ЖЭТФ, 2001, том 119, вып. 5, стр. 913–930

КОЛЛЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ СПАРИВАНИЕМ

*П. Н. Брусов**, *П. П. Брусов*

Ростовский-на-Дону государственный университет
344104, Ростов-на-Дону, Россия

Поступила в редакцию 17 марта 2000 г.

В формализме функционального интегрирования построены трехмерные и двумерные модели p- и d-спаривания для сверхпроводников и сверхтекучих квантовых жидкостей. В рамках этих моделей вычислены спектры коллективных возбуждений в сверхпроводниках с нетривиальным спариванием (высокотемпературных сверхпроводниках, сверхпроводниках с тяжелыми фермионами и других) при p- и d-спаривании. Рассматриваются как объемные системы, так и двумерные. Изучаются некоторые недавние идеи относительно реализации в ВТСП смесей различных состояний. В частности, рассмотрена смесь состояний $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$. Полученные результаты по вычислению спектров коллективных возбуждений в сверхпроводниках с нетривиальным спариванием могут быть использованы для определения типа спаривания и параметра порядка в ВТСП и СТФ, а также для интерпретации экспериментов по поглощению ультразвука и микроволн в этих системах.

PACS: 74.20.-z, 74.25.-q, 74.76.Bz

1. ВВЕДЕНИЕ

До последнего времени изучение коллективных возбуждений в сверхпроводниках с нетривиальным спариванием носило экзотический характер, и тому было несколько причин. Во-первых, несмотря на существование определенных свидетельств [1] о нетривиальном характере спаривания в некоторых сверхпроводниках (высокотемпературных сверхпроводниках, ВТСП, и сверхпроводниках с тяжелыми фермионами, СТФ), достоверно нетривиальный тип спаривания не был установлен ни для одного сверхпроводника. Во-вторых, не было найдено достаточно веских доказательств существования коллективных возбуждений в сверхпроводниках. Ситуация резко изменилась за последние несколько лет и особенно за последний год, переводя изучение коллективных возбуждений в сверхпроводниках с нетривиальным спариванием в реальную плоскость. В свете последних экспериментов [1] эта тема становится весьма важной. Прежде всего, несколько лет назад в пленках обычных (низкотемпературных) сверхпроводников впервые экспериментально наблюдалась так называемая амплитудная мода (с частотой порядка 2Δ), связанная с колебаниями амплитуды параметра порядка [1]. Отметим, что до этого времени из двух коллективных мод, существующих в сверхпроводниках и связанных с колебаниями фазы и амплитуды комплексного параметра порядка, экспериментально наблюдалась [1] только первая (нуль-звук). Кроме того, за последний год тип спаривания установлен для многих сверхпроводников (см., например, [2]): s-спаривание реализуется в обычных (низкотемпературных) сверхпроводниках и в ВТСП с проводимостью электронного типа; d-спаривание в ВТСП с проводимостью дырочного типа, органических сверхпроводниках, некоторых СТФ (UPd_2Al_3, $CePd_2Si_3$, $CeIn_3$, $CeNi_2Ge_2$ и др.), p-спаривание в чистом ^3He, в ^3He в аэрогеле, Sr_2RuO_4 (ВТСП), UPt_3 (СТФ).

2. МОДЕЛИ p- И d-СПАРИВАНИЯ ДЛЯ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Метод континуального интегрирования в применении к нерелятивистской ферми-системе при температуре T приводит к необходимости интегриро-

*В настоящее время Cornell University, Ithaca, NY 14853, USA, e-mail: pnb@ccmr.cornell.edu

вать по пространству антикоммутирующих функций $\chi(\mathbf{x},\tau)$, $\overline{\chi}(\mathbf{x},\tau)$ с разложением Фурье

$$\chi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_p a_s(p) \exp\left[i(\omega\tau + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\right], \qquad (1)$$

где $p = (\mathbf{k},\omega)$, $\omega = (2n+1)\pi T$ — ферми-частоты, $x = (\mathbf{x},\tau)$, $\beta = 1/T$, V — объем системы, T — температура.

Рассмотрим функционал действия для взаимодействующей ферми-системы:

$$S = \int_0^\beta d\tau\, d^3x \sum_s \overline{\chi}_s(\mathbf{x},\tau)\partial_\tau \chi_s(\mathbf{x},\tau) - \int_0^\beta \mathcal{H}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

соответствующий гамильтониану

$$\mathcal{H}(\tau) = \int d^3x \sum_s \frac{1}{2m} \nabla\overline{\chi}_s(\mathbf{x},\tau)\nabla\chi_s(\mathbf{x},\tau) - \\ -(\lambda + s\mu_0 H)\overline{\chi}_s(\mathbf{x},\tau)\chi_s(\mathbf{x},\tau) + \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3y U(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \times \\ \times \sum_{ss'} \overline{\chi}_s(\mathbf{x},\tau)\overline{\chi}_{s'}(\mathbf{y},\tau)\chi_{s'}(\mathbf{y},\tau)\chi_s(\mathbf{x},\tau). \quad (3)$$

Здесь H — магнитное поле, λ — химический потенциал, μ — магнитный момент частицы, U — потенциал парного взаимодействия, s, s' — спиновые индексы, каждый из которых принимает значение «+» или «−».

Проинтегрируем сначала по быстрым полям χ_1, для которых $|k - k_F| > k_0$ или $|\omega| < \omega_0$ в разложении (1), а затем по медленным ферми-полям, $\chi_0 = \chi - \chi_1$ (здесь k_0 и ω_0 — параметры, задающие ширину слоя у поверхности Ферми, они определяются по порядку величины, и физические результаты от них не зависят). После интегрирования по быстрым полям рассмотрим члены, описывающие невзаимодействующие квазичастицы у поверхности Ферми, которые задаются квадратичной формой S_2, и их парное взаимодействие, которому отвечает форма четвертой степени S_4. Форма S_2 имеет вид

$$S_2 \approx \sum_{s,p} \frac{1}{Z}\left[i\omega - c_F(k - k_F) + s\mu H\right] a_s^+(p) a_s(p). \quad (4)$$

Здесь Z — нормировочная постоянная, c_F — скорость частицы на поверхности Ферми. Форма S_4 различна для различных типов спаривания, поэтому случаи p- и d-спариваний будут рассмотрены отдельно.

2.1. *p*-спаривание

В случае триплетного спаривания S_4 имеет вид

$$S_4 = \frac{1}{\beta V} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} t_0(p_1,p_2,p_3,p_4) a_+^+(p_1) \times \\ \times a_-^+(p_2) a_-(p_4) a_+(p_3) - \\ - \frac{1}{2\beta V} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} t_1(p_1,p_2,p_3,p_4) \times \\ \times \left[2a_+^+(p_1)a_-^+(p_2)a_-(p_4)a_+(p_3) + \right. \\ + a_+^+(p_1)a_+^+(p_2)a_+(p_4)a_+(p_3) + \\ \left. + a_-^+(p_1)a_-^+(p_2)a_-(p_4)a_-(p_3)\right].$$

Здесь $p = (\mathbf{k},\omega)$ — 4-импульс, $t_0(p_i)$ — симметричная, $t_1(p_i)$ — антисимметричная амплитуды рассеяния при перестановках $p_1 \leftrightarrow p_2$, $p_3 \leftrightarrow p_4$, нижний индекс у a, a^+ соответствует значениям s, s' $(\pm)$. В окрестности сферы Ферми можно положить $\omega_i = 0$, $\mathbf{k}_i = \mathbf{n}_i k_F$ $(i = 1,2,3,4)$. Амплитуды t_0, t_1 должны зависеть лишь от двух инвариантов, скажем, от $(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)$ и $(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2,\, \mathbf{n}_3 - \mathbf{n}_4)$, причем функция t_0 четна, а t_1 нечетна по второму инварианту. Поэтому можно записать

$$t_0 = f\left((\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2), (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 - \mathbf{n}_4)\right),$$

$$t_1 = (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 - \mathbf{n}_4) g\left((\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2), (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 - \mathbf{n}_4)\right),$$

причем функции f и g четные по второму аргументу. Функции f и g легко вычислить для газовой модели; для систем большой плотности их необходимо определять из эксперимента. Рассмотрим модель с $f = 0$, $g = \mathrm{const} < 0$ как модель типа БКШ (приближение слабой связи) для сверхпроводников и сверхтекучих квантовых жидкостей со спариванием в p-состоянии.

Наиболее экономичным способом описания коллективных возбуждений является переход от исходных ферми-полей к бозе-полям, описывающим куперовские пары квазичастиц. Такой переход можно осуществить, вставив, например, под знак интеграла по медленным ферми-полям гауссов интеграл от $\exp(c^+Ac)$ по бозе-полю c, где A — некоторый оператор. После сдвига бозе-поля на квадратичную форму ферми-полей, уничтожающего форму S_4, интеграл по ферми-полям становится гауссовым и равен определителю оператора $\hat{M}(c^+,c)$.

Проинтегрировав по медленным ферми-полям, приходим к функционалу гидродинамического действия в виде

$$S_{eff} = \frac{1}{g}\sum_{p,i,a} c_{ia}^+(p) c_{ia}(p) + \\ + \frac{1}{2}\ln\det\frac{M(c_{ia}, c_{ia}^+)}{M\left(c_{ia}^{(0)}, c_{ia}^{(0)+}\right)}, \quad (5)$$

где $c_{ia}^{(0)}$ — конденсатные значения бозе-полей c_{ia} и $M(c_{ia}, c_{ia}^{+})$ — 4×4-матрица, зависящая от бозе-полей и параметров квазифермионов, с элементами

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{1}{Z}\left[i\omega + \xi - \mu(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right]\delta_{p_1p_2},\\ M_{22} &= \frac{1}{Z}\left[-i\omega + \xi + \mu(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right]\delta_{p_1p_2},\\ M_{12} &= \frac{1}{\beta V}(n_{1i}-n_{2i})c_{ia}(p_1+p_2)\sigma_a,\\ M_{21} &= -\frac{1}{\beta V}(n_{1i}-n_{2i})c_{ia}^{+}(p_1+p_2)\sigma_a. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь σ_a $(a = 1,2,3)$ — матрицы Паули, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Функционал гидродинамического действия содержит всю информацию о физических свойствах модельной системы и определяет, в частности, спектр ее коллективных возбуждений [3].

2.2. *d*-спаривание

В случае синглетного спаривания S_4 имеет вид

$$S_4 = -\frac{1}{\beta V}\sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} t(p_1,p_2,p_3,p_4)\times \times a_{+}^{+}(p_1)a_{-}^{+}(p_2)a_{-}(p_4)a_{+}(p_3). \tag{7}$$

Первый вариант модели d-спаривания для сверхпроводников, полученный методом функционального интегрирования, был предложен нами ранее [4] в 1994 г., когда идея d-спаривания в ВТСП только начинала всерьез обсуждаться. Ниже мы представим усовершенствованную самосогласованную модель сверхпроводников с d-спариванием [5], а в последующих разделах исследуем с ее помощью спектр коллективных мод в ВТСП и СТФ.

В случае d-спаривания имеем

$$t(p_1,p_2,p_3,p_4) = V\left(\hat{k},\hat{k}'\right) = \sum_{m=-2}^{2} g_m Y_{2m}\left(\hat{k}\right)Y_{2m}^{*}\left(\hat{k}'\right). \tag{8}$$

Здесь

$$k_1 = k + q/2, \quad k_2 = -k + q/2,$$
$$k_3 = k' + q/2, \quad k_4 = -k' + q/2,$$

$Y_{2m}(\hat{k})$ — сферические гармоники с $l = 2$. Мы рассматриваем случай сферической симметрии, который требует использования одной константы связи g. Учет симметрии решетки требует введения дополнительных констант связи (до пяти в общем случае: пять — число сферических гармоник с $l = 2$). Это число, однако, уменьшается до двух в случае кубической симметрии и до трех в случае гексагональной симметрии: $g_{|m|}(m = 0, \pm 1, \pm 2)$.

Как упоминалось выше, в случае синглетного d-спаривания число степеней свободы параметра порядка равно десяти, т. е. мы должны иметь пять комплексных канонических переменных. В качестве канонических переменных естественно выбрать следующие комбинации исходных переменных:

$$c_1 = c_{11} + c_{22}, \quad c_2 = c_{11} - c_{22}, \quad c_3 = c_{12} + c_{21},$$
$$c_4 = c_{13} + c_{31}, \quad c_5 = c_{23} + c_{32}.$$

В канонических переменных c_j $(j = 1,2,3,4,5)$ эффективный функционал действия имеет следующий вид:

$$S_{eff} = \frac{1}{2g}\sum_{p,j} c_j^{+}(p)c_j(p)(1+2\delta_{j1}) + + \frac{1}{2}\ln\det\frac{M(c_j^{+}, c_j)}{M(c_j^{+(0)}, c_j^{(0)})}, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{1}{Z}\left[i\omega + \xi - \mu(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right]\delta_{p_1p_2},\\ M_{22} &= \frac{1}{Z}\left[-i\omega + \xi + \mu(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right]\delta_{p_1p_2},\\ M_{12} &= M_{21}^{*} = \frac{1}{\beta V}\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2}\times\\ &\times\left[c_1(1-3\cos^2\theta) + c_2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \right.\\ &\left. + c_3\sin^2\theta\sin 2\varphi + c_4\sin 2\theta\cos\varphi + c_5\sin 2\theta\sin\varphi\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь δ_{j1} — символ Кронекера, $\delta_{p_1p_2}$ — дельта-функция.

3. КОЛЛЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ СПАРИВАНИЕМ

3.1. *p*-спаривание

Первые результаты для случая p-спаривания были получены ранее [3] для A-, B-, A_1-, $2D$- и полярных фаз, связанных со сверхтекучим ^{3}He, где первые три фазы были открыты экспериментально. Нами рассмотрены дополнительные сверхпроводящие фазы, которые могут реализовываться в ВТСП или СТФ.

Ниже приведены полученные результаты. Напомним, что спектр коллективных мод в каждой сверхпроводящей фазе состоит из восемнадцати мод, включающих в себя высокочастотные и голдстоуновские моды (Δ — щель в ферми-спектре, Δ_0 — амплитуда щели в ферми-спектре в случае анизотропной щели, $k_\parallel$ — компонента импульса коллективного возбуждения, параллельная оси орбитальной анизотропии $\mathbf{l}$, здесь и ниже в скобках указано число коллективных мод).

A-фаза

$$E = \Delta_0(T)(1.96 - 0.31i) \quad (3),$$

$$E = \Delta_0(T)(1.17 - 0.13i) \quad (6),$$

$$E^2 = c_F^2 k^2/3 \quad (3), \quad E^2 = c_F^2 k_\parallel^2 \quad (6).$$

B-фаза

$$E^2 = \frac{12\Delta^2}{5} \quad (5), \quad E^2 = \frac{8\Delta^2}{5} \quad (5), \quad E^2 = 4\Delta^2 \quad (4),$$

$$E^2 = \frac{c_F^2 k^2}{3} \quad (1), \quad E^2 = \frac{c_F^2 k^2}{5} \quad (1),$$

$$E^2 = \frac{c_F^2 k^2}{5} \quad (2).$$

$2D$-фаза

$$E = 0 \quad (6); \quad E = \Delta_0(T)(1.96 - 0.31i) \quad (2),$$

$$E = \Delta_0(T)(1.17 - 0.13i) \quad (4),$$

$$E = 2\mu H \quad (2),$$

$$E_0^2 = \Delta_0^2(T)(1.96 - 0.31i)^2 + 4\mu^2 H^2 \quad (2),$$

$$E^2 = \Delta_0^2(T)(0.518)^2 + 4\mu^2 H^2 \quad (1),$$

$$E^2 = \Delta_0^2(T)(0.495)^2 + 4\mu^2 H^2 \quad (1).$$

A_1-фаза

$$E = \Delta_0(T)(1.96 - 0.31i) \quad (1),$$

$$E = \Delta_0(T)(1.17 - 0.13i) \quad (2),$$

$$E = 2\mu H \quad (8), \quad E = 0 \quad (1).$$

Здесь, как и ранее, H — магнитное поле. Шесть других мод имеют мнимый спектр (это связано с нестабильностью A_1-фазы относительно малых возмущений).

В полярной фазе, $c_{ia} = \delta_{i3}\delta_{a3}$, получаем следующий набор уравнений для спектра коллективных мод

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\left[\left(1 - \frac{4\Delta^2}{q^2}\right) J - 2\right] = 0 \quad (6),$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)(J-2) = 0 \quad (6),$$

$$\int_0^1 dx\, x^2 \left(1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}\right) J = 0 \quad (3),$$

$$\int_0^1 dx\, x^2 J = 0 \quad (3).$$

Здесь

$$J = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\Delta^2/q^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4\Delta^2/q^2}}{1 - \sqrt{1 + 4\Delta^2/q^2}},$$

$$x = \cos\theta, \quad q^2 = \omega^2 + c_F^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}).$$

Величина J зависит от щели в ферми-спектре, которая в общем случае является функцией угловых переменных θ и φ. Полагая $\kappa = 0$ и решая численно эти уравнения, мы нашли корни $E = \Delta_0(T)(1.20 - 1.75i)$ для второго уравнения и $E = 0$ для третьего. Для первого и четвертого уравнений корни найти не удалось.

Таким образом, в полярной фазе найдено шесть сильнозатухающих мод с энергией (частотой) $E = \Delta_0(T)(1.20 - 1.75i)$ и три голдстоуновские моды. Наличие сильнозатухающих мод связано с тем, что в полярной фазе щель исчезает вдоль экватора в отличие от случаев аксиальной и планарной фаз, где она обращается в нуль лишь в полюсах и где коллективные моды затухают умеренно и могут наблюдаться как резонансы в экспериментах по поглощению ультразвука.

Для следующих трех фаз,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

спектр оказывается идентичным, и для его определения получаем следующий набор уравнений:

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\left(1+\frac{4\Delta^2}{q^2}\right)J=0 \quad (2),$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\left(1+\frac{6\Delta^2}{q^2}\right)J=0 \quad (3),$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\left(1+\frac{8\Delta^2}{q^2}\right)J=0 \quad (1),$$

$$\int_0^1 dx(2-x^2)\left(1+\frac{4\Delta^2}{q^2}\right)(J-1)=0 \quad (1),$$

$$\int_0^1 2dx\, x^2\left(1+\frac{6\Delta^2}{q^2}\right)(J-1)=0 \quad (2),$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\left(1-\frac{2\Delta^2}{q^2}\right)J=0 \quad (2),$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)J=0 \quad (3),$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\left(1-\frac{4\Delta^2}{q^2}\right)J=0 \quad (1),$$

$$\int_0^1 dx\, x^2\left[\left(1-\frac{2\Delta^2}{q^2}\right)J-1\right]=0 \quad (2),$$

$$\int_0^1 dx\, x^2(J-1)=0 \quad (1).$$

Численное решение этих уравнений дает следующий спектр высокочастотных мод (при $\kappa=0$):

$$E=\Delta_0(T)(1.83-0.06i) \quad (1),$$
$$E=\Delta_0(T)(1.58-0.04i) \quad (2),$$
$$E=\Delta_0(T)(1.33-0.10i) \quad (1),$$
$$E=\Delta_0(T)(1.33-0.08i) \quad (2),$$
$$E=\Delta_0(T)(1.28-0.04i) \quad (2),$$
$$E=\Delta_0(T)(1.09-0.22i) \quad (3),$$
$$E=\Delta_0(T)(0.71-0.05i) \quad (3),$$
$$E=\Delta_0(T)(0.33-0.34i) \quad (1),$$
$$E=\Delta_0(T)(0.23-0.71i) \quad (2).$$

Две последние моды имеют мнимые части того же порядка, что и действительные. Это означает, что они сильно затухают и не могут рассматриваться как резонансы.

Для фазы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ мы получаем следующий набор уравнений для спектра коллективных возбуждений:

$$\int_0^1 dx\, x^2\left(1+\frac{2\Delta^2}{q^2}\right)(J-1)=0 \quad (6),$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\left(1+\frac{2\Delta^2}{q^2}\right)J=0 \quad (4),$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\left(1+\frac{\Delta^2}{q^2}\right)J=0 \quad (4),$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\left(1+\frac{3\Delta^2}{q^2}\right)J=0 \quad (4).$$

Численное решение этих уравнений дает следующий спектр высокочастотных мод (при $\kappa=0$):

$$E=\Delta_0(T)(0.66-0.02i), \quad E=\Delta_0(T)(0.64-0.02i),$$

$$E=\Delta_0(T)(0.46-0.04i), \quad E=\Delta_0(T)(0.36-0.04i).$$

Для фазы $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ мы получили следующие два уравнения для спектра:

$$\int_0^1 dx\left[\left(1+\frac{n\Delta^2}{q^2}+\frac{m\Delta^2}{q^2}\,\frac{1-x^2}{3}\right)J(1-x^2)- \right.$$
$$\left. -\frac{4}{3}+\frac{16}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right]=0,$$

$$\int_0^1 dx\left[\left(1+\frac{n\Delta^2}{q^2}+\frac{m\Delta^2}{q^2}\,\frac{2}{3}\left[A+(2A-1)x^2\right]\right)\times\right.$$
$$\left.\times J(1-x^2)-\frac{4}{3}+\frac{16}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right]\times$$
$$\times\int_0^1 dx\left[2\left(1+\frac{n\Delta^2}{q^2}+\frac{mA\Delta^2}{q^2}\,\frac{2x^2}{3}\right)Jx^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}-\frac{8}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right]-$$
$$-2\left[\int_0^1 dx\, J\frac{\Delta^2}{q^2}\,\frac{2}{3}(1-x^2)x^2\right]^2=0.$$

Первое из них при $n = 4$, $m = 1$ дает уравнение, описывающее моды, соответствующие переменным $u_{11} - u_{22}$, $u_{12} + u_{21}$, где $u_{ij} + v_{ij} i = c_{ij}$ — бозе-поля из (5); при $n = 4$, $m = 0$ — переменным $u_{12} - u_{21}$; при $n = 0, m = -1$ — переменным $v_{11} - v_{22}$, $v_{12} + v_{21}$; при $n = 0$, $m = 0$ — переменным $v_{12} - v_{21}$. Второе уравнение при $A = 1$, $n = 4$, $m = 1$ описывает моды, соответствующие переменным $u_{11} + u_{22}, u_{33}$; при $A = 1$, $n = 0$, $m = -1$ — переменным $v_{11} + v_{22}$, v_{33}; при $A = 0$, $n = 4$, $m = 1$ — переменным (u_{23}, u_{32}), (u_{13}, u_{31}); при $A = 0$, $n = 0$, $m = -1$ — переменным (v_{23}, v_{32}), (v_{13}, v_{31}).

Для фазы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеем следующее уравнение для спектра:

$$\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi (A - x^2)(1 \pm A \sin\varphi) \times \times \left[\left(1 + \frac{n\Delta^2}{q^2} \right) J + A - 1 \right] = 0.$$

При $A = 0$, $n = 0$ оно описывает моды, соответствующие переменным u_{31}, u_{32}, v_{33}; при $A = 0$, $n = 4$ — переменным u_{33}, v_{31}, v_{32}; при $A = 1$, $n = 0$ — переменным $u_{11} \pm u_{21}$, $u_{12} \pm u_{22}$, $v_{13} \pm v_{23}$; при $A = 1$, $n = 4$ — переменным $v_{11} \pm v_{21}$, $v_{12} \pm v_{22}$, $u_{13} \pm u_{23}$.

Для фазы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ мы получили следующие два уравнения для спектра:

$$\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \, x^2 \left[\left(1 + \frac{n\Delta^2}{q^2} \right) J - 1 \right] = 0,$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi (1 - x^2)(1 \pm \sin\varphi) \left(1 + \frac{n\Delta^2}{q^2} \right) J = 0.$$

Первое уравнение при $n = 0$ описывает моды, соответствующие переменным u_{31}, u_{32}, v_{33}; при $n = 4$ — переменным u_{33}, v_{31}, v_{32}. Второе уравнение при $n = 0$ отвечает модам, соответствующим переменным $u_{11} \pm u_{21}$, $u_{12} \pm u_{22}$, $v_{13} \pm v_{23}$, а при $n = 4$ — переменным $v_{11} \pm v_{21}$, $v_{12} \pm v_{22}$, $u_{13} \pm u_{23}$.

Для следующих двух фаз,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix},$$

спектр оказывается идентичным, и для его определения мы получаем два уравнения, первое из которых,

$$\int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[\left(1 + \frac{2\Delta^2}{q^2} + \frac{2\Delta_0^2}{q^2} \times \times \left[A(1 - x^2) \cos^2\varphi + Bx^2 \right] \right) \times \times J (1 - x^2) \cos^2\varphi + \frac{1}{2} \left[(1 - x^2) \cos^2\varphi - x^2 \right] \times \times \ln\left(1 - (1 - x^2) \cos^2\varphi \right) \right] \times \times \int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[\left(1 + \frac{2\Delta^2}{q^2} + \frac{2\Delta_0^2}{q^2} \times \times \left[B(1 - x^2) \cos^2\varphi + Ax^2 \right] \right) Jx^2 - -\frac{1}{2} \left[(1 - x^2) \cos^2\varphi - x^2 \right] \ln\left(1 - (1 - x^2) \cos^2\varphi \right) \right] - - \left[\int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{4\Delta_0^2}{q^2} x^2 (1 - x^2) \cos^2\varphi \, J \right]^2 = 0,$$

при $A = 1$, $B = 0$ дает уравнение, описывающее моды, соответствующие переменным v_{11}, v_{33}; при $A = -1$, $B = 0$ — переменным u_{11}, u_{33}; при $A = 0$, $B = 1$ — переменным v_{13}, v_{31}; при $A = 0$, $B = -1$ — переменным u_{13}, u_{31}. Второе уравнение,

$$\int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} d\varphi \left\{ \left(1 + \frac{2\Delta^2}{q^2} N + \frac{2\Delta_0^2}{q^2} x^2 P \right) \times \times J \left\{ (1 - x^2) \left[(z - y) \cos^2\varphi + y \right] + x^2 (1 - z - y) \right\} + + \left[(1 - x^2) \cos^2\varphi - x^2 \right] (2z + y - 1) + + \frac{1}{2} \left[3(1 - x^2) \sin^2\varphi - 1 \right] y \ln\left[1 - (1 - x^2) \cos^2\varphi \right] \right\} = 0,$$

при $y = 1$, $z = 0$ и $N = 0$, $P = 0$ описывает моду, соответствующую переменной u_{22}; при $N = 2$, $P = 0$ — переменной v_{22}; при $N = 0$, $P = 1$ — переменной u_{21}; при $N = 2$, $P = -1$ — переменной v_{21}; при $N = 1$, $P = -1$ — переменной u_{23}; при $N = 1$, $P = 1$ — переменной v_{23}; при $y = 0$, $z = 1$ и $N = 0$, $P = 0$ — переменной u_{12}; при $N = 2$, $P = 0$ — переменной v_{12}; при $y = 0$, $z = 0$ и $N = 0$, $P = 0$ — переменной u_{32}; при $N = 2$, $P = 0$ — переменной v_{32}.

Для фазы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ из второго уравнения находим высокочастотные моды

$$E = \Delta_0(T)(1.80 - 0.09i), \quad E = \Delta_0(T)(0.55 - 0.80i),$$

последняя из которых имеет мнимую часть того же порядка, что и действительная. Это означает, что она сильно затухает и не может рассматриваться как резонанс.

Тэвордт [6] изучал спектр коллективных мод параметра порядка в Sr_2RuO_4 в предположении, что в этой системе реализуется p-спаривание. Он рассмотрел две возможные сверхпроводящие фазы с параметрами порядка

$$\hat{d} = \Delta_0 \hat{z}(k_x + ik_y), \quad \hat{d} = \frac{\Delta_0}{2}\hat{z}(k_x + k_y).$$

Отметим, что первая фаза является аналогом A-фазы сверхтекучего ^{3}He. Для нее Тэвордт нашел моду $E = 2\Delta_0$, в то время как для второй фазы он нашел моду $E = \sqrt{3}\Delta_0$. Обе моды связаны с флуктуациями плотности заряда, однако эта связь мала в силу малости величины $dN(E)/dE$, которая является мерой электронно-дырочной асимметрии на поверхности Ферми. Сравнивая результаты Тэвордта ($E = 2\Delta_0$) с нашими, заметим, что для высокочастотных мод в фазе, которая является аналогом A-фазы сверхтекучего ^{3}He, нами получена частота $E = \Delta_0(T)(1.96 - 0.31i)$, что является более точным значением частоты. Это связано с тем, что Тэвордт не вычислял мнимые части частот коллективных мод, наличие которых в силу дисперсионных соотношений перенормирует действительные части энергий.

Нами также была рассмотрена вторая из изученных Тэвордтом сверхпроводящих фаз, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, для спектра мод которой были получены уравнения, приведенные выше, решения которых, однако, не были получены.

Рассматривая различную амплитуду спаривания в плоскостях xy и перпендикулярной ей, Тэвордт получил ряд квазиголдстоуновских мод с частотами $\omega^2 = \Delta_0^2 \ln(T_c/T_{cj})$, где $T_{cj} < T_c$ — температура сверхпроводящего перехода, соответствующая спариванию в плоскости xy. Поскольку в нашем рассмотрении обе амплитуды спаривания предполагаются равными, мы получили вместо квазиголдстоуновских мод чисто голдстоуновские ($T_c = T_{cj}$ и, следовательно, $\omega = 0$). Отметим, однако, что нами было рассмотрено значительно большее количество сверхпроводящих фаз в случае p-спаривания, чем Тэвордтом.

3.2. *d*-спаривание

3.2.1. Коллективные возбуждения в ВТСП при *d*-спаривании

Рассмотрим следующие сверхпроводящие состояния, $d_{x^2-y^2}$, d_{xy}, d_{xz}, d_{yz}, $d_{3z^2-r^2}$, возникающие в симметрийной классификации ВТСП (табл. 1).

Вычислим спектр коллективных мод для пяти данных состояний. В первом приближении спектр коллективных возбуждений определяется квадратичной частью эффективного действия S_{eff}, получаемого посредством сдвига $c_j(p) \to c_j(p) + c_j^0(p)$ в выражении (9) для S_{eff}. Здесь $c_j^0(p) = \sqrt{\beta V} c \delta_{p0} c_j^0$ — конденсатные значения канонических бозе-полей, и величины c_j^0 для рассматриваемых в табл. 1 случаев равны

$$1)\ c_1^0 = -2, \quad 2)\ c_2^0 = 2, \quad 3)\ c_4^0 = 2,$$

$$4)\ c_5^0 = 2, \quad 5)\ c_3^0 = 2,$$

а все оставшиеся компоненты $c_j(p)$ равны нулю.

Спектр находится из уравнения $\det Q = 0$, где Q — матрица квадратичной формы. Для каждой сверхпроводящей фазы найдены пять высокочастотных мод (табл. 2) и пять голдстоуновских (квазиголдстоуновских) мод, энергии которых равны нулю или малы ($\leq 0.1\Delta_0$).

Мы вычислили спектр коллективных мод для пяти сверхпроводящих фаз ВТСП, а именно для $d_{x^2-y^2}$, $d_{3z^2-r^2}$, d_{xy}, d_{xz}, d_{yz}, используя модель d-спаривания, созданную нами с помощью метода функционального интегрирования, и рассматривая случай сферической симметрии, который требует использования одной константы связи g. Учет симметрии решетки требует введения дополнительных констант связи (до пяти в общем случае).

Для каждой из пяти фаз мы нашли пять высокочастотных мод в каждой фазе с частотами, лежащими в интервале Δ_0–$2\Delta_0$, а также пять голдстоуновских (квазиголдстоуновских) мод с частотами меньшими $0.1\Delta_0$.

Отметим, что частоты (энергии) всех коллективных мод оказываются комплексными. Это является следствием d-спаривания, или, другими словами, следствием исчезновения щели в выбранных направлениях. В этом случае бозе-возбуждения распадаются на фермионы, что приводит к затуханию коллек-

Таблица 1

№	Фаза	Параметр порядка	Щель в ферми-спектре
1	$d_{3z^2-r^2}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\Delta_0 \lvert 3\cos^2\theta - 1 \rvert$
2	$d_{x^2-y^2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta_0 \sin^2\theta \lvert \cos 2\varphi \rvert$
3	d_{xy}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta_0 \sin^2\theta \lvert \sin 2\varphi \rvert$
4	d_{xz}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta_0 \lvert \sin 2\theta \cos\varphi \rvert$
5	d_{yz}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta_0 \lvert \sin 2\theta \sin\varphi \rvert$

Таблица 2

$d_{3z^2-r^2}$	$d_{x^2-y^2}$, d_{xy}	d_{xz}, d_{yz}
$E_1 = \Delta_0(2.0 - 1.65i)$	$E_1 = \Delta_0(1.88 - 0.79i)$	$E_1 = \Delta_0(1.76 - 1.1i)$
$E_{2,3} = \Delta_0(1.85 - 0.69i)$	$E_2 = \Delta_0(1.66 - 0.50i)$	$E_2 = \Delta_0(1.70 - 0.48i)$
$E_{4,5} = \Delta_0(1.64 - 0.50i)$	$E_3 = \Delta_0(1.14 - 0.68i)$	$E_3 = \Delta_0(1.14 - 0.68i)$
	$E_4 = \Delta_0(1.13 - 0.71i)$	$E_4 = \Delta_0(1.13 - 0.73i)$
	$E_5 = \Delta_0(1.10 - 0.65i)$	$E_5 = \Delta_0(1.04 - 0.83i)$

тивных мод. Значение мнимой части частоты (энергии), $\operatorname{Im} E_i$, составляет от 25 до 80%. Некоторые из этих мод затухают умеренно и могут рассматриваться как резонансы, в то время как другие затухают более сильно, что делает их наблюдение более трудным. Учет кулоновского взаимодействия превращает нуль-звуковую моду в плазменную моду.

Полученные спектры коллективных мод в ВТСП могут быть использованы для интерпретации ультразвуковых экспериментов и экспериментов по поглощению микроволн в ВТСП, а также для идентификации типа спаривания и параметра порядка в ВТСП.

3.2.2. Коллективные возбуждения в сверхпроводниках с тяжелыми фермионами при *d*-спаривании

В сверхпроводниках с тяжелыми фермионами (СТФ), так же как и в ВТСП, параметр порядка и тип спаривания к настоящему времени установлены не для всех соединений. Традиционное БКШ-спаривание находится в противоречии с неэкспоненциальной температурной зависимостью большинства термодинамических величин, таких как теплоемкость и другие. Сложная фазовая диаграмма СТФ также свидетельствует о нетривиальном спаривании в этих системах. Известны примеры

СТФ как с p-спариванием, так и с d-спариванием. Случай p-спаривания нами рассмотрен выше. Здесь с помощью метода функционального интегрирования рассмотрим d-спаривание в СТФ аналогично тому, как это было сделано нами для всех сверхпроводящих состояний, возникающих в симметрийной классификации ВТСП. Вычислим полный спектр коллективных возбуждений для всех сверхпроводящих состояний, возникающих в симметрийной классификации СТФ. Рассмотрим три сверхпроводящих состояния, включая так называемые $d\gamma$ и Y_{2-1}. Коллективные возбуждения в двух последних фазах изучались ранее Хирошимой и Намайзавой [7] с помощью метода кинетического уравнения. В конце раздела мы сравним наши результаты для двух из трех фаз с результатами работы [7].

В каждой сверхпроводящей фазе СТФ существует десять коллективных мод. Нами найдено, что пять из них являются высокочастотными, т. е. имеют частоты порядка щели в ферми-спектре. В то же время пять оставшихся мод являются голдстоуновскими (или квазиголдстоуновскими) с частотами (энергиями) исчезающими (малыми) при нулевых импульсах.

Итак, рассмотрим снова трехмерную модель d-спаривания в сверхпроводниках. Напомним, что модель описывается функционалом гидродинамического действия, получаемым последовательным функциональным интегрированием по быстрым, а затем медленным ферми-полям. Функционал гидродинамического действия определяет все свойства рассматриваемой системы, в данном случае СТФ и, в частности, спектр коллективных возбуждений.

3.2.2.1. Вычисление спектра коллективных мод

Рассмотрим следующие сверхпроводящие состояния, возникающие в симметрийной классификации СТФ:

1) $d\gamma$-фазу $\begin{pmatrix} e^{4\pi i/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ со щелью $\Delta(T) = \Delta_0(T)\left(e^{4\pi i/3}k_x^2 + e^{4\pi i/3}k_y^2 + k_z^2\right)$;

2) Y_{2-1}-фазу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$ со щелью $\Delta(T) = \Delta_0(T)\sin 2\theta e^{-i\varphi}$;

3) фазу $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ со щелью, пропорциональной $\sin^2\theta$.

Вычислим спектр коллективных мод для трех данных состояний аналогично п. 3.2.1. Величины c_j^0 для рассматриваемых здесь случаев равны

$$1)\ c_1^0 = -1, \quad c_2^0 = -i\sqrt{3};$$

$$2)\ c_4^0 = 2, \quad c_5^0 = 2i;$$

$$3)\ c_2^0 = 2, \quad c_3^0 = 2i,$$

а все оставшиеся компоненты c_j^0 равны нулю.

Для получения квадратичной части эффективного действия S_{eff} представим второй член в выражении (9) в виде

$$\frac{1}{2}\ln\det(1+Gu), \quad G^{-1} = M(c^{0+}, c^0),$$
$$u = \frac{1}{\sqrt{\beta V}}\begin{pmatrix} 0 & [cY^*] \\ [cY^*] & 0 \end{pmatrix}. \tag{9'}$$

Здесь

$$[cY^*] = c_1(1-3\cos^2\theta) + c_2\sin^2\theta\cos 2\varphi + $$
$$+ c_3\sin^2\theta\sin 2\varphi + c_4\sin 2\theta\cos\varphi + c_5\sin 2\theta\sin\varphi.$$

Разложим (9′) по степеням новых бозе-полей c_j и удержим члены до второго порядка по c_j. Член второго порядка (член первого порядка исчезает в результате минимизации) дается выражением

$$-\frac{1}{4}\sum_{p_1,p_2,p_3,p_4}\mathrm{Sp}(G_{p_1p_2}u_{p_2p_3}G_{p_3p_4}u_{p_4p_1}).$$

После вычислений получим квадратичную форму, определяющую спектр коллективных возбуждений.

Уравнение для щели

Рассмотрим первый член в выражении (9) для S_{eff}. Константа g, описывающая взаимодействие квазифермионов, должна быть исключена с помощью уравнения для щели. Для его получения необходимо вычислить S_{eff} в области Гинзбурга–Ландау (при $T \sim T_c$), где волновая функция куперовских пар (параметр порядка) мала (по модулю):

$$S_{eff} = \frac{1}{2g}\sum_{p,j}|c_j(p)|^2(1+2\delta_{j1}) + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ln(1+Gu).$$

Разлагая второй член по степеням Gu, имеем

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}\mathrm{Sp}(Gu)^{2n}.$$

Выполняя суммирование и подставляя

$$u_{p_1p_2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta V}} \begin{pmatrix} 0 & [cY^*] \\ [cY^*] & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$G = \frac{Z\sigma_3\delta_{p_1p_2}}{i\omega - \xi},$$

получаем

$$S_{eff} = \frac{A}{2g}\beta V c^2 + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\alpha^2 c^2 Z^2 [c^0Y^*][c^{+0}Y]}{\omega^2+\xi^2}\right).$$

Здесь $\alpha = \sqrt{15/35\pi}$, σ_3 — матрица Паули и мы подставили $c_j^0(p) = \sqrt{\beta V}c\delta_{p0}c_j^0$. Константа c определяется из уравнения $\delta S_{eff}/\delta c = 0$, которое дает уравнение для щели:

$$\frac{A}{g} + \frac{1}{\beta V}\sum_p \frac{\alpha^2 Z^2[c^0Y^*][c^{+0}Y]}{\omega^2+\xi^2+\alpha^2Z^2[c^0Y^*][c^{+0}Y]} = 0.$$

Здесь $A = 6$ для первой фазы и $A = 8$ для второй и третьей фаз. Для различных сверхпроводящих фаз получаем следующие уравнения:

$$1)\ \frac{1}{g} + \frac{\alpha^2Z^2}{6\beta V}\times$$
$$\times\sum_p \frac{(1-3\cos^2\theta)^2 + 3\sin^4\theta\cos^2 2\varphi}{\omega^2+\xi^2+\dfrac{\Delta_0^2}{4}\left[(1-3\cos^2\theta)^2+3\sin^4\theta\cos^2 2\varphi\right]} = 0,$$

$$2)\ \frac{1}{g} + \frac{\alpha^2Z^2}{2\beta V}\sum_p \frac{\sin^2 2\theta}{\omega^2+\xi^2+\Delta_0^2\sin^2 2\theta} = 0,$$

$$3)\ \frac{1}{g} + \frac{\alpha^2Z^2}{2\beta V}\sum_p \frac{\sin^4 2\theta}{\omega^2+\xi^2+\Delta_0^2\sin^4 2\theta} = 0,$$

где $\Delta_0 = 2cZ\alpha$. Исключая член $1/g$ с помощью уравнения для щели, получим следующее выражение для квадратичной части S_{eff}:

$$\begin{aligned} S_{eff} = &-\frac{\alpha^2Z^2}{2A\beta V}\sum_p \frac{[c^0Y^*][c^{+0}Y]}{\omega^2+\xi^2+\alpha^2Z^2[c^0Y^*][c^{+0}Y]}\times \\ &\times\sum_j (1+2\delta_{j1})c_j^+(p)c_j(p) + \frac{Z^2}{4\beta V}\times \\ &\times\sum_{p_1+p_2=p}\frac{1}{M_1M_2}\left\{(i\omega_1+\xi_1)(i\omega_2+\xi_2)\times\right. \\ &\times\left(\left[c^+(p)Y(p_2)\right]\left[c(p)Y^*(p_1)\right] + \right. \\ &+\left.\left[c^+(p)Y(p_1)\right]\left[c(p)Y^*(p_2)\right]\right) - \\ &-\Delta^2\left[c^+(p)Y(-p_1)\right]\left[c^*(-p)Y(-p_2)\right] - \\ &-\left.\Delta^{+2}\left[c(p)Y^*(-p_1)\right]\left[c(-p)Y^*(-p_2)\right]\right\}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Это общая квадратичная форма для всех трех сверхпроводящих состояний СТФ: только параметр A и структура щели (посредством $[c^0Y^*][c^{+0}Y]$ и M_i) различны для разных сверхпроводящих состояний. Отметим, что для всех трех сверхпроводящих состояний $\Delta = \Delta^+$ (или $c^0 = c^{0+}$).

Коэффициенты квадратичной формы пропорциональны суммам произведений гриновских функций квазифермионов. При низких температурах ($T_c - T \sim T_c$) можно перейти от суммирования к интегрированию с помощью правила

$$\frac{1}{\beta V}\sum_p \to \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{k_F^2}{c_F}\int d\omega\, d\xi\, d\Omega. \qquad (12)$$

Для вычисления интегралов будем использовать тождество Фейнмана:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\omega_1^2+\xi_1^2+\Delta^2\right)\left(\omega_2^2+\xi_2^2+\Delta^2\right)\right]^{-1} = \int d\alpha\,\times \\ &\times\left[\alpha\left(\omega_1^2+\xi_1^2+\Delta^2\right)+(1-\alpha)\left(\omega_2^2+\xi_2^2+\Delta^2\right)\right]^{-2}. \end{aligned} \qquad (13)$$

С его помощью легко вычисляются интегралы по переменным ω и ξ и затем по параметру α и угловым переменным.

После вычисления всех интегралов кроме интегралов по угловым переменным, приравнивая детерминант квадратичной формы к нулю, получаем следующий набор уравнений, определяющих полный спектр коллективных мод в СТФ при d-спаривании (индекс i нумерует ветви коллективных мод, относящиеся к одной фазе):

$$1)\ k=1,\quad i=1$$

$$\int_0^1 dx\int_0^{2\pi} d\varphi\,\times$$
$$\times\left\{\frac{\sqrt{\omega^2+4f_1}}{\omega}\ln F_1 g_1 + (g_1-2f_1)\ln f_1\right\} = 0,$$

$$\int_0^1 dx\int_0^{2\pi} d\varphi\,\times$$
$$\times\left\{\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+4f_1}}\ln F_1 g_1 + (g_1-2f_1)\ln f_1\right\} = 0,$$

$$k = 1, \quad i = 2,3,4,5$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2+4f_1}}{\omega} \ln F_1 g_i + \left(g_i - \frac{2}{3} f_i\right) \ln f_1 \right\} = 0,$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \times$$

$$\times \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+4f_1}} \ln F_1 g_i + \left(g_i - \frac{2}{3} f_1\right) \ln f_i \right\} = 0,$$

2) $k = 2,3, \quad i = 1$

$$\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2+4f_k}}{\omega} \ln F_k g_1 + \left(g_1 - \frac{3}{2} f_1\right) \ln f_k \right\} = 0, \qquad (14)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \times$$

$$\times \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+4f_k}} \ln F_k g_1 + \left(g_1 - \frac{3}{2} f_1\right) \ln f_k \right\} = 0,$$

$$k = 2, \quad i = 2,3,4,5$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2+4f_2}}{\omega} \ln F_2 g_i + \left(g_i - \frac{1}{2} g_2\right) \ln f_2 \right\} = 0,$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \times$$

$$\times \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+4f_2}} \ln F_2 g_i + \left(g_i - \frac{1}{2} g_2\right) \ln f_2 \right\} = 0.$$

Здесь

$$\ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_k} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_k} - \omega} \equiv F_k,$$

$$g_1 = (1-3x^2)^2, \quad g_2 = (1-x^2)^2 \cos^2 2\varphi,$$

$$g_3 = g = 4(1-x^2)x^2 \cos^2 \varphi,$$

$$g_4 = 4(1-x^2)x^2 \sin^2 \varphi, \quad g_5 = (1-x^2)^2 \sin^2 \varphi,$$

$$f_1 = \frac{1}{4}\left[(1-3x^2)^2 + 3(1-x^2)^2 \cos^2 2\varphi\right],$$

$$f_2 = 4(1-x^2)x^2, \quad f_3 = (1-x^2)^2,$$

$$\cos\theta = x, \quad \omega = \omega/\Delta_0.$$

3.2.2.2. Результаты: спектры коллективных мод в СТФ

Решая уравнения (14) численно, находим спектры коллективных мод трех рассматриваемых фаз. В каждой фазе найдено десять коллективных мод: пять из них (получаемых из вторых уравнений) являются высокочастотными, т. е. имеют частоты порядка щели в ферми-спектре. В то же время пять оставшихся мод (получаемых из первых уравнений) являются голдстоуновскими (или квазиголдстоуновскими) с частотами (энергиями), исчезающими при нулевых импульсах.

В табл. 3 приведены результаты для высокочастотных мод (E_i — энергия (частота) i-й ветви). Отметим, что в $d\gamma$-состоянии три последние моды квазивырождены. Спектры второго (Y_{2-1}) и третьего (со щелью, пропорциональной $\sin^2\theta$) состояний оказываются идентичными. В обеих фазах найдены три высокочастотные моды, две из которых дважды вырождены.

Итак, мы вычислили спектр коллективных мод для трех сверхпроводящих фаз СТФ, а именно для фаз $d\gamma$ и Y_{2-1} и фазы с щелью, пропорциональной $\sin^2\theta$, используя модель d-спаривания, созданную нами с помощью метода функционального интегрирования [4, 5] и рассматривая случай сферической симметрии, в котором используется одна константа связи g. Учет симметрии решетки требует введения дополнительных констант связи (до пяти в общем случае: пять — число сферических гармоник с $l = 2$). Это число, однако, уменьшается до двух в случае кубической симметрии и до трех в случае гексагональной симметрии: $g_{|m|}(m = 0, \pm1, \pm2)$.

Для каждой из трех фаз мы нашли пять высокочастотных мод в каждой фазе (из вторых уравнений в (14)) с частотами, лежащими в интервале $(1.19–1.93)\Delta_0$. Первые уравнения дают пять голдстоуновских (квазиголдстоуновских) мод (с частотами меньшими $0.1\Delta_0$).

Отметим, что частоты (энергии) всех коллективных мод оказываются комплексными и их мнимые части, $\operatorname{Im} E_i$, описывают затухание коллективных мод благодаря распаду куперовских пар на исходные фермионы. Значение мнимой части частоты составляет от 20 до 50% от действительной части, $\operatorname{Re} E_i$. Это означает, что коллективные моды в случае d-спаривания затухают более сильно, чем в большинстве случаев p-спаривания, где мнимые части частоты (энергии) составляют от 8 до 15% от $\operatorname{Re} E_i$. Это — следствие различия в топологии нулей щели в ферми-спектре, которые являются точками при

Таблица 3

$d\gamma$-фаза	Y_{2-1}- и $\sin^2\theta$-фазы
$E_2 = \Delta_0(T)(1.66 - 0.50i)$	$E_{1,2} = \Delta_0(T)(1.93 - 0.41i)$
$E_1 = \Delta_0(T)(1.45 - 0.48i)$	$E_3 = \Delta_0(T)(1.62 - 0.75i)$
$E_3 = \Delta_0(T)(1.24 - 0.64i)$	$E_{4,5} = \Delta_0(T)(1.59 - 0.83i)$
$E_4 = \Delta_0(T)(1.21 - 0.60i)$	
$E_5 = \Delta_0(T)(1.19 - 0.60i)$	

p-спаривании (в большинстве фаз) и комбинацией точек и линий в случае d-спаривания. Отметим, что подобная ситуация иногда имеет место и в случае p-спаривания (например, в полярной фазе сверхтекучего ^{3}He затухание коллективных мод сильнее, чем в других фазах (A, $2D$ и других) именно благодаря наличию линий нулей).

Затухание коллективных мод не было вычислено в работе Хирошимы и Намайзавы [7]. Это является недостатком метода кинетического уравнения по сравнению с методом функционального интегрирования. Метод кинетического уравнения вычисляет только действительные части частот коллективных мод, $\operatorname{Re} E_i$. Учет затухания коллективных мод, $\operatorname{Im} E_i$, приводит к сдвигу в $\operatorname{Re} E_i$, поскольку в силу дисперсионных соотношений наличие мнимой части частот коллективных мод приводит к перенормировке их действительных частей $\operatorname{Re} E_i$.

Таким образом, мы можем сравнить только действительные части частот коллективных мод. Мы получили пять высокочастотных мод в каждой фазе. В $d\gamma$-фазе частоты лежат в интервале $(1.19\text{–}1.66)\Delta_0$. В работе [7] найдено пять мод с частотами, лежащими в интервале $(0.9\text{–}1.87)\Delta_0$, и две низколежащие моды с частотами $E = 0.32\Delta_0$. В Y_{2-1}-фазе найденные нами частоты лежат в интервале $(1.59\text{–}1.93)\Delta_0$, тогда как частоты высокочастотных мод из работы Хирошимы и Намайзавы [7] лежат в интервале $(1.22\text{–}1.57)\Delta_0$. В обеих работах найдены голдстоуновские и низколежащие моды.

Отметим, что спектр третьей моды вычислен нами впервые, и он оказался идентичным спектру Y_{2-1}-фазы.

Некоторые из полученных нами мод затухают умеренно и могут рассматриваться как резонансы, в то время как другие затухают более сильно, что делает их наблюдение более трудным. Учет кулоновского взаимодействия превращает нуль-звуковую моду в плазменную.

Полученные спектры коллективных мод в СТФ могут быть использованы для интерпретации ультразвуковых экспериментов и экспериментов по поглощению микроволн в СТФ, а также для идентификации типа спаривания и параметра порядка в этих сверхпроводниках.

В настоящее время эксперименты по поглощению микроволн в СТФ (на частотах порядка 20 ГГц) проводятся в Северо-Западном университете (Эванстон, США). Их целью является определение типа спаривания и параметра порядка в СТФ [1].

3.2.3. Как отличить смесь двух d-состояний от чистого d-состояния в ВТСП

Недавние эксперименты [8] и теоретические исследования [9, 10] показывают, что в ВТСП, по-видимому, реализуется смесь d-состояний. Мы впервые вычислили спектр коллективных возбуждений в смешанном $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$-состоянии ВТСП [11]. Мы использовали модель, созданную нами ранее [4, 5] в рамках метода функционального интегрирования.

Мы показали [11], что, несмотря на то что спектры в обеих фазах, $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy}, являются идентичными, спектр в смешанном $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$-состоянии оказывается совершенно отличным от спектра чистых состояний. Поэтому исследование спектра коллективных мод в экспериментах по поглощению ультразвука и микроволн дает возможность разграничить смесь состояний и чистые состояния.

Большинство ученых полагает [1], что в оксидах реализуется d-спаривание ($d_{x^2-y^2}$-состояние). В то же самое время различные идеи относительно расширенного s-спаривания, смеси s- и d-состояний, различных d-состояний до сих пор активно обсуждаются [12]. Одной из причин такой ситуации является отсутствие ответа на вопрос: обращается ли щель точно в нуль в некоторых выделенных направлениях в импульсном пространстве (как в случае $d_{x^2-y^2}$-состояния) или же щель анизотропна, но ни-где не обращается точно в нуль (за исключением, может быть, некоторых точек на ферми-поверхности). Существующие эксперименты [1] (туннельные и др.) не дают однозначного ответа на этот вопрос, в то время как ответ на этот вопрос является весьма принципиальным. С другой стороны, существуют эксперименты [8], которые могут быть объяснены [9] в предположении, что в ВТСП реализуется смесь состояний типа $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$. Аннетт и др. [10] рассмотрели возможность реализации смеси различных d-состояний в ВТСП и пришли к выводу, что $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$-состояние является предпочтительным. Мы предлагаем один из возможных способов разграничить смесь состояний и чистые состояния.

Для этого мы вычислили спектр коллективных возбуждений в смешанном $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$-состоянии ВТСП. Сравнение этого спектра со спектром чистых d-состояний ВТСП показывает, что они различаются существенно, и это различие может быть использовано для определения симметрии параметра порядка в ВТСП.

Используем модель d-спаривания, описываемую уравнениями (9) и (10), и рассмотрим смешанное $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$-состояние ВТСП. Параметр порядка в этом состоянии имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

и щель

$$\Delta(T) = \Delta_0(T)\sin^2\theta.$$

Уравнение для щели записывается как

$$\frac{1}{g} + \frac{\alpha^2 Z^2}{2\beta V}\sum_p \frac{\sin^4\theta}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta_0^2\sin^4\theta} = 0, \tag{16}$$

где

$$\Delta_0 = 2cZ\alpha, \quad \alpha = \sqrt{15/32\pi}\,.$$

В первом приближении спектр коллективных возбуждений определяется квадратичной частью эффективного действия S_{eff}, получаемого посредством сдвига $c_j(p) \to c_j(p) + c_j^0(p)$ в S_{eff}. Здесь $c_j^0(p) = \sqrt{\beta V}c\delta_{p0}c_j^0$ — конденсатные значения канонических бозе-полей, и c_j^0 для рассматриваемых здесь случаев равны

$$c_2^0 = 2, \quad c_3^0 = 2i,$$

а все остальные c_j^0 равны нулю.

Исключая член $1/g$ с помощью уравнения для щели, получим для квадратичной части S_{eff} выражение (11) при $A = 4$. Коэффициенты квадратичной формы пропорциональны суммам произведений функций Грина квазифермионов. При низких температурах ($T_c - T \sim T_c$) мы можем перейти от суммирования к интегрированию согласно правилу (12). Для вычисления получаемых интегралов будем использовать тождество Фейнмана (13). С его помощью легко вычисляются интегралы по переменным ω и ξ и затем по параметру α и угловым переменным.

После вычисления всех интегралов, кроме интегралов по угловым переменным, и приравнивания детерминанта квадратичной формы к нулю, получаем следующий набор уравнений, определяющих полный спектр коллективных мод в смешанном $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$-состоянии (индекс i нумерует ветви коллективных мод, относящиеся к одной фазе):

$$\begin{aligned}
&i = 1\\
&\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \times\\
&\times \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2+4f}}{\omega}\ln F g_1 + \left(g_1 - \frac{3}{2}f_1\right)\ln f \right\} = 0,\\
&\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \times\\
&\times \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+4f}}\ln F g_1 + \left(g_1 - \frac{3}{2}f_1\right)\ln f \right\} = 0,\\
&i = 2,3,4\\
&\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \times\\
&\times \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2+4f}}{\omega}\ln F g_i + \left(g_i - \frac{1}{2}g\right)\ln f \right\} = 0,\\
&\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \times\\
&\times \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+4f}}\ln F g_i + \left(g_i - \frac{1}{2}g\right)\ln f \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\ln\frac{\sqrt{\omega^2+4f}+\omega}{\sqrt{\omega^2+4f}-\omega} \equiv \ln F,\\
&g_1 = (1-3x^2)^2,\\
&g_2 = (1-x^2)^2\cos^2 2\varphi,\\
&g_3 = g = 4(1-x^2)x^2\cos^2\varphi,\\
&g_4 = 4(1-x^2)x^2\sin^2\varphi,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$g_5 = (1 - x^2)^2 \sin^2 \varphi,$$

$$f_1 = \frac{1}{4}\left[(1 - 3x^2)^2 + 3(1 - x^2)^2 \cos^2 2\varphi\right],$$
$$f = (1 - x^2)^2$$

и были использованы замены $\cos\theta = x$, $\omega = \omega/\Delta_0$.

Решая эти уравнения численно, получаем следующие результаты для спектра коллективных мод в $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$-состоянии. Найдено десять коллективных мод: пять из них (получаемых из вторых уравнений) являются высокочастотными, т. е. имеют частоты порядка щели в ферми-спектре. В то же время пять оставшихся мод (получаемых из первых уравнений) являются голдстоуновскими (или квазиголдстоуновскими) с частотами (энергиями), исчезающими при нулевых импульсах (порядка $(0.03\text{–}0.08)\Delta_0(T)$).

Приведем результаты для высокочастотных мод (E_i — энергия i-й ветви):

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= \Delta_0(T)(1.93 - 0.41i),\\ E_3 &= \Delta_0(T)(1.62 - 0.75i),\\ E_{4,5} &= \Delta_0(T)(1.59 - 0.83i). \end{aligned} \tag{19}$$

Мы можем сравнить полученные результаты со спектром чистых $d_{x^2-y^2}$- и d_{xy}-состояний, полученным нами ранее [13]:

$$\begin{aligned} E_1 &= \Delta_0(T)(1.88 - 0.79i),\\ E_2 &= \Delta_0(T)(1.66 - 0.50i),\\ E_3 &= \Delta_0(T)(1.40 - 0.68i),\\ E_4 &= \Delta_0(T)(1.13 - 0.71i),\\ E_5 &= \Delta_0(T)(1.10 - 0.65i). \end{aligned} \tag{20}$$

Несмотря на то что спектры в обеих фазах, $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy}, являются идентичными, спектр в смешанном $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$-состоянии оказывается совершенно отличным от спектра чистых состояний. В чистых состояниях все моды невырожденные, в то время как в смешанном состоянии две высокочастотные моды оказываются дважды вырожденными. Энергии высокочастотных мод лежат в интервале $(1.1\text{–}1.88)\Delta_0(T)$, в то время как в смешанном состоянии — в интервале $(1.59\text{–}1.93)\Delta_0(T)$, т. е. коллективные моды имеют в смешанном состоянии более высокие частоты.

Отметим, что затухание коллективных мод в чистых состояниях выше, чем в смешанном состоянии ($\mathrm{Im}\, E_i$ находится в пределах от 30 до 65% в чистом состоянии и от 20 до 50% в смешанном состоянии). Это можно легко понять, принимая во внимание то, что в чистых состояниях щель исчезает на линиях поверхности Ферми, в то время как в смешанном состоянии она исчезает лишь в двух точках (полюсах).

Сильное отличие спектра коллективных возбуждений в чистых d-состояниях от спектра в смешанном состоянии дает возможность проверить симметрию сверхпроводящего состояния в экспериментах по поглощению ультразвука и микроволн, в которых возбуждаются коллективные моды. В то время как эти эксперименты могут потребовать использования достаточно высоких частот (порядка десятков гигагерц), принципиальные ограничения на частоты ультразвука (микроволн) отсутствуют: поскольку частоты коллективных мод пропорциональны амплитуде щели $\Delta_0(T)$, исчезающей при T_c, в принципе можно использовать любые частоты, приближаясь к T_c.

Таким образом, мы получаем возможность ответить на два принципиальных вопроса:

1) исчезает ли щель вдоль некоторых выделенных линий?

2) имеем ли мы в ВТСП чистое d-состояние или смесь d-состояний?

В работе [12] авторы рассмотрели смесь двух d-состояний и s- и d-состояний: $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ и $d_{x^2-y^2} + is$. В случае реализации смеси двух d-состояний они изучали ситуацию, когда d_{xy}-состояние индуцируется внешним магнитным полем (в соответствии с предположениями Лафлина [9] при объяснении экспериментов Кришаны [8]). Они доказали существование в этом случае моды орбитальной намагниченности, которая соответствует осцилляциям относительной фазы φ между двумя компонентами около равновесного значения $\varphi = \pm\pi/2$. Эта мода аналогична клэппинг-моде (clapping mode) в ^{3}He–A, точное значение частоты которой было получено в [3]. Однако в случае, когда d_{xy}-состояние индуцируется внешним магнитным полем, частота этой моды оказывается пропорциональной внешнему полю, $\omega \approx B\Delta_0$ (здесь B — индукция магнитного поля).

Мы не рассматривали причин возникновения примесного d_{xy}-состояния, которых может быть много (генерация d_{xy}-состояния возле магнитной примеси, наличие вихревой текстуры и т. д.), и, в частности, не вводили внешнего магнитного поля, поэтому зависимость частот коллективных мод от поля нами не изучалась. Вместе с тем отметим, что авторы работы [12] изучали одну конкретную моду в смеси состояний, в то время как нами изучался полный спектр коллективных мод.

4. ДВУМЕРНАЯ p- И d-ВОЛНОВАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

4.1. Двумерные модели p- и d-спаривания в сверхпроводниках

Существует несколько причин для рассмотрения двумерных ($2D$) моделей в сверхпроводниках и, в частности, $2D$-моделей d-спаривания в ВТСП. Прежде всего, плоскости CuO_2 являются общим структурным фактором практически всех открытых ВТСП, и общепринятым является то, что вся физика явления связана именно с этими плоскостями.

Еще 20 лет назад было доказано [3] существование сверхтекучести в пленках ^{3}He, которая была затем открыта экспериментально [14].

В $2D$-сверхпроводимости существует своя специфика. Она связана с тем, что согласно теореме Боголюбова о $(1/k^2)$ конденсат существует только при $T = 0$. Однако возможна сверхпроводимость и при $T \neq 0$, связанная с определенным поведением корреляторов бозе-полей: если они убывают на больших расстояниях не экспоненциально, а степенным образом, это означает наличие сверхпроводимости в системе. В этом случае критическая температура T_c является точкой перехода от экспоненциального убывания корреляторов бозе-полей к степенному. Возможны также альтернативные подходы, связанные с введением затравочного конденсата, порождающего сверхпроводящую плотность носителей порядка их полной плотности.

4.1.1. p-спаривание

Для описания $2D$-модели p-спаривания рассмотрим $3D$-модель [3] со следующими модификациями для $2D$-случая.

а) Орбитальный момент $\mathbf{l}$ куперовских пар ($|\mathbf{l}| = 1$) должен быть перпендикулярен плоскости и может иметь только две проекции на ось z: ± 1. Так как p-спаривание является триплетным, полный спин пары равен единице, поэтому в случае двумерного p-спаривания имеется $3 \times 2 \times 2 = 12$ степеней свободы. Поэтому сверхпроводящее состояние в этом случае может быть описано произвольной комплексной 2×3-матрицей $c_{ia}(p)$, которая имеет то же количество степеней свободы ($2 \times 3 \times 2 = 12$). Это число равно числу коллективных мод в каждой фазе. Напомним, что в трехмерном случае это число равно 18.

б) Теперь $\mathbf{x}$ является $2D$-вектором, двумерный «объем» $S = L^2$ (вместо $V = L^3$ в $3D$-случае).

4.1.1.2. Спектр коллективных мод

Приведем результаты, часть которых была получена ранее [3], для спектра коллективных мод в различных сверхпроводящих состояниях двумерных сверхпроводников при p-спаривании (как и выше, в скобках дано количество коллективных мод):

a-фаза $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$E^2 = c_F^2 k^2/2 \quad (3), \quad E^2 = 2\Delta^2 + c_F^2 k^2/2 \quad (6),$$

$$E^2 = 4\Delta^2 + (0.5 - 0.433i) c_F^2 k^2/2 \quad (3),$$

b-фаза $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$E^2 = c_F^2 k^2/2 \quad (2), \quad E^2 = 3c_F^2 k^2/4 \quad (1),$$

$$E^2 = c_F^2 k^2/4 \quad (1), \quad E^2 = 2\Delta^2 \quad (4),$$

$$E^2 = 4\Delta^2 + (0.15 - 0.22i) c_F^2 k^2/2 \quad (3),$$

$$E^2 = 4\Delta^2 + (0.85 - 0.22i) c_F^2 k^2/2 \quad (1),$$

$$E^2 = 4\Delta^2 + (0.5 - 0.43i) c_F^2 k^2/2 \quad (2),$$

фаза $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

$$E^2 = 0 \quad (3), \quad E^2 = 2\Delta^2 \quad (6), \quad E^2 = 4\Delta^2 \quad (3),$$

фаза $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$E^2 = 0 \quad (4), \quad E^2 = 2\Delta^2 \quad (4), \quad E^2 = 4\Delta^2 \quad (4),$$

фаза $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$E^2 = 0 \quad (4), \quad E^2 = 2\Delta^2 \quad (4), \quad E^2 = 4\Delta^2 \quad (4).$$

4.1.2. d-спаривание

Как упоминалось выше, плоскости CuO_2 являются общим структурным фактором практически всех открытых ВТСП, и общепринятым является то, что вся физика явления связана именно с этими плоскостями. С учетом того что в большинстве ВТСП, по-видимому, реализуется d-спаривание, рассмотрение $2D$-модели d-спаривания является весьма актуальным. Существуют и дополнительные доводы в пользу изучения таких моделей. Так, для $2D$-антиферромагнетика показано, что только

d-канал обеспечивает притяжение между фермионами; d-спаривание возникает также в симметрийной классификации ВТСП [10, 15].

Итак, мы рассмотрим $2D$-модель d-спаривания в плоскостях CuO_2, созданную нами ранее [4, 5] с помощью метода функционального интегрирования. Модель, как и в $3D$-случае, описывается функционалом гидродинамического действия, получаемого последовательным функциональным интегрированием по быстрым, а затем медленным ферми-полям. Как и в $3D$-модели, функционал гидродинамического действия определяет все свойства рассматриваемой системы (в данном случае плоскостей CuO_2) и, в частности, спектр коллективных возбуждений.

Для описания $2D$-модели d-спаривания в плоскостях CuO_2 рассмотрим $3D$-модель, используемую нами выше. Основные особенности в двумерном случае будут заключаться в следующем.

а) Орбитальный момент $\mathbf{l}$ ($|\mathbf{l}| = 2$) должен быть перпендикулярен плоскости CuO_2 и может иметь только две проекции на ось z: ± 2. Так как d-спаривание является синглетным, полный спин пары равен нулю, поэтому в случае двумерного d-спаривания имеются $1 \times 2 \times 2 = 4$ степени свободы. Поэтому сверхпроводящее состояние в этом случае может быть описано комплексной симметричной бесследовой 2×2-матрицей $c_{ia}(p)$, которая имеет то же количество степеней свободы ($2 \times 2 \times 2 - 2 - 2 = 4$). Это число равно числу коллективных мод в каждой фазе. Напомним, что в $3D$-случае это число равно 10.

б) Потенциал спаривания дается следующей формулой:

$$t = v\left(\hat{k}, \hat{k}'\right) = \sum_{m=-2,2} g_m Y_{2m}\left(\hat{k}\right) Y^*_{2m}\left(\hat{k}'\right). \qquad (21)$$

В случае круговой симметрии $g_2 = g_{-2} = g$, и мы имеем одну константу связи g, в то время как менее симметричные случаи требуют наличия обеих констант, g_2 и g_{-2}. Будем рассматривать случай круговой симметрии.

в) Вектор $\mathbf{x}$ будет двумерным, и площадь $S = L^2$ (вместо $V = L^3$ в $3D$-случае). Принимая во внимание эти различия, будем описывать нашу ферми-систему антикоммутирующими функциями $\chi_s(\mathbf{x}, \tau)$, $\overline{\chi}_s(\mathbf{x}, \tau)$, определенными в «объеме» $S = L^2$ и антипериодическими по времени τ с периодом $\beta = T^{-1}$ (T — температура).

После процедуры функционального интегрирования по медленным и быстрым ферми-полям, которая аналогична подобной процедуре в $3D$-случае, получим эффективный функционал действия, который формально имеет ту же форму (5), как и в $3D$-случае.

В $2D$-случае при d-спаривании число степеней свободы параметра порядка равно четырем. Другими словами, мы имеем две комплексные канонические переменные. Из недиагональных элементов матрицы M легко видеть, что в качестве канонических переменных можно выбрать

$$c_1 = c_{11} - c_{22}, \quad c_2 = c_{12} + c_{21}.$$

Для сопряженных переменных имеем

$$c_1^+ = c_{11}^+ - c_{22}^+, \quad c_2^+ = c_{12}^+ + c_{21}^+.$$

В канонических переменных S_{eff} имеет следующий вид:

$$S_{eff} = \frac{1}{2g} \sum_{p,j} c_j^+(p) c_j(p) + \frac{1}{2} \ln \det \frac{M(c_j^+, c_j)}{M(c_j^{+(0)}, c_j^{(0)})}, \qquad (22)$$

где

$$M_{11} = \frac{1}{Z}\left[i\omega - \xi + \mu(\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma})\right] \delta_{p_1 p_2},$$

$$M_{22} = \frac{1}{Z}\left[-i\omega + \xi + \mu(\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma})\right] \delta_{p_1 p_2},$$

$$M_{12} = M_{21}^+ = \frac{\sigma_0 \alpha}{\sqrt{\beta}} \left(c_1 \cos 2\varphi + c_2 \sin 2\varphi\right).$$

Функционал S_{eff} определяет все свойства $2D$-сверхпроводников (плоскостей CuO_2 и др.). В частности, он определяет спектр коллективных мод.

4.2. Коллективные возбуждения в плоскостях CuO_2 ВТСП

Два сверхпроводящих состояния с параметрами порядка, пропорциональными $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, возникают в симметрийной классификации плоскостей CuO_2. В первой фазе щель пропорциональна

$$Y_{22} + Y_{2-2} \propto \sin^2\theta |\cos 2\varphi| \propto |\cos 2\varphi|,$$

в то время как во второй она пропорциональна

$$-i(Y_{22} - Y_{2-2}) \propto \sin^2\theta |\sin 2\varphi| \propto |\sin 2\varphi|.$$

В $2D$-случае полагаем $\theta = \pi/2$ и $\sin\theta = 1$.

Вычислим спектр коллективных мод для двух данных состояний. В первом приближении спектр коллективных возбуждений определяется квадратичной частью эффективного действия S_{eff}, получаемого посредством сдвига $c_j(p) \to c_j(p)+c_j^0(p)$ в S_{eff}. Здесь $c_j^0(p)$ — конденсатные значения канонических бозе-полей $c_j(p)$.

Квадратичная часть эффективного действия S_{eff} дается выражением (11) при $A = 4$. При этом $\Delta = \Delta_0|\cos 2\varphi|$ для фазы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\Delta = \Delta_0|\sin 2\varphi|$ для фазы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_0 = 2\alpha c Z$, $\alpha = \sqrt{15/32\pi}$ и $M_i = \omega_i^2 + \xi_i^2 + \Delta^2$.

Первый член в выражении для S_{eff} содержит константу связи g, которая должна быть исключена с помощью уравнения для щели, имеющего следующий вид соответственно для первой и второй фаз:

$$\frac{1}{g} + \frac{\alpha^2 Z^2}{\beta S} \sum_p \frac{\cos^2 2\varphi}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta_0^2 \cos^2 2\varphi} = 0,$$

$$\frac{1}{g} + \frac{\alpha^2 Z^2}{\beta S} \sum_p \frac{\sin^2 2\varphi}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\varphi} = 0.$$

Здесь $\Delta_0^2 = 4\alpha^2 c^2 Z^2$. При низких температурах можно перейти от суммирования к интегрированию с помощью правила

$$\frac{1}{\beta S} \sum_p \to \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{k_F}{c_F} \int d\omega\, d\xi\, d\varphi.$$

Здесь, как и ранее, k_F — ферми-импульс квазифермиона, c_F — скорость на поверхности Ферми. После интегрирования по ω и ξ с использованием процедуры Фейнмана находим следующие уравнения для спектра коллективных мод, получаемые из условия $\det Q = 0$, где Q — матрица квадратичной части функционала S_{eff}:

$$\begin{gathered} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \times \\ \times \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2+4g_k}}{\omega} \ln G g_1 - (g_k - g_i) \ln g_k \right\} = 0, \\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \times \\ \times \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+4g_k}} \ln G g_1 - (g_k - g_i) \ln g_k \right\} = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь $G \equiv (\sqrt{\omega^2 + 4g_k} + \omega)/(\sqrt{\omega^2 + 4g_k} - \omega)$, k обозначает фазу, а i нумерует моды, $g_1 = x^2$, $g_2 = 1-x^2$, $x = \cos 2\varphi$ и $\omega = \omega/\Delta_0$. Так, для каждого фиксированного k мы имеем четыре уравнения, которые дают нам четыре частоты коллективных мод.

4.3. Результаты и обсуждение

Спектры в обеих фазах оказываются идентичными. Мы нашли две высокочастотные моды в каждой фазе (из второго уравнения в (23)) со следующими частотами:

$$E_1 = \Delta_0(1.42 - 0.65i),$$

$$E_2 = \Delta_0(1.74 - 0.41i).$$

Отметим, что частоты обеих мод оказываются комплексными. Это является следствием d-спаривания, или, другими словами, следствием исчезновения щели в выбранных направлениях. В этом случае бозе-возбуждения распадаются на фермионы, что приводит к затуханию коллективных мод. Значение мнимой части частоты составляет 23% от величины ее действительной части для второй моды и 46% для первой. Поэтому обе моды могут рассматриваться как резонансы. При этом вторая мода лучше определена, чем первая.

Первое из уравнений в (23) дает две голдстоуновские (квазиголдстоуновские) моды (с частотами меньшими $0.1\Delta_0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. N. Brusov, *Mechanisms of HTSC*, vol. 1 and 2, Rostov State University Publishing, Rostov (1999).
2. *Proceedings of International Conference on Low Temperature Physics LT-22*, Helsinki, Finland, 1999, Physica B **284–288** (2000).
3. П. Н. Брусов, В. Н. Попов, *Сверхтекучесть и коллективные свойства квантовых жидкостей*, Наука, Москва (1988).
4. P. N. Brusov and N. P. Brusova, Physica B **194–196**, 1479 (1994).
5. P. N. Brusov and N. P.Brusova, J. Low Temp. Phys. **103**, 251 (1996).
6. L. Tewordt, Phys. Rev. Lett. **83**, 1007 (1999).
7. D. S. Hiroshima and H. Namaizawa, J. Low Temp. Phys. **73**, 137 (1988).

8. K. Krishana, N. P. Ong, Q. Li, G. D. Gu, and N. Koshizuka, Science **277**, 83 (1997).

9. R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **80**, 5188 (1998).

10. J. F. Annett, N. D. Goldenfeld, and A. J. Leggett, in *Physical Properties of High Temperature Superconductors V*, ed. by D. M. Ginsberg, World Scientific, Singapore (1996).

11. P. N. Brusov and P. P. Brusov, Physica B **281**–**282**, 949 (2000).

12. A. V. Balatsky, P. Kumar, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. Lett. **84**, 4445 (2000).

13. P. N. Brusov, N. P. Brusova, and P. P. Brusov, J. Low Temp. Phys. **108**, 143 (1997).

14. A. Sachrajda, R. F. Harris-Lowe, and J. Harrison, Phys. Rev. Lett. **55**, 1602 (1985).

15. M. Sigrist and T. M. Rice, Z. Phys. B **68**, 9 (1987).