ при $t \rightarrow +\infty$, $x(t) \rightarrow -2$ при $t \rightarrow -\infty$.

Теорема. Существует такая последовательность $\{h_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, что $h_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и для каждого $h = h_k$ существует сепаратриса $x = x^k(t)$ как решение уравнения (1.1) с функцией (1.2). Последовательность $\{x^k(t)\}$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно на \mathcal{R} сходится к решению — сепаратрисе для предельного уравнения $x''(t) = f(x)$

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi/4, \\ 2 - e^{\pi/4-t}, & \pi/4 \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (1.3)$$

Конструкция. Пусть $h_k = 2 \sin(\alpha_k/2)$, где α_k есть наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{2} \sin(k\alpha) = \cos(\alpha/2). \quad (1.4)$$

Тогда для $nh_k \leq t \leq (n+1)h_k$ сепаратриса дается формулами

$$x^k(t) = X_n \left(n+1 - \frac{t}{h_k} \right) + X_{n+1} \left(\frac{t}{h_k} - n \right), \quad (1.5)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

с константами

$$X_n = \frac{\sin n\alpha_k}{\sin k\alpha_k}, \quad n \leq k,$$

$$X_n = 2 - \left(\frac{\sqrt{h_k^2 + 4} - h_k}{2} \right)^{2(n-k)}, \quad n \geq k.$$

Заметим, что поскольку период и положение силы (1.2) в этой теореме отличаются от принятого в основном тексте (2), то для перехода от параметра Овсянникова h в уравнении (1.1) к параметру K отображения (1) и наоборот надо использовать соотношение

$$K = h^2/4.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
2. A. Lichtenberg and M. Leiberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer (1992).
3. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
4. R. S. MacKay, J. D. Meiss, and I. C. Percival, Physica D **13**, 55 (1984).
5. J. Moser, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Kl. № 1 (1962), p. 1; *Stable and Random Motion in Dynamical Systems*, Annals of Mathematics Studies № 77, University Press, Princeton (1973).
6. Л. В. Овсянников, Частное сообщение, май (1999).
7. В. В. Вечеславов, *Динамика пилообразного отображения. 1. Новые численные результаты*, Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск (2000); E-print archive nlin.CD/0005048 (2000).
8. В. В. Вечеславов, Б. В. Чириков, *Механизм сохранения сепаратрисы нелинейного резонанса в условиях сильного хаоса*, Препринт ИЯФ 2000-68, Новосибирск (2000).
9. S. Bulet, Comm. Math. Phys. **107**, 241 (1986).
10. В. В. Вечеславов, Б. В. Чириков, ЖЭТФ, **114**, 1516 (1998); В. В. Вечеславов, ЖЭТФ **116**, 336 (1999).
11. В. В. Вечеславов, ЖЭТФ **109**, 2208 (1996).
12. I. Dana, N. W. Murray, and I. C. Percival, Phys. Rev. Lett. **62**, 233 (1989).