

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И ИМПУЛЬСНЫЕ СПЕКТРЫ ФОТОЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ИОНИЗАЦИИ СИЛЬНЫМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ (СЛУЧАЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ)

*В. Д. Мур, С. В. Попруженко**

*Московский государственный инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия*

В. С. Попов

*Институт теоретической и экспериментальной физики
117218, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 декабря 2000 г.

Исследованы (аналитически и численно) импульсное распределение и энергетический спектр фотоэлектронов, образующихся в процессе нелинейной ионизации атомов и молекул лазерным излучением с эллиптической поляризацией. Рассмотрены зависимости этих распределений от эллиптичности ξ электромагнитной волны и их эволюция при изменении параметра Келдыша γ от области оптического туннелирования ($\gamma \ll 1$) до области $\gamma \gg 1$, в которой ионизация носит многофотонный характер. В расчетах используется квазиклассическое приближение, в частности метод «мнимого времени» и метод перевала с разложением вблизи полевого эллипса.

PACS: 32.80.Rm

1. ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая теория многофотонной ионизации атомов и ионов в поле монохроматического лазерного излучения была развита в работах [1–4], где рассмотрены случаи линейной [1–3] и циркулярной [2, 3] поляризации. Наиболее общий случай эллиптической поляризации электромагнитной волны,

$$\mathbf{F}(t) = F \cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \xi F \sin(\omega t) \mathbf{e}_y, \quad (1)$$

рассмотрен в [4, 5] (здесь F — максимальное значение электрического поля, ξ — эллиптичность излучения (ранее [4] обозначалась как ε), $-1 \leq \xi \leq 1$). В [4] получены аналитические формулы для вероятности ионизации и импульсного спектра фотоэлектронов, справедливые для всех значений параметра Келдыша γ , и показано, что при $0 < \xi^2 < 1$ наиболее вероятный импульс вылетающего электрона \mathbf{p}_{max} направлен вдоль малой оси полевого эллипса (ось y в

(1)). Там же было отмечено, что при $\xi = 0$ (линейная поляризация излучения) импульс \mathbf{p}_{max} направлен по электрическому полю \mathbf{F} , а при $\xi = \pm 1$ (циркулярная поляризация) распределение фотоэлектронов становится изотропным в плоскости $\mathbf{F}(t)$. Однако приведенные в [4] формулы для импульсного спектра неприменимы в узкой области $\xi \rightarrow \pm 1$, где происходит переход к циркулярной поляризации. В работе [5] исследованы, в том числе численно, поляризационные зависимости (при всех значениях ξ) импульсного, углового, энергетического распределений фотоэлектронов и скорости ионизации атомов в случае низкочастотного ($\gamma \ll 1$) лазерного поля. Отметим, что сравнение результатов работ [4, 5] ранее не проводилось.

Целью данной работы является исследование энергетического и импульсного спектров фотоэлектронов в зависимости от эллиптичности ξ при всех значениях параметра Келдыша [1]

$$\gamma = \omega \kappa / F = (2K_0 \epsilon)^{-1}. \quad (2)$$

*E-mail: poprz@theor.mephi.ru

Здесь и далее используются атомные единицы $\hbar = m = e = 1$ (m — масса электрона), $K_0 = \kappa^2/2\omega$ — параметр многоквантовости процесса, $\epsilon = F/\kappa^3$ — приведенное электрическое поле, I — потенциал ионизации атомного состояния и $\kappa = \sqrt{2I}$ — характерный для него импульс. Предполагается выполнение условий

$$K_0 \gg 1, \quad \epsilon \ll 1, \quad (2')$$

обеспечивающих применимость квазиклассического приближения для многоквантовых процессов. Мы подробно рассмотрим эволюцию энергетического спектра фотоэлектронов при переходе из режима оптического туннелирования ($\gamma \ll 1$) в антиадиабатическую область $\gamma \gg 1$, а также и в переходную область $\gamma \sim 1$. Будет показано, что (за исключением узкого интервала $1 - \xi^2 \lesssim \epsilon \ll 1$) результаты работ [4, 5], выполненных различными методами, практически совпадают¹⁾. Рассмотрено также изменение импульсного спектра электронов в области $1 - \xi^2 \sim \epsilon$, т. е. для поляризацій, близких к циркулярной. Получены явные аналитические выражения (12), (14) и (18) для энергетического спектра, охватывающие всю область изменения параметра γ и имеющие (как показывает сравнение их с численными расчетами) достаточно хорошую точность. Найдено импульсное распределение электронов в случае циркулярно поляризованного поля для произвольных значений γ (см. ниже формулу (33)).

В настоящее время задача о детальном описании импульсного и энергетического спектров фотоэлектронов при многофотонной ионизации атомов и молекул представляется актуальной по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, в течение последнего десятилетия был выполнен ряд экспериментов, в которых с высокой степенью разрешения измерялись распределения фотоэлектронов, в том числе и в эллиптически поляризованном поле [7–10]. Значительная часть экспериментальных результатов относится к переходной области параметра адиабатичности ($\gamma \sim 1$), слабо исследованной аналитическими методами. В данной работе получены простые аналитические выражения, пригодные для описания энергетических спектров фотоионизации в эллиптически поляризованном поле при различных значениях γ . Во-вторых, расчеты структуры спектра прямой фо-

тоионизации необходимы при исследовании процессов, связанных с взаимодействием в конечном состоянии ионизованного электрона с родительским атомом (ионом), в том числе генерации высоких гармоник лазерного излучения [11, 12], многоэлектронной некаскадной ионизации [13, 14] и перерасеяния фотоэлектронов [15].

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Скорость ионизации атомного уровня в лазерном поле и импульсный спектр вылетающих электронов определяются вероятностью туннелирования через переменный во времени барьер, для расчета которой удобно использовать метод мнимого времени [4, 16]. При этом в рассмотрение вводятся подбарьерные траектории, формально удовлетворяющие классическим уравнениям движения, но с мнимым временем (что отражает тот факт, что такие траектории не реализуются в классической механике). Экспоненциальный множитель в вероятности туннелирования определяется так называемой «экстремальной» подбарьерной траекторией (которая минимизирует мнимую часть функции действия и определяет наиболее вероятный путь туннелирования частицы), а для нахождения импульсного спектра и предэкспоненты нужно рассмотреть пучок траекторий, близких к экстремальной. За подробностями и необходимыми уточнениями мы отсылаем к работам [4, 16–18].

В случае ионизации s -уровня, связанного короткодействующим потенциалом (энергия связи $I = \kappa^2/2$, радиус действия сил $r_0 \ll 1/\kappa$), под действием электрического поля волны (1) импульсный спектр фотоэлектронов имеет вид

$$dw(\mathbf{p}) = |F(\mathbf{p})|^2 d^3p, \quad (3)$$

$$|F(\mathbf{p})|^2 = A \exp \left[-\frac{1}{\omega} (c_x p_x^2 + c_z p_z^2) \right] \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[-\frac{c_y}{\omega} (p_y - p_{max})^2 \right] + \exp \left[-\frac{c_y}{\omega} (p_y + p_{max})^2 \right] \right\}.$$

Величины A , c_i и p_{max} определяются формулами (23)–(28) работы [4], причем они выражаются через переменную $s = s(\gamma, \xi)$, удовлетворяющую трансцендентному уравнению (20) из [4]. Формулы этой работы значительно упрощаются, если перейти от s к новой переменной τ_0 :

¹⁾ Содержащиеся в [5] (например, на стр. 1201 и 1206) утверждения, что формулы работы [4] применимы лишь в весьма ограниченной области значений ξ , основаны на недоразумении и неверны по существу. См. ниже рис. 4 и обсуждение уравнений (27) и (31), а также разд. 5 в статье [6].

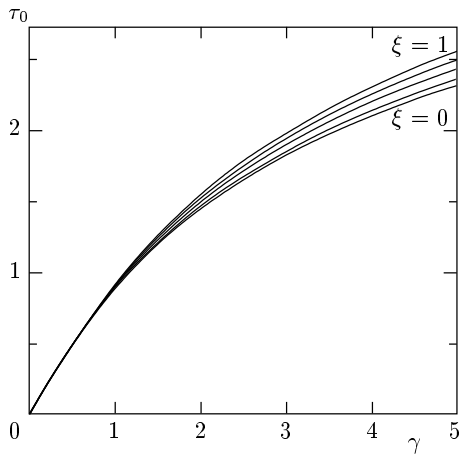


Рис. 1. Безразмерное «время» $\tau_0(\gamma, \xi)$ подбарьерного движения, найденное численно из уравнения (5). Кривые отвечают (снизу вверх) значениям эллиптичности $\xi = 0, 0.5, 0.75, 0.9$ и 1.0

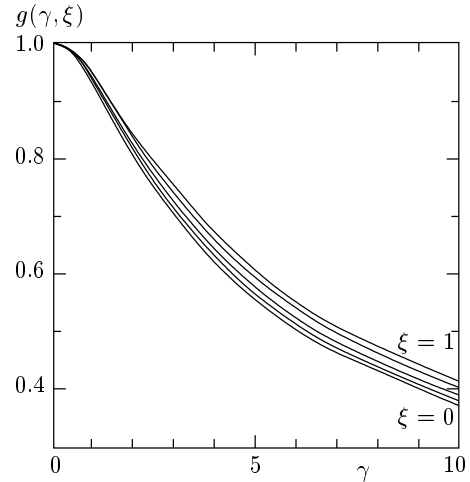


Рис. 2. Функция $g(\gamma, \xi)$, определяющая экспоненциальный множитель в выражении (6) для вероятности ионизации. Кривые соответствуют (снизу вверх) $\xi = 0, 0.5, 0.75, 0.9$ и 1.0

$$\tau_0 = \text{Arth} \sqrt{\frac{s^2 + \gamma^2}{1 + \gamma^2}},$$

$$s = \frac{\sqrt{\text{sh}^2 \tau_0 - \gamma^2}}{\text{ch} \tau_0} = |\xi| \left(1 - \frac{\text{th} \tau_0}{\tau_0} \right), \quad (4)$$

которая определяется из уравнения

$$\text{sh}^2 \tau_0 \left[1 - \xi^2 \left(\text{cth} \tau_0 - \frac{1}{\tau_0} \right)^2 \right] = \gamma^2 \quad (5)$$

и имеет прозрачный физический смысл: $\tau_0 = -i\omega t_0$, где t_0 — «начальный момент» (чисто мнимый), или полное «время» подбарьерного движения электрона (рис. 1). Все величины, входящие в формулы для вероятности ионизации, легко выражаются через τ_0 :

$$A = C_\kappa^2 \frac{\omega^2}{2\pi^2 F} P(\gamma, \xi) \exp \left\{ -\frac{2}{3\epsilon} g(\gamma, \xi) \right\}, \quad (6)$$

$$g(\gamma, \xi) = \frac{3}{2\gamma} \times$$

$$\times \left[\left(1 + \frac{1 + \xi^2}{2\gamma^2} \right) \tau_0 - (1 - \xi^2) \frac{\text{sh} 2\tau_0}{4\gamma^2} - \xi^2 \frac{\text{sh}^2 \tau_0}{\gamma^2 \tau_0} \right], \quad (7)$$

$$c_x = \tau_0 - \sigma \text{th} \tau_0, \quad c_y = \tau_0 + \sigma \xi^2 \frac{(\tau_0 - \text{th} \tau_0)^2}{\tau_0^2 \text{th} \tau_0}, \quad (7')$$

$$c_z = \tau_0, \quad P(\gamma, \xi) = \frac{2\sigma\gamma}{\text{sh} 2\tau_0}$$

(рис. 2 и 3), и мы обозначили

$$\sigma = \left(1 - \xi^2 + \xi^2 \frac{\text{th} \tau_0}{\tau_0} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{cases} 1 + (1 - \text{th} \tau_0 / \tau_0) \xi^2 + \dots, & \xi = 0, \\ \tau_0 / \text{th} \tau_0, & \xi = 1. \end{cases}$$

Заметим, что $c_y \geq c_z > c_x$ (равенство $c_y = c_z$ имеет место только при $\xi = 0$, т. е. в случае линейной поляризации излучения, рис. 3а). При этом коэффициенты c_y и c_z численно близки друг к другу за исключением случая $|\xi| \approx 1$ (т. е. эллиптичностей, близких к циркулярной).

В уравнении (6) C_κ — асимптотический (на расстояниях $r \gg 1/\kappa$ от ядра) коэффициент атомной волновой функции²⁾. Так, $C_\kappa^2 = 1$ в случае основного ($1s$) и $2s$ -состояний атома водорода, значения C_κ для других атомов и ионов приведены в [17], а для уровня в δ -потенциале имеем $C_\kappa^2 = 1/2$.

Следует отметить, что наша нормировка коэф-

²⁾ Эти коэффициенты постоянно встречаются в квантовой механике и атомной физике и могут быть рассчитаны по методу Хартри-Фока — см., например, [19]. Кроме того, для них имеются простые аналитические приближения, полученные Хартри [20], а также с помощью метода квантового дефекта [21–23] и из разложения эффективного радиуса [24]. Для нейтральных атомов и однозарядных положительных ионов эти приближения имеют достаточно высокую точность (в этой связи см. табл. 2 в [6]). Как видно из табл. 1 в [17], численные значения C_κ для s -состояний довольно близки к единице.

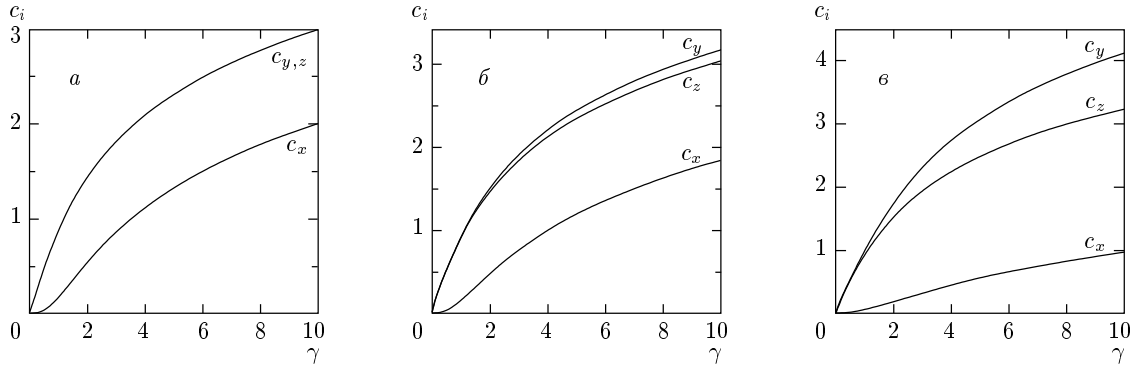


Рис. 3. Зависимость коэффициентов $c_i(\gamma, \xi)$ импульсного распределения (3) от параметра Келдыша γ при $\xi = 0$ (а), 0.5 (б) и 0.9 (е)

фициентов C_k соответствует работам [17, 24] и отличается от принятой в [2–5].

Как видно из рис. 2, с ростом эллиптичности света значение $g(\gamma, \xi)$ монотонно возрастает, а вероятность ионизации уменьшается³⁾. Еще более существенным является уменьшение $g(\gamma, \xi)$ при переходе из адиабатической области $\gamma \ll 1$ в многофотонную область $\gamma \gg 1$, что приводит к резкому (поскольку $2/3\epsilon \gg 1$) возрастанию вероятности ионизации.

Таким образом, спектр (3) представляет собой сумму двух анизотропных гауссовских распределений с центрами в точках $\pm p_{max}$ на оси y (малая ось эллипса $\mathbf{F}(t)$). При этом наиболее вероятный импульс вылетающего электрона равен (см. Приложение А)

$$p_{max} = |\xi|p_F, \quad p_F = \frac{F}{\omega} \frac{\text{sh } \tau_0}{\tau_0} = \kappa \frac{\text{sh } \tau_0}{\gamma \tau_0}. \quad (8)$$

Результаты расчета энергетического спектра фотоэлектронов с помощью приведенных выше формул будут описаны ниже, но сначала рассмотрим два предельных случая, когда можно получить явные аналитические выражения.

а) $\gamma \ll 1$ (низкочастотное лазерное излучение). Здесь

$$\tau_0 = \gamma - \frac{1}{9}(1+k)\gamma^3 + \frac{13}{405} \left(1 + 2k + \frac{35}{26}k^2\right) \gamma^5 + \dots, \quad (9)$$

$$g(\gamma, \xi) = 1 - \frac{1}{15}(1+k)\gamma^2 + O(\gamma^4),$$

³⁾ При фиксированной амплитуде поля F . Интенсивность излучения $J = (1 + \xi^2)cF^2/8\pi$ при этом также меняется, но не более чем в два раза.

$$P = 1 - \frac{1}{9}(2 + 5k)\gamma^2 + \dots, \quad (10)$$

$$c_x = \frac{2}{3}k\gamma^3 + \dots, \quad c_y = \gamma - \frac{1}{3}k\gamma^3 + \dots,$$

$$c_z = \gamma - \frac{1}{9}(1+k)\gamma^3 + \dots,$$

$$p_F = \frac{F}{\omega} \left\{ 1 + \frac{1}{6}\gamma^2 + \left[\frac{1}{120} - \frac{1}{27}(1+k) \right] \gamma^4 + \dots \right\}, \quad (11)$$

где⁴⁾ обозначено: $k = (1 - \xi^2)/2$. Выполняя интегрирование по d^3p (подробности см. в Приложении В), для вероятности n -фотонной ионизации получаем

$$w_n = w_{n_0} a(\gamma(n - n_0)) \times \exp \left\{ -\frac{2}{3}(1 - \xi^2)\gamma^3(n - n_0) \right\}, \quad (12)$$

$$w_{n_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \kappa^2 C_k^2 \epsilon^{3/2} \gamma^2 \times \exp \left\{ -\frac{2}{3\epsilon} \left[1 - \frac{1}{10} \left(1 - \frac{\xi^2}{3} \right) \gamma^2 \right] \right\},$$

где

$$n > n_0 = \frac{F^2}{4\omega^3} [1 + 3\xi^2 + O(\gamma^2)]$$

и введена функция

$$a(x) = e^{-x} I_0(x) = \begin{cases} 1 - x + \frac{3}{4}x^2 + \dots, & x \rightarrow 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + \frac{1}{8x} + \dots \right], & x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (13)$$

⁴⁾ Отметим, что при $\gamma \lesssim 10$ импульс p_{max} практически пропорционален эллиптичности света ξ (см. рис. 2 в [4]).

а $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя.
Если же $n < n_0$, то

$$w_n \propto \exp \left\{ -\xi^2 \frac{F\kappa}{\omega^2} \left(1 - \sqrt{\frac{n-\nu}{n_0-\nu}} \right)^2 \right\}, \quad (14)$$

$$\nu = \frac{F^2}{4\omega^3} (1 + \xi^2),$$

ν — порог фотоионизации. Обозначим $\xi_1 = \omega/\sqrt{F\kappa} = \gamma\sqrt{\epsilon}$ ($\xi_1 \ll 1$). Если эллиптичность $\xi \gg \xi_1$, то распределение (14) «прижато» к $n = n_0$ и вносит пренебрежимо малый вклад (порядка $\sqrt{\epsilon}$) в полную вероятность (или в скорость ионизации уровня) W . Интегрируя (12) по n от $n = n_0$ до бесконечности, получаем

$$W = \sqrt{\frac{3\epsilon}{\pi(1-\xi^2)}} \kappa^2 C_{\kappa\epsilon}^2 \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{2}{3\epsilon} \left[1 - \frac{1}{10} \left(1 - \frac{\xi^2}{3} \right) \gamma^2 \right] \right\}, \quad (15)$$

что полностью согласуется с адиабатическим приближением с учетом поправки, пропорциональной γ^2 в экспоненте [3, 4]. Основной вклад в (15) дает область $n - n_0 \gtrsim \gamma^{-1} \gg 1$, в которой

$$w_n \approx \text{const} \cdot \frac{1}{\sqrt{n - n_0}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{2}{3} (1 - \xi^2) \gamma^3 (n - n_0) \right\}. \quad (12')$$

б) В противоположном случае $\gamma \gg 1$ уравнение (5) принимает вид

$$\sqrt{[1 - \xi^2(1 - \tau_0^{-1})^2]} e^{\tau_0} = 2\gamma, \quad (5')$$

откуда

$$\tau_0(\gamma, \xi) =$$

$$= \begin{cases} \ln(2\gamma/\sqrt{1-\xi^2}), & 1 - \xi^2 \gg 1/\ln(2\gamma), \\ \ln(\gamma\sqrt{2\ln\gamma}), & \xi = \pm 1. \end{cases} \quad (16)$$

Мы ограничимся логарифмическим приближением, считая $\tau_0 \gg 1$; тогда $\sigma = \tau_0\delta$,

$$g(\gamma, \xi) = \frac{3}{2\gamma} \left[\tau_0 - \frac{1}{2} - \frac{\xi^2\delta}{2\tau_0(1 + \xi^2\delta)} \right], \quad (17)$$

$$c_x = \tau_0(1 - \delta), \quad c_y = \tau_0(1 + \xi^2\delta),$$

$$c_z = \tau_0, \quad P = \gamma^{-1}(1 + \xi^2\delta),$$

где $\delta = 1/[(1 - \xi^2)\tau_0 + \xi^2] \leq 1$. В частности, при $\xi \rightarrow 0$

$$c_x = \tau_0 - 1 - \left(1 - \frac{1}{\tau_0} \right) \xi^2 + O(\xi^4), \quad c_y = \tau_0 + \frac{\xi^2}{\tau_0} + \dots,$$

$$\tau_0 = \ln(2\gamma) + \frac{1}{2} \xi^2 + \dots,$$

а при $\xi \rightarrow \pm 1$

$$c_x = 2\tau_0^2 k + O(k^2), \quad c_y = 2\tau_0 - 2\tau_0^2 k + \dots,$$

где k имеет то же значение, что и в (9)–(11). После несложных вычислений (см. (B.7)) для вероятностей n -фотонной ионизации получаем распределение Гаусса:

$$w_n = w_{max} \exp \left\{ -\frac{(n - n_0)^2}{2(\Delta n)^2} \right\}, \quad \Delta n = \mu\sqrt{n_0}, \quad (18)$$

где $w_{max} = w_{n_0}$,

$$\mu = \frac{\sqrt{\xi^2[(1 - \xi^2)\tau_0 + \xi^2]}}{(1 - \xi^2)\tau_0^2 + 2\xi^2\tau_0},$$

$$n_0 = K_0 \left(1 + \frac{\xi^2}{(1 - \xi^2)\tau_0^2 + 2\xi^2\tau_0} \right)$$

(см. также [25]). Замечая, что $K_0 = I/\omega \gg 1$,

$$\mu =$$

$$= \begin{cases} \tau_0^{-3/2} \{ \xi^2 / [1 - (1 - 3\tau_0^{-1})\xi^2] \}^{1/2}, & 1 - \xi^2 \gg 1/\tau_0, \\ \frac{1}{2\tau_0} \left[1 - \frac{1}{8}\tau_0^2(1 - \xi^2)^2 \right], & \xi \rightarrow 1 \end{cases}$$

и $\tau_0 \gtrsim \ln(2\gamma) \gg 1$, видим, что распределение (18) всегда значительно уже, чем распределение Пуассона с $\langle n \rangle = n_0$ (для которого, очевидно, $\mu = 1$).

В отличие от (18) распределение (12), (14) асимметрично относительно значения $n = n_0$, соответствующего наибольшей вероятности ионизации. С учетом формулы (21) (см. текст ниже) из (12) получаем ($\gamma \ll 1$)

$$n_0 \sim K_0\gamma^{-2} \gg 1,$$

$$\frac{\langle n \rangle - n_0}{n_0} \sim \frac{\Delta n}{\langle n \rangle} \sim \frac{\epsilon}{1 - \xi^2}, \quad (19)$$

где $\langle n \rangle$ и Δn — среднее число поглощенных фотонов и его дисперсия. Данная оценка справедлива при $1 - \xi^2 \gg \epsilon$, а в случае циркулярной поляризации [6]

$$\frac{\Delta n}{\langle n \rangle} \sim \begin{cases} \omega/\sqrt{F\kappa} = \gamma\sqrt{\epsilon}, & \gamma \ll 1, \\ (\sqrt{K_0} \ln \gamma)^{-1}, & \gamma \gg 1. \end{cases}$$

Наконец, из (18) следует, что при $\gamma \gg 1$

$$\langle n \rangle \approx n_0, \quad \frac{\Delta n}{\langle n \rangle} \sim \mu \sqrt{\frac{\omega}{I}} \sim \frac{1}{\sqrt{K_0}} \times \begin{cases} \tau_0^{-3/2} \sqrt{\xi^2/(1-\xi^2)}, & \xi < 1, \\ \tau_0^{-1}, & \xi \rightarrow 1. \end{cases} \quad (20)$$

Таким образом, распределение по n всегда является относительно узким (в единицах среднего $\langle n \rangle$).

В общем случае (любые γ и ξ) порог фотоионизации ν и наиболее вероятное число поглощенных фотонов n_0 равны [4]

$$\nu = \frac{F^2}{4\omega^3} (1 + \xi^2 + 2\gamma^2), \quad (21)$$

$$n_0 = \nu \left[1 + \frac{2\xi^2}{1 + \xi^2 + 2\gamma^2} \left(\frac{\text{sh } \tau_0}{\tau_0} \right)^2 \right],$$

где $\tau_0(\gamma, \xi)$ определяется из уравнения (5). Отсюда

$$\frac{n_0 - \nu}{\nu} \approx \begin{cases} 2\xi^2/(1 + \xi^2), & \gamma \rightarrow 0, \\ \xi^2/[(1 - \xi^2)\tau_0^2 + 2\xi^2\tau_0], & \gamma \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (22)$$

Поэтому $n_0 - \nu \gg 1$, если $\gamma \ll \exp[\sqrt{K_0\xi^2/(1-\xi^2)}]$, что выполняется практически всегда за исключением случая линейной поляризации $\xi = 0$ (когда $n_0 - \nu \sim 1$, если $\gamma \gg 1$ [1]). Таким образом, при $\xi \neq 0$ распределение w_n охватывает много значений n , даже если $\gamma \gg 1$, что позволяет при вычислении скорости ионизации W заменить суммирование по n интегрированием.

Итак, для энергетического распределения фотоэлектронов мы получили асимптотические формулы (12), (14) и (18), применимые соответственно при малых и больших γ . В случае произвольных γ это распределение можно представить в виде однократного интеграла, см. (В.3) и (В.4) в Приложении В.

3. ИМПУЛЬСНЫЙ СПЕКТР В ТУННЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

Как уже отмечалось выше, распределение (3) неприменимо в узком интервале эллиптичностей $1 - \xi^2 \leq \epsilon \ll 1$. В том случае, когда реализуется туннельный режим ионизации ($\gamma \ll 1$), были получены [5] аналитические выражения для импульсных

распределений, применимые и в этом узком интервале и обеспечивающие непосредственный предельный переход к случаю циркулярной поляризации.

Следуя работе [5], будем рассматривать ионизацию как квантовый переход из связанного состояния Ψ_0 с потенциалом ионизации I в состояние континуума с асимптотическим импульсом \mathbf{p} , которое аппроксимируется нерелятивистской волковской волновой функцией

$$\Psi_{\mathbf{p}} = \exp \left\{ i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - i \int_{-\infty}^t E_{\mathbf{p}}(t') dt' \right\}, \quad (23)$$

где $E_{\mathbf{p}}(t) = [\mathbf{p} + \mathbf{A}(t)/c]^2/2$ — зависящая от времени кинетическая энергия электрона в лазерном поле с векторным потенциалом

$$\mathbf{A}(t) = -c \int^t \mathbf{F}(t') dt',$$

поле $\mathbf{F}(t)$ определяется выражением (1). Импульсный спектр описывается формулой (3), где теперь

$$F(\mathbf{p}) = i \frac{\sqrt{\omega}}{(2\pi)^2} \Psi_0(\mathbf{p}) \left(I + \frac{p^2}{2} \right) \times \int_0^{2\pi/\omega} dt \exp \left\{ iIt + i \int_{-\infty}^t E_{\mathbf{p}}(t') dt' \right\}. \quad (24)$$

В условиях $K_0 \gg 1$, $F^2/\omega^3 \gg 1$ интеграл по времени в амплитуде (24) вычисляется методом перевала. В туннельном пределе уравнение для перевальной точки $t_s(\mathbf{p}) = t_0(\mathbf{p}) + it_1(\mathbf{p})$ упрощается, что позволяет записать скорость ионизации в виде

$$dW(\mathbf{p}) = \frac{\omega}{4\pi^2 F} \times \sum_{\alpha} \exp \left\{ -\frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{[I + E_{\mathbf{p}}(t_{0\alpha})]^{3/2}}{F(t_{0\alpha})} \right\} d^3 p, \quad (25)$$

где сумма вычисляется по всем перевальным точкам — решениям уравнения (14) из работы [5] (в случае линейной поляризации таких решений два, а с приближением ξ к единице остается одно решение). При выполнении условий (2') величина $dW(\mathbf{p})$ определяется экспонентой и основной вклад в (25) дает область импульсного пространства с наименьшим значением $[I + E_{\mathbf{p}}(t_0)]^{3/2}/F(t_0)$. Предэкспоненциальный множитель в (25) соответствует случаю ионизации из основного состояния в потенциале нулевого радиуса действия (δ -потенциал).

Выражение (25) описывает в неявном виде импульсный спектр фотоэлектронов и применимо при

любых значениях ξ . Для получения явных выражений следует учесть, что при заданном направлении импульса электрона распределение (25) достигает максимума при условии

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}_F(t_0) = -\frac{1}{c}\mathbf{A}(t_0). \quad (26)$$

С изменением параметра t_0 в пределах оптического периода вектор $\mathbf{P}_F(t_0)$ описывает в импульсном пространстве эллипс, который мы будем называть полевым⁵⁾ и на котором распределение (25) достигает локального максимума. В силу условия $1/\epsilon \gg 1$ вероятность ионизации быстро убывает с отклонением от полевого эллипса; характерное значение такого отклонения есть $\Delta p \sim \sqrt{\epsilon} p_F \ll p_F$. Поэтому в (25) можно перейти к явной зависимости от импульса [5]:

$$dW = A \exp \left[-\frac{\gamma^2}{6I\epsilon} (1 - \xi^2) p_x^2 \right] \times \\ \times \left\{ \exp \left[-\frac{E(\mathbf{p}, \xi)}{\epsilon I} \right] + \exp \left[-\frac{E(\mathbf{p}, -\xi)}{\epsilon I} \right] \right\} d^3 p, \quad (27)$$

где A получается из (6) при $\gamma \ll 1$ и введены обозначения:

$$E(\mathbf{p}, \xi) = \frac{1}{2} \lambda \left(\sqrt{p_y^2 + \xi^2 p_x^2} - \xi p_F \right)^2 + \frac{1}{2} p_z^2, \\ \lambda = \frac{\xi^4 p_x^2 + p_y^2}{\xi^2 p_x^2 + p_y^2}. \quad (28)$$

При получении (27) из (25) эллиптичность ξ считалась произвольной. Используя (28), нетрудно убедиться, что распределение (27) обеспечивает предельный переход к известным случаям линейной и циркулярной поляризации [2, 3].

Рассмотрим соотношение между формулами (3) и (27), описывающими один и тот же импульсный спектр. За исключением узкой области «больших» эллиптичностей ($1 - \xi^2 \leq \epsilon$) величина $\xi^2 p_x^2$ в (28) мала по сравнению с p_y^2 либо в силу малости ξ (при $\xi < \sqrt{\epsilon}$), либо из-за резкой вытянутости распределения вдоль малой оси y эллипса поляризации (1) при $1 - \epsilon > \xi > \sqrt{\epsilon}$ [4–6]. С учетом этого обстоятельства выражение (27) упрощается и полностью совпадает⁶⁾ с (3) в случае, когда последняя формула записана для s -уровня в короткодействующем потенциале. Однако, в отличие от (3), формула (27) применима и при $\xi \rightarrow 1$ и описывает изотропизацию распределения по азимутальному углу φ , происходящую при переходе к циркулярному полю.

⁵⁾ Он лежит в плоскости поляризации и отличается от (1) множителем $1/\omega$ и сдвигом по фазе на $\pi/2$.

⁶⁾ Если в (3) перейти к пределу $\gamma \ll 1$.

На рис. 4 показано импульсное распределение фотоэлектронов $|F(p_x, p_y, p_z = 0)|^2$, рассчитанное из (3) и (27) для различных значений степени поляризации. В поле, близком к линейно поляризованному ($\xi \lesssim \gamma\sqrt{\epsilon}$), распределение представляет собой пик с максимумом при $\mathbf{p} = 0$, вытянутый вдоль большой оси эллипса поляризации. В интервале $\gamma\sqrt{\epsilon} < \xi < \sqrt{\epsilon}$ (рис. 4а) происходит формирование двухпиковой структуры, которая становится отчетливо различимой при $\xi > \sqrt{\epsilon}$ и сохраняется вплоть до значений $|\xi| \approx 1 - \epsilon$ (рис. 4б–г). В этом интервале эллиптичностью положение максимумов в импульсном распределении определяется формулой (8) (о ширинах максимумов см. [5, 6]). С приближением поляризации поля к циркулярной распределение изотропизуется в азимутальной плоскости, что хорошо заметно на рис. 4д, е. Здесь для описания распределения следует использовать формулу (27).

Таким образом, в туннельном ($\gamma \ll 1$) пределе совокупность выражений (3) и (27) обеспечивает адекватное описание импульсного спектра фотоэлектронов во всем диапазоне изменения эллиптичности поля $-1 \leq \xi \leq 1$.

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

Эволюция энергетического спектра фотоэлектронов в эллиптически поляризованном поле рассматривалась ранее только в туннельном пределе [5]. Полученные в разд. 2 выражения описывают энергетические спектры в области малых и больших значений параметра адиабатичности γ (см. соответственно формулы (12), (14) и (18)). Для выяснения точности этих асимптотических формул, а также для построения целостной картины эволюции энергетического спектра при переходе от туннельного режима ионизации к многофотонному, мы приведем результаты численных расчетов спектра, основанных на непосредственном интегрировании импульсного распределения.

На рис. 5 показаны спектры фотоэлектронов, рассчитанные по формуле (В.3), причем интегрирование по переменной u в (В.4) выполнялось численно. Так как характерное число надпороговых пиков в существенной области спектра велико, на графиках представлена только их огибающая. Вероятность ионизации показана как функция безразмерной энергии $x = E/E_0$, где $E = p^2/2 = \hbar\omega(n - \nu)$ — конечная энергия электрона, а величина $E_0 = F^2/\omega^2$ с точностью до множителя $(1 + \xi^2)/4$ равна средней колебательной энергии электрона в поле (1).

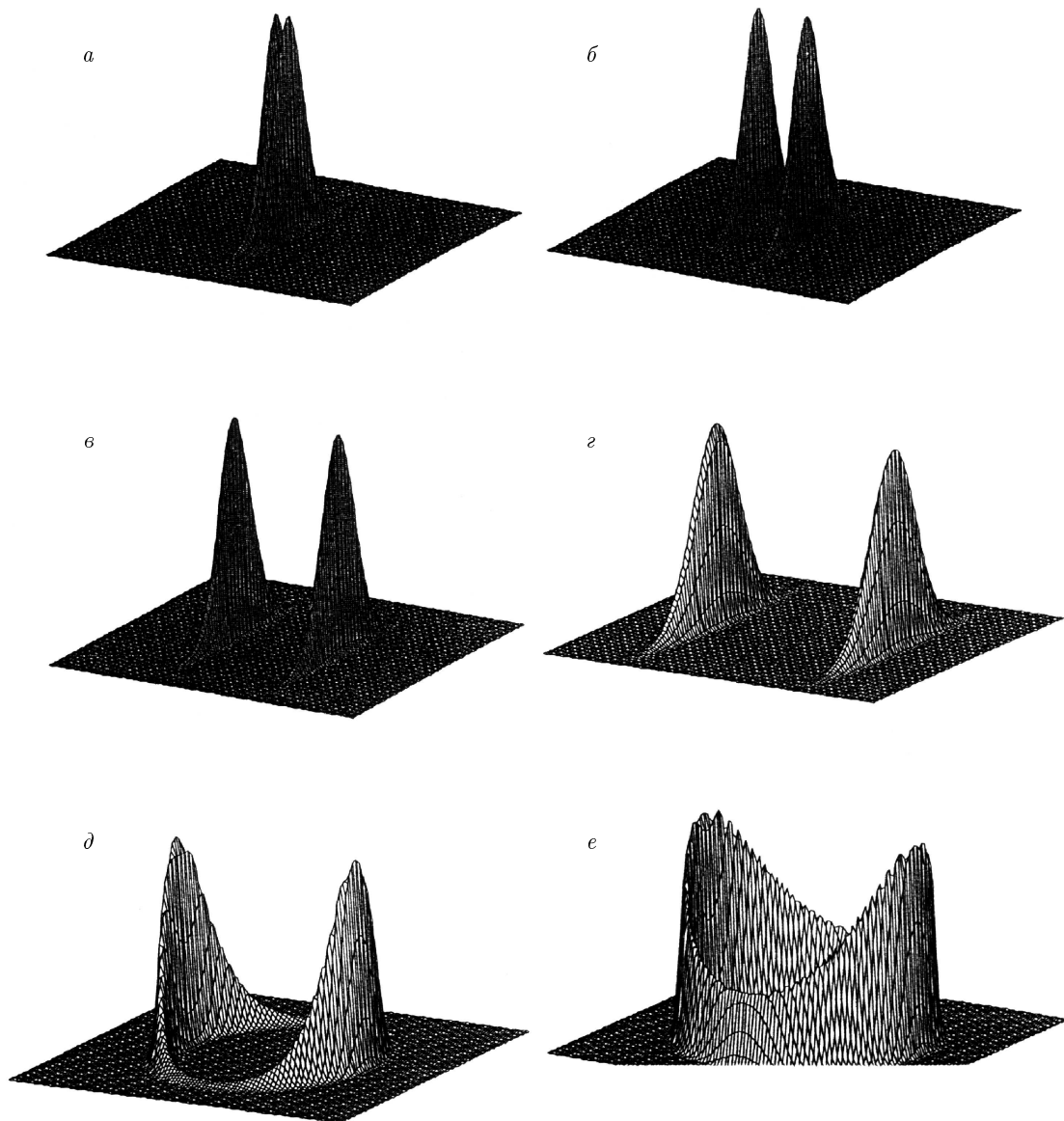


Рис. 4. Импульсное распределение фотоэлектронов, рассчитанное из (3) (графики *a-e*) и (27) (графики *д, е*) для случая ионизации ионов Ne^{3+} ($I \approx 97$ эВ) полем титан-сапфирового лазера ($\hbar\omega = 1.58$ эВ) интенсивностью $2 \cdot 10^{16}$ Вт/см² [26]; при этом $\epsilon = 0.04$, $\gamma = 0.2$. Горизонтальная плоскость совпадает с плоскостью $p_z = 0$ в импульсном пространстве. Вероятность ионизации отложена по вертикальной оси в произвольных единицах. Серия графиков демонстрирует эволюцию распределения при изменении эллиптичности $\xi = 0.05$ (*a*), 0.25 (*б*), 0.50 (*в*), 0.8 (*г, д*), 0.95 (*е*)

Приведенная серия графиков демонстрирует следующие закономерности, установленные в разд. 2 на основе анализа асимптотик (12), (14) и (18).

1) При всех значениях γ положение максимума с хорошей точностью определяется условием

$$E_{max} = \frac{1}{2}\xi^2 p_F^2, \tag{29}$$

непосредственно вытекающим из (8).

2) При всех значениях ξ форма спектра изменяется от асимметричного узкого пика при $\gamma \ll 1$ к относительно широкому и симметричному (гауссову) при $\gamma \gg 1$.

На рис. 5б ($\xi = 0.5$) показаны также (штриховыми линиями) спектры, рассчитанные из приближен-

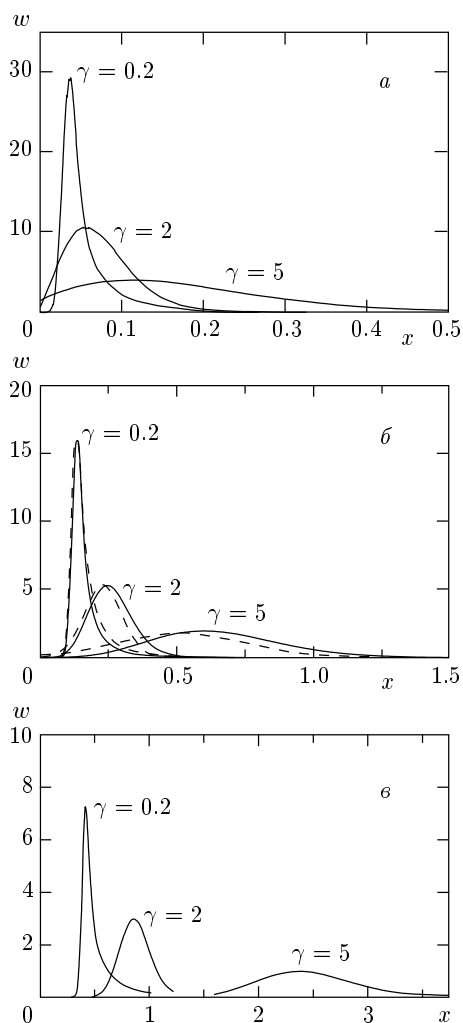


Рис. 5. Энергетический спектр фотоэлектронов, полученный численным интегрированием распределения (3) в случае ионизации Ne^{3+} полем титан-сапфирового лазера интенсивностью $3.2 \cdot 10^{13}$ Вт/см² ($\gamma = 5.0$), $2 \cdot 10^{14}$ Вт/см² ($\gamma = 2.0$) и $2 \cdot 10^{16}$ Вт/см² ($\gamma = 0.2$). Серия графиков демонстрирует эволюцию распределения $w(x) = dW/dx$ ($x = E/E_0$ — безразмерная энергия электрона) при изменении эллиптичности: $\xi = 0.25$ (а), 0.5 (б), 0.9 (в). Штриховые линии на рис. 5б соответствуют результатам расчетов по асимптотическим формулам (12), (14) для $\gamma = 0.2$ и (18) для $\gamma = 2.0$ и $\gamma = 5.0$

ных аналитических формул (12), (14) и (18). Сравнение кривых с результатами численного расчета показывает, что эти асимптотики описывают спектр с высокой степенью точности при всех, в том числе и промежуточных ($\gamma \sim 1$), значениях параметра адиабатичности. В частности, видно, что уже при $\gamma = 2$

форма спектра мало отличается от гауссовой (см. (18)). Совпадение аналитических приближений с результатами численных расчетов имеет место и при других значениях эллиптичности ξ .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в данной работе результаты относятся к ионизации систем, связанных короткодействующими силами. Как показано в [3, 18], в низкочастотном пределе влияние дальнедействующего кулоновского потенциала атомного ядра на вероятность ионизации может быть учтено методами квазиклассической теории возмущений и приводит к возникновению большого по величине предэкспоненциального множителя в выражении для скорости ионизации (подробности см., например, в [17]). Поскольку форма спектров и их зависимость от эллиптичности ξ и параметра Келдыша γ определяются в основном экспоненциальными факторами, полученные нами результаты могут применяться и для описания ионизации реальных атомов.

Наконец, отметим следующее обстоятельство. Хотя распределение (3) перестает быть применимым в области $1 - \xi^2 \leq \epsilon \ll 1$, близкой к $\xi = \pm 1$, его нетрудно переписать в таком виде, который допускает предельный переход к циркулярной поляризации. Действительно, выражение (3) может быть записано в разных формах, асимптотически эквивалентных друг другу в пределе $\epsilon = F/\kappa^3 \rightarrow 0$. При $\xi = \pm 1$ возникает нулевая мода, связанная с симметрией вылета фотоэлектронов в плоскости поляризации света. В этом случае естественно перейти

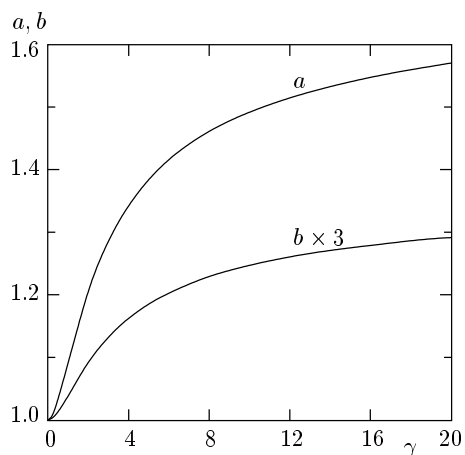


Рис. 6. Значения a и b , см. (B.5), (B.6), в зависимости от γ

от декартовых компонент импульса к цилиндрическим: $p_{\perp} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$, p_z и $\varphi = \arctg(p_x/p_y)$. Считая $\gamma \ll 1$ и $\xi^2(1 - \xi^2) \gg \epsilon$, имеем

$$p_{max} = |\xi| \frac{F}{\omega}, \quad \Delta p_x \sim \sqrt{\frac{\epsilon}{(1 - \xi^2)}} \frac{F}{\omega},$$

$$\Delta p_{y,z} \sim \sqrt{\frac{F}{\kappa}} \sim \gamma \sqrt{\epsilon} \frac{F}{\omega}. \quad (30)$$

Таким образом, $p_{max} \gg \Delta p_x \gg \Delta p_y = \Delta p_z$, и импульсное распределение (3) принимает вид

$$dW(\mathbf{p}) \propto \exp \left\{ -\frac{\kappa}{F} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\left(p_{\perp} - |\xi| \frac{F}{\omega} \right)^2 + p_z^2 \right] - \frac{(1 - \xi^2)}{3\epsilon} \sin^2 \varphi \right\}. \quad (31)$$

При $1 - \xi^2 \leq \epsilon$ оно начинает расплываться по азимутальному углу φ (что хорошо видно на рис. 4*d*, *e*) и при $\xi = \pm 1$ непосредственно переходит в известное распределение для циркулярной поляризации [26, 27]. Можно показать [5], что формула (31) вытекает также и из (27).

Что касается полной вероятности (или скорости ионизации) $W = \sum_n w_n$, то полученные для неё в [2, 3] формулы (справедливые для любых значений γ) в туннельном пределе $\gamma \ll 1$ совпадают с выражениями, приведенными в работе [5], если в последних исправить неточности, на которые указано в разд. 5 статьи [6].

Таким образом, «противоречие» между результатами работ [4] и [5], о котором говорится в [5], полностью снимается (отметим, что расчеты в [4, 5] выполнены в различных калибровках электромагнитного поля).

Авторы признательны С. П. Гореславскому за многочисленные плодотворные обсуждения, С. Г. Позднякову за помощь в численных расчетах, а также Н. С. Ливовой и М. Н. Маркиной за помощь при оформлении рукописи.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 98-02-17007, 00-02-16354 и 00-02-17078). Один из авторов (С. В. Попруженко) благодарен также Международной ассоциации содействия сотрудничеству с учеными из Новых независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS, проект 99-450) за финансовую поддержку.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Приведем здесь простой вывод формулы (8), основанный на методе мнимого времени. Экстремальная подбарьерная траектория электрона в поле (1) имеет вид

$$x(t) = \frac{F}{\omega^2} (\text{ch } \tau_0 - \text{ch } \tau),$$

$$y(t) = -i\xi \frac{F}{\omega^2} \left(\text{sh } \tau - \frac{\text{sh } \tau_0}{\tau_0} \tau \right), \quad z = 0, \quad (A.1)$$

где $\tau = -i\omega t$ меняется от $\tau_0 = \tau_0(\gamma, \xi)$ (начальный момент подбарьерного движения) до $\tau = 0$ в момент выхода электрона из-под барьера. Отсюда

$$p_x(0) = p_z(0) = 0,$$

$$p_y(0) = -i\omega \frac{dy}{d\tau} = \frac{\xi F}{\omega} \left(\frac{\text{sh } \tau_0}{\tau_0} - 1 \right). \quad (A.2)$$

После выхода из-под барьера электрон движется по классической траектории, поэтому

$$p_x(t) = p_x(0) + F \int_0^t \cos \omega t' dt',$$

$$p_y(t) = p_y(0) + \xi F \int_0^t \sin \omega t' dt'. \quad (A.3)$$

Эти интегралы получают однозначный смысл, если учесть выключение внешнего поля при $t \rightarrow +\infty$:

$$J_1 = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos \omega t dt = \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \rightarrow 0,$$

$$J_2 = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \sin \omega t dt = \frac{\omega}{\omega^2 + \alpha^2} \rightarrow \frac{1}{\omega}. \quad (A.4)$$

Результаты интегрирования в (A.3) не зависят от конкретной формы выключения внешнего поля, требуется только, чтобы это выключение было достаточно медленным ($\alpha \ll \omega$), что можно проиллюстрировать на следующем примере. Заменяя в (A.4) обрезающий множитель $\exp(-\alpha t)$ на гауссиан $\exp[-(\alpha t)^2]$, будем иметь

$$J_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right) \rightarrow 0,$$

$$J_2 = \frac{1}{\alpha} w \left(\frac{\omega}{2\alpha}\right) \rightarrow \frac{1}{\omega}. \quad (A.4')$$

Здесь

$$w(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{y^2} dy = x {}_1F_1 \left(1, \frac{3}{2}; -x^2 \right) = \begin{cases} x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{15}x^3 - \dots, & x \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} + O(x^{-5}), & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

— так называемая функция Досона [28]. Аналогично, при лоренцевой форме обрезания $[1 + (\alpha t)^2]^{-1}$ имеем $J_1 \sim \exp(-\omega/\alpha)$ и $J_2 = \omega^{-1}[1 + O(\alpha^2/\omega^2)]$. Для произвольной гладкой (аналитической) функции выключения поля разность импульсов $p_x(\infty) - p_x(0)$ экспоненциально мала.

Из (A.2)–(A.4) находим

$$p_x(\infty) = p_z(\infty) = 0, \quad p_y(\infty) = p_y(0) + \frac{\xi F}{\omega} = \frac{\xi F}{\omega} \frac{\text{sh } \tau_0}{\tau_0} \equiv p_{max}, \quad (\text{A.6})$$

что совпадает с (8). В случае $0 < |\xi| < 1$ импульс \mathbf{p}_{max} направлен по оси y , т. е. вдоль малой оси полевого эллипса [4].

Отметим, что в подбарьерном движении координата $x(t)$ — вещественная, а $y(t)$ — чисто мнимая. Соответственно, компонента скорости $v_x(t) = dx/dt$ — чисто мнимая, а $v_y(t)$ — вещественная. Поскольку при $t > 0$ движение является классически разрешенным, импульс электрона на выходе из-под барьера может быть направлен только вдоль оси y . Аналогично обстоит дело в случае ионизации постоянными электрическим и магнитным полями произвольного направления [24, 29], когда подбарьерная траектория неоднородна из-за действия силы Лоренца. Таким образом, в многомерных задачах квантовой механики точка поворота не является, вообще говоря, точкой остановки классической частицы.

Заметим, что приведенный выше вывод справедлив только для коротких лазерных импульсов, когда $\alpha/\omega \ll 1$. Для длинных импульсов существенны эффекты изменения среднего по времени (дрейфового) импульса электрона под действием градиентной силы [30]. При этом для расчета распределения вылетающих электронов по конечным кинетическим энергиям следует рассмотреть их движение в пространственно-неоднородном поле в области лазерного фокуса и учесть эффект пондеромоторного ускорения. В простых моделях это можно сделать аналитически [31], а для реалистических профилей поля — численно [32].

6. ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вероятность n -фотонной ионизации атомного s -уровня получается интегрированием распределения (3) с δ -функцией, выражающей закон сохранения энергии при многофотонной ионизации периодическим полем [1, 4]:

$$w_n = \int \delta \left(\frac{p^2 - p_n^2}{2} \right) |F(\mathbf{p})|^2 d^3 p, \quad p_n = \sqrt{2\omega(n - \nu)}. \quad (\text{B.1})$$

Полагая

$$p_x = p_n \sqrt{1 - u^2} \sin \varphi, \quad p_y = p_n u, \quad p_z = p_n \sqrt{1 - u^2} \cos \varphi \quad (\text{B.2})$$

($-1 \leq u \leq 1$) и интегрируя по азимутальному углу φ , получаем

$$w_n = 2\pi A p_n J, \quad (\text{B.3})$$

где

$$J = \int_{-1}^1 du \exp \{ -2(n - \nu) [c_x(1 - u^2) + c_y(u - \xi q)^2] \} \times a(c(1 - u^2)). \quad (\text{B.4})$$

Здесь $q = p_F/p_n$, $c = (n - \nu)(c_z - c_x)$, а коэффициенты c_i приведены в (7'), функция $a(x)$ определена в (13), а величины A и p_F имеют те же значения, что и в формулах (6) и (8).

Таким образом, вычисление вероятностей w_n , задающих энергетический спектр, сведено к однократному интегралу, который, вообще говоря, не вычисляется аналитически. Ниже мы рассмотрим три предельных случая, когда возможны дальнейшие упрощения.

1. При $\gamma \ll 1$, учитывая разложения (9)–(11), находим

$$J = \int_{-1}^1 du \exp \{ -(n - \nu)\gamma [b_1(1 - u^2) + b_2(u - \xi q)^2] \} \times a((n - \nu)\gamma b_3(1 - u^2)), \quad (\text{B.5})$$

где

$$b_1 = 2(1 - \xi^2)\gamma^2/3, \quad b_2 = 2 - (1 - \xi^2)\gamma^2/3, \quad b_3 = 1 - [1 - (7/9)\xi^2] \gamma^2/2. \quad (\text{B.6})$$

Поскольку $b_1 \ll b_2$, экспонента в (B.5) имеет максимум шириной $\delta u/u_0 = \xi_1/\xi$ при $u = u_0 = |\xi|q + O(\gamma^2)$,

где $\xi_1 = \omega/\sqrt{F\kappa} = \gamma\sqrt{\epsilon} \ll 1$. Исключая малую область значений эллиптичности $0 \leq \xi \leq \xi_1$, можно считать, что $\delta u \ll 1$. Если $|\xi|q < 1$, т. е. $p_n > p_F$, то точка u_0 лежит на пути интегрирования. Вынося медленноменяющуюся функцию (13) за знак интеграла и учитывая равенство $(n-\nu)(1-u_0^2) = n-n_0$, приходим к распределению (12). Напротив, при $|\xi|q > 1$ подынтегральное выражение в (В.5) имеет максимум на границе области интегрирования ($u = 1$ или $u = -1$), что дает распределение (14).

2. В противоположном предельном случае $\gamma \gg 1$, учитывая (17), имеем

$$\begin{aligned} c_1 &= (n-\nu) \frac{2(1-\xi^2)\tau_0^2}{(1-\xi^2)\tau_0 + \xi^2}, \\ c_2 &= (n-\nu) \frac{2[(1-\xi^2)\tau_0^2 + 2\xi^2\tau_0]}{(1-\xi^2)\tau_0 + \xi^2}, \\ c_3 &= (n-\nu) \frac{\xi^2\tau_0}{(1-\xi^2)\tau_0 + \xi^2}. \end{aligned} \quad (\text{В.7})$$

Вне узкого интервала $1 \geq |\xi| > 1 - (\tau_0\sqrt{n_0-\nu})^{-1}$ коэффициент $c_1 \gg 1$ и интеграл (В.4) формируется на краю области интегрирования, так что при $\tau_0 \gg 1$

$$w_n \propto \exp \left\{ -2\tau_0 \left[\frac{(1-\xi^2)\tau_0 + 2\xi^2}{(1-\xi^2)\tau_0 + \xi^2} \right] \times \right. \\ \left. \times (\sqrt{n-\nu} - \sqrt{n_0-\nu})^2 \right\}, \quad (\text{В.8})$$

откуда сразу же следует распределение (18).

3. Наконец, в случае линейной поляризации

$$\begin{aligned} c_x &= \tau_0 - \text{th } \tau_0, \quad c_y = 2\tau_0, \\ c_z &= (n-\nu) \text{th } \tau_0, \quad \tau_0 = \text{Arsh } \gamma. \end{aligned} \quad (\text{В.9})$$

Учитывая значение интеграла

$$\int_0^1 \exp(-2cu^2) \times \\ \times a(c(1-u^2)) du = w(\sqrt{2c})/\sqrt{2c}, \quad c > 0 \quad (\text{В.10})$$

(функция $w(x)$ определена в (А.5)), находим из (В.4), (В.5) выражения для вероятностей w_n , ранее полученные для этого случая ($\xi = 0$) в работах [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
2. А. И. Никишов, В. И. Ригус, ЖЭТФ **50**, 255 (1966).
3. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966).
4. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **51**, 309 (1966).
5. С. П. Гореславский, С. В. Попруженко, ЖЭТФ **110**, 1200 (1996).
6. В. С. Попов, ЖЭТФ **118**, 56 (2000).
7. M. Bashkansky, P. H. Bucksbaum, and D. W. Shumaker, Phys. Rev. Lett. **59**, 274 (1987); **60**, 2458 (1988).
8. L. D. Van Woerkom, P. Hansch, and M. A. Walker, in *Multiphoton Processes* № 154, ed. by P. Lombropulus and H. Walther (1996), p. 78.
9. G. G. Paulus, F. Zacher, H. Walther, A. Lohr, W. Becker, and M. Kleber, Phys. Rev. Lett. **80**, 484 (1998).
10. G. G. Paulus, F. Grasbon, A. Dreischuh, H. Walther, R. Kopold, and W. Becker, Phys. Rev. Lett. **84**, 3791 (2000).
11. E. A. Nersesov and D. F. Zaretsky, Laser Phys. **3**, 1105 (1993).
12. W. Becker, A. Lohr, M. Kleber, and M. Lewenstain, Phys. Rev. A **56**, 645 (1997).
13. M. Yu. Kuchiev, J. Phys. B **28**, 5093 (1995).
14. A. Becker and F. H. M. Faisal, in *Multiphoton Processes* № 154, ed. by P. Lombropulus and H. Walther (1996), p. 118.
15. A. Lohr, M. Kleber, R. Kopold, and W. Becker, Phys. Rev. A **55**, R4003 (1997).
16. В. С. Попов, В. П. Кузнецов, А. М. Переломов, ЖЭТФ **53**, 331 (1967).
17. В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, ЖЭТФ **113**, 1579 (1998).
18. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971), с. 224.
19. А. А. Радциг, Б. М. Смирнов, *Параметры атомов и атомных ионов*, Энергоатомиздат, Москва (1986).
20. D. R. Hartree, Proc. Cambr. Phil. Soc. **24**, 89 (1927).
21. M. J. Seaton, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **118**, 504 (1958); Rep. Progr. Phys. **46**, 167 (1983).
22. D. R. Bates and A. Damgaard, Phil. Trans. Roy. Soc. London **242**, 101 (1949).
23. Л. П. Рапопорт, Б. А. Зон, Н. Л. Манаков, *Теория многофотонных процессов в атомах*, Атомиздат, Москва (1978).

24. В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, В. С. Попов, ЖЭТФ **115**, 521 (1999); ДАН **365**, 329 (1999).
25. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **70**, 493 (1999); Laser Phys. **10**, 1033 (2000).
26. P. Dietrich, N. H. Burnett, M. Ivanov, and P. B. Corkum, Phys. Rev. A **50**, R3585 (1994).
27. V. P. Krainov, J. Opt. Soc. Amer. B **50**, 425 (1997).
28. *Handbook of Mathematical Functions*, ed. by M. Abramowitz and I. A. Stegun, Dover, New York (1965).
29. Л. П. Котова, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **70**, 1151 (1968).
30. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ **34**, 242 (1958).
31. С. П. Гореславский, Н. Б. Нарожный, В. П. Яковлев, Письма в ЖЭТФ **46**, 173 (1987); S. P. Goreslavskii, N. B. Narozhny, and V. P. Yakovlev, J. Opt. Soc. Amer. B **6**, 1572 (1989).
32. J. H. Eberly, J. Javanainen, and K. Rzazewsky, Phys. Rep. **204**, 331 (1991).