

О СПЕКТРЕ СКОРОСТЕЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ДЖОЗЕФСОНОВСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

*В. М. Елеонский**, *Н. Е. Кулагин***

*Государственный научно-исследовательский институт физических проблем им. Ф. В. Лукина
103460, Зеленоград, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 ноября 2000 г.

Для модели нелокальной электродинамики с негладкой (кусочно-линейной) нелинейностью [6] исследована задача о точечном спектре скоростей топологических солитонов с наименьшим топологическим зарядом. Определено изменение спектра скоростей при однопараметрической деформации такой нелинейности.

PACS: 02.30.Fn, 85.25.Cr

1. В последнее время в исследованиях динамики джозефсоновских вихрей [1–6] достаточно часто используются различные кусочно-линейные аппроксимации нелинейности, определяющей зависимость джозефсоновского тока от разности фаз сверхпроводящих пар. В значительной степени это было стимулировано исследованиями динамики топологических солитонов в теории дислокаций [1]. Отметим, что ранее кусочно-линейные аппроксимации нелинейностей в волновых уравнениях широко использовались при исследованиях распространения волн в нелинейных линиях передачи сигналов [7].

На наш взгляд, наиболее интересным является направление, связанное с использованием кусочно-линейных аппроксимаций нелинейности в задачах нелокальной джозефсоновской электродинамики, представленное в работах В. П. Силина с сотрудниками [4–6]. При таком подходе возможен сравнительный анализ динамики вихрей при различных моделях нелокальных эффектов (дифференциальных и интегральных).

В настоящей работе на основе простого обобщения одной из моделей нелокальной электродинамики, предложенной в [6], исследовано влияние однопараметрической деформации кусочно-линейной аппроксимации нелинейности на спектр скоростей и внутреннюю структуру 2π -кинка (топологического солитона). Такое обобщение позволяет, в частности,

проследить изменение спектра скоростей 2π -кинка при переходе от кусочно-линейных аппроксимаций нелинейности, используемых в [6, 7], к аппроксимации, используемой Обри [1] и Волковым [2].

В рассматриваемой модели с учетом нелокальных эффектов связано появление высших пространственных производных в волновом уравнении с нелинейностью, которая не является гладкой функцией. Такая ситуация требует некоторого уточнения понятий, используемых при описании решений солитонного типа (в отличие от нелинейного волнового уравнения типа Клейна–Гордона).

Например, в случае установившихся волн нелинейное волновое уравнение рассматриваемой модели приводит к динамической системе лагранжеского (или гамильтоновского) типа с двумя степенями свободы. Соответствующие уравнения движения являются локально интегрируемыми при кусочно-линейной аппроксимации потенциала. При построении полного решения (целой траектории) используются условия непрерывности самой функции и трех ее производных в точках потери гладкости потенциала. В областях локальной интегрируемости динамическая система обладает парой первых интегралов, из которых лишь один является глобальным, тогда как другой не сохраняется. А именно, второй интеграл претерпевает конечные разрывы в точках потери гладкости потенциала. Такая ситуация типична и для ряда других моделей, в которых учет нелокальных эффектов связан с возникновением конечного числа высших производных в недисси-

*E-mail: eleon@nonlin.msk.ru

**E-mail: kulagin@nonlin.msk.ru

пассивном нелинейном волновом уравнении при кусочно-линейной аппроксимации нелинейности.

Обратим внимание на неисследованную возможность отказа от условий наибольшей гладкости траектории (с заменой его условиями сохранения двух первых интегралов). В данной модели это означает непрерывность глобального решения, его первой производной и возникновение конечных разрывов для второй и третьей производных. В настоящей работе используются условия наибольшей гладкости решения.

Наконец, отметим, что при исследованиях решений солитонного типа весьма эффективным является строгий переход от задачи с асимптотическими граничными условиями на бесконечности к задаче с граничными условиями на конечном интервале, длина которого также подлежит определению. Такая возможность обусловлена кусочно-линейной аппроксимацией потенциала и была реализована нами при численных расчетах. Альтернативный подход, основанный на численном анализе трансцендентных уравнений разрешимости задачи, использовался нами лишь для контроля расчетов и построения асимптотик. Полученные результаты подтверждают ряд выводов и предположений, приведенных в работах [6, 7] при значении структурного параметра нелинейности, отвечающего выбранным в этих работах значениям.

Рассматриваемые как нами, так и в цитируемых работах проблемы влияния нелокальных взаимодействий и негладких нелинейностей на динамику топологических солитонов представляют интерес не только для джозефсоновской электродинамики, но и для других областей физики нелинейных явлений. По этой причине при изложении используются простейшие понятия теории динамических систем с несколькими степенями свободы, широко используемые в теории солитонов.

Такой подход позволяет, в частности, связать описание влияния черенковского захвата волн на структуру 2π -кинка, данное в [4–6], с временной принадлежностью траектории топологического солитона (2π -кинка) тору в четырехмерном фазовом пространстве. Для гладкой траектории реализация такой возможности в рассматриваемой модели связана с разрывом одного из первых интегралов в точке потери гладкости нелинейности.

2. В качестве исходной модели рассмотрим следующее обобщение нелинейного волнового уравнения:

$$\ell^4 u_{xxxx} + \ell_0^2 \left(u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right) + f(u) = 0. \quad (1)$$

Здесь ℓ , ℓ_0 и c — характерные длины и скорость. Для решений вида $u(x, t) = u(x - vt)$ уравнение (1) может быть записано в форме

$$\varepsilon u_{xxxx} + u_{xx} + f(u) = 0. \quad (2)$$

Здесь параметр ε определен соотношением

$$\varepsilon = \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-2}, \quad (3)$$

а преобразование независимой переменной определено соотношением

$$x \rightarrow x \ell_0^{-1} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

Уравнение (2) является уравнением Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} \right) = 0, \quad (4)$$

для функции Лагранжа $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_x, u_{xx})$ имеем

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \varepsilon u_{xx}^2 + \frac{1}{2} u_x^2 - U(u), \quad U(u) = \int f(u) du. \quad (5)$$

Отметим, что в рассматриваемой модели нелокальные эффекты приводят к зависимости функции Лагранжа от высших производных.

Определив канонические переменные (q_1, q_2, p_1, p_2) соотношениями (см., например [8])

$$q_1 = u,$$

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} \right) = u_x + \varepsilon u_{xxx}, \quad (6)$$

$$q_2 = u_x, \quad p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} = -\varepsilon u_{xx},$$

приходим к записи уравнения (2) в форме уравнений Гамильтона:

$$\frac{dq_1}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = q_2, \quad \frac{dp_1}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad (7)$$

$$\frac{dq_2}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = -\frac{1}{\varepsilon} p_2, \quad \frac{dp_2}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -p_1 + q_2$$

с функцией Гамильтона

$$H = p_1 q_2 - \frac{1}{2\varepsilon} p_2^2 - \frac{1}{2} q_2^2 + U(q_1), \quad (8)$$

линейно зависящей от импульса p_1 .

Для случая, когда $f(u)$ является кусочно-линейной функцией (рис. 1):

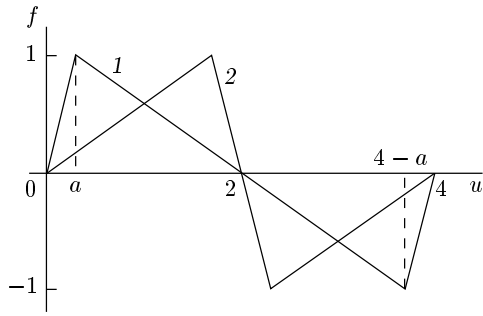


Рис. 1. Зависимость $f(u)$ для значений параметра $a \gtrsim 0$ (кривая 1) и $a \lesssim 2$ (кривая 2)

$$f(u) = \begin{cases} -\frac{1}{a}u, & u \in [0, a), \\ -\frac{2-u}{2-a}, & u \in [a, 4-a), \\ -\frac{1}{a}(u-4), & u \in [4-a, 4] \end{cases} \quad (9)$$

или ее периодическим продолжением ($f(u+4) = f(u)$), уравнение (2) может быть проинтегрировано на каждом из трех указанных выше промежутков линейности функции $f(u)$ или их сдвигов на период. Более того, на каждом из этих промежутков уравнение (2) имеет два первых интеграла:

$$I_1 = \varepsilon u_{xxx} u_x - \frac{1}{2} \varepsilon u_{xx}^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + U(u), \quad (10)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \varepsilon u_{xxx}^2 + \frac{1}{2} u_{xx}^2 + V(u, u_x, u_{xx}).$$

Здесь

$$U(u) = \begin{cases} -\frac{1}{2a}u^2, & u \in [0, a), \\ \frac{(2-u)^2}{2(2-a)} - 1, & u \in [a, 4-a), \\ \frac{1}{2a}(4-u)^2, & u \in [4-a, 4], \end{cases} \quad (11)$$

$$V(u, u_x, u_{xx}) = \begin{cases} -\frac{1}{a} u u_{xx} + \frac{1}{2a} u_x^2, & u \in [0, a), \\ -\frac{2-u}{2-a} u_{xx} - \frac{u_x^2}{2(2-a)}, & u \in [a, 4-a), \\ \frac{4-u}{a} u_{xx} - \frac{1}{2a} u_x^2, & u \in [4-a, 4]. \end{cases} \quad (12)$$

Доопределяя решение в точках излома функции $f(u)$ условиями непрерывности функции $u(x)$ и ее производных u_x, u_{xx}, u_{xxx} , находим, что первый интеграл I_1 сохраняет свое значение во всех трех промежутках линейности функции $f(u)$. Это означает, что I_1 — глобальный первый интеграл. Однако первый интеграл I_2 терпит разрывы в точках $u = a$ и $u = 4 - a$. А именно,

$$I_2|_{u=a+} - I_2|_{u=a-} = -\frac{1}{a(2-a)} u_x^2(a),$$

$$I_2|_{u=(4-a)+} - I_2|_{u=(4-a)-} = \frac{1}{a(2-a)} u_x^2(4-a). \quad (13)$$

Здесь $a_{\pm} = a \pm 0$.

В канонических переменных (q_1, q_2, p_1, p_2) выражения для первых интегралов (10)–(12) принимают вид

$$I_1 = H = p_1 q_2 - \frac{1}{2\varepsilon} p_2^2 - \frac{1}{2} q_2^2 + U(q_1), \quad (14)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\varepsilon} (p_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} p_2^2 + V(q_1, q_2, p_2).$$

Здесь

$$V(q_1, q_2, p_2) = \begin{cases} -\frac{1}{a\varepsilon} q_1 p_2 + \frac{1}{2a} q_2^2, & u \in [0, a), \\ \frac{2-q_1}{\varepsilon(2-a)} p_2 - \frac{6q_2^2}{2(2-a)}, & u \in [a, 4-a), \\ \frac{4-q_1}{a\varepsilon} p_2 - \frac{1}{2a} q_2^2, & u \in [4-a, 4], \end{cases} \quad (15)$$

а разрывы локального первого интеграла I_2 определяются выражениями

$$I_2|_{q_1=a+} - I_2|_{q_1=a-} = -\frac{1}{a(2-a)} q_2^2(a),$$

$$I_2|_{q_1=(4-a)+} - I_2|_{q_1=(4-a)-} = \frac{1}{a(2-a)} q_2^2(4-a). \quad (16)$$

Приведенные выше выражения для первых интегралов (I_1, I_2) и разрывов локального интеграла I_2 могут быть легко обобщены на случай иных кусочно-линейных аппроксимаций нелинейности $f(u)$.

Например, следующей двухпараметрической кусочно-линейной аппроксимации $f(u)$:

$$f(u) = \begin{cases} -\frac{(4-a)u}{ab}, & u \in [0, a), \\ \frac{(4-a+b)u-4b}{b(b-a)}, & u \in [a, b), \\ \frac{4-u}{4-b}, & u \in [b, 4], \end{cases} \quad (17)$$

удовлетворяющей так же, как и нелинейность (9), условию

$$\int_0^4 f(u)du = 0, \quad (18)$$

благодаря которому состояния равновесия $u = 0$ и $u = 4$ находятся в одном уровне глобального первого интеграла I_1 .

3. Для уравнений (2), (9) рассмотрим задачу о топологическом солитоне, определенную условиями

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u = 4. \quad (19)$$

С точки зрения динамической системы гамильтоновского типа (7), (8), (11) такая задача отвечает задаче [9] определения в фазовом пространстве $\{(q_1, q_2, p_1, p_2)\}$ гетероклинической траектории, двоякоасимптотической к состояниям равновесия $O_0(0, 0, 0, 0)$ и $O_4(4, 0, 0, 0)$, являющимся в рассматриваемом случае особыми точками типа седло-центр. Обратим внимание на то, что поиск таких траекторий осуществляется в пространстве динамических систем [9], нумеруемых в данном случае значениями структурных параметров (ε, a) . В случае, когда $f(u)$ — периодическая функция, решениям такой задачи отвечают топологические солитоны с наименьшим топологическим зарядом (аналоги 2π -кинков). Для $u \in [0, a]$ и $u \in [4 - a, 4]$ находим, что при $x \in (-\infty, 0]$

$$\begin{aligned} q_1(x) &= u(x) = a \exp\{kx\}, \\ q_2(x) &= u_x = kq_1, \\ p_1(x) &= u_x + \varepsilon u_{xxx} = (1 + \varepsilon k^2)kq_1, \\ p_2(x) &= -\varepsilon u_{xx} = -\varepsilon k^2 q_1 \end{aligned} \quad (20)$$

и при $x \in [l, +\infty)$

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 4 - a \exp\{k(x-l)\}, \\ q_2(x) &= k(4 - q_1), \\ p_1(x) &= (1 + \varepsilon k^2)k(4 - q_1), \\ p_2(x) &= \varepsilon k^2(4 - q_1). \end{aligned} \quad (21)$$

В этих выражениях

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\sqrt{1 + \frac{4\varepsilon}{a}} - 1 \right), \\ q_1(0) &= u(0) = a, \quad q_1(l) = u(l) = 4 - a. \end{aligned} \quad (22)$$

На отрезке $q_1 \in [a, 4 - a]$ решение имеет вид

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 2 + a_+ \sin(k_+ x + \alpha_+) + \\ &\quad + a_- \sin(k_- x + \alpha_-), \\ q_2(x) &= k_+ a_+ \cos(k_+ x + \alpha_+) + \\ &\quad + k_- a_- \cos(k_- x + \alpha_-), \\ p_1(x) &= \varepsilon k_+ k_- (k_- a_+ \cos(k_+ x + \alpha_+) + \\ &\quad + k_+ a_- \cos(k_- x + \alpha_-)), \\ p_2(x) &= \varepsilon (k_+^2 a_+ \sin(k_+ x + \alpha_+) + \\ &\quad + k_-^2 a_- \sin(k_- x + \alpha_-)). \end{aligned} \quad (23)$$

для $x \in [0, l]$. Здесь

$$k_{\pm}^2 = \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon}{2-a}} \right). \quad (24)$$

По-существу, исходная задача (19) на прямой $x \in (-\infty, +\infty)$ сводится к переопределенной краевой задаче на интервале $u \in [a, 4 - a]$, зависящей от двух структурных параметров (ε, a) . Действительно, согласно выражениям (23), неизвестные амплитуды a_{\pm} , фазы α_{\pm} и l (неизвестная протяженность области возможных осцилляций функции $u(x)$ и ее производных u_x, u_{xx}, u_{xxx}) подчинены четырем условиям на каждой из внутренних границ (т.е. при $x = 0$ и $x = l$). При этом граничные условия зависят от структурных параметров (ε, a) . В фазовом пространстве $\{(q_1, q_2, p_1, p_2)\}$ выражения (23) определяют отрезок траектории, принадлежащей тору, который должен быть склеен (по непрерывности) с полутраекториями, определенными выражениями (20), (21). При этом длина отрезка траектории, принадлежащей тору, заранее не известна.

Следствием выражений (23) являются четыре соотношения

$$\begin{aligned} (k_{\pm} a_{\pm})^2 &= \\ &= \frac{k_{\pm}^2 (p_2 - (q_1 - 2)k_{\mp}^2)^2 + (p_1 - q_2 \varepsilon k_{\pm}^2)^2}{\varepsilon^2 (k_+^2 - k_-^2)^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(k_{\pm} x + \alpha_{\pm}) &= -k_{\pm} \frac{p_2 - (q_1 - 2)\varepsilon k_{\mp}^2}{p_1 - q_2 \varepsilon k_{\pm}^2} \equiv \\ &\equiv \Delta_{\pm}(q_1, q_2, p_1, p_2). \end{aligned} \quad (26)$$

Соотношения (25) определяют пару локальных первых интегралов в области фазового пространства, выделенной неравенствами $a < q_1 < 4 - a$. Этими интегралами являются постоянные амплитуды a_{\pm} . Очевидно, что a_{\pm} должны быть функциями первых интегралов I_1, I_2 и структурных параметров ε, a . Нетрудно показать, что действительно

$$\frac{1}{2}k_{\pm}^2 a_{\pm}^2 = \frac{\varepsilon}{1 - 4\varepsilon/(2 - a)} ((H + 1)k_{\mp}^2 + I_2) \quad (27)$$

Доказательство основано на сравнении выражений (25) с выражениями (14), (15), (11) при учете соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon(k_+^2 + k_-^2) &= 1, \quad \varepsilon(k_+ k_-)^2 = \frac{1}{2 - a}, \\ \varepsilon k_{\pm}^4 &= k_{\pm}^2 - \frac{1}{2 - a}, \\ \varepsilon(k_+^2 - k_-^2) &= \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon}{2 - a}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Отметим, что

$$\frac{1}{2}k_+^2 a_+^2 + \frac{1}{2}k_-^2 a_-^2 = \frac{H + 1 + \varepsilon I_2}{1 - 4\varepsilon/(2 - a)}. \quad (29)$$

Для полутраекторий (20), (21) постоянные первых интегралов $I_1 = H$, I_2 равны нулю. Так как H — глобальный первый интеграл, то в выражениях (27) $H = 0$ для искомого траекторий. Значение постоянной локального первого интеграла I_2 определяется условиями разрывов (14), приводящими к тому, что $I_2 = -ak^2/(2 - a)$ на внутреннем промежутке $[a, 4 - a]$. Следовательно, для искомого траекторий выражения (27) принимают вид

$$\frac{1}{2}k_{\pm}^2 a_{\pm}^2 = \frac{\varepsilon}{1 - 4\varepsilon/(2 - a)} \left(k_{\mp}^2 - \frac{ak^2}{2 - a} \right). \quad (30)$$

Условия склеивания решений внутренней краевой задачи с внешней приводят, согласно (26), к четырем соотношениям:

$$\text{tg}(\alpha_{\pm}) = \delta_{\pm}(\varepsilon, a), \quad \text{tg}(k_{\pm}l + \alpha_{\pm}) = -\delta_{\pm}(\varepsilon, a), \quad (31)$$

здесь

$$\begin{aligned} \delta_{\pm}(\varepsilon, a) &= k_{\pm} \frac{ak^2 - (2 - a)k_{\mp}^2}{(k^2 + k_{\mp}^2)ka} = \\ &= \Delta_{\pm}(q_1, q_2, p_1, p_2)|_{q_1=a}. \end{aligned} \quad (32)$$

Предполагая возможность проворота фазовых переменных решения на длине ℓ , запишем соотношения (31) в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm} &= \arctg \delta_{\pm}(\varepsilon, a), \\ \alpha_{\pm} + k_{\pm}l &= -\arctg \delta_{\pm}(\varepsilon, a) + \pi m_{\pm}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь m_{\pm} — целые числа. Соотношения (33) представляют собой переопределенную систему линейных неоднородных уравнений относительно трех неизвестных (α_{\pm}, l) . Рассматриваемая система разрешима при условии

$$\begin{aligned} k_- \left(\arctg \delta_+(\varepsilon, a) - \frac{\pi}{2} m_+ \right) &= \\ &= k_+ \left(\arctg \delta_-(\varepsilon, a) - \frac{\pi}{2} m_- \right). \end{aligned} \quad (34)$$

При выполнении этих условий внутренняя краевая задача определена на отрезке, длина которого l задается выражением

$$\begin{aligned} (k_+ k_-)l &= -k_- \left(\arctg \delta_+(\varepsilon, a) - \frac{\pi}{2} m_+ \right) - \\ &- k_+ \left(\arctg \delta_-(\varepsilon, a) - \frac{\pi}{2} m_- \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что

$$k_- \alpha_+ - k_+ \alpha_- = \frac{\pi}{2} (m_+ k_- - m_- k_+). \quad (36)$$

Таким образом, решение внутренней краевой задачи может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= 2 + a_+ \sin(k_+ x + \arctg \delta_+) + \\ &+ a_- \sin(k_- x + \arctg \delta_-). \end{aligned} \quad (37)$$

При этом значения параметров (ε, a) и пары целых четных чисел должны удовлетворять условиям разрешимости (34) и условию $l > 0$. Четность целых чисел связана с тем, что краевые условия задачи допускают возможность проворота фазовых переменных на величины кратные 2π .

Таким образом, в рассматриваемой модели фазовые полутраектории седловых особых точек O_0 и O_4 при достижении поверхности тора с параметрами (a_+, a_-) , (k_+, k_-) склеиваются (по непрерывности фазовой траектории) с фрагментом траектории, принадлежащей тору. Это достигается ценой конечного разрыва дополнительного первого интеграла. Такая простая и наглядная интерпретация возникающей при этом внутренней структуры топологического солитона возможна лишь в негладких (кусочно-линейных) динамических системах. Для случая гладкой нелинейности $f(u)$ ситуация является более сложной. А именно, неясно, какие виды гладких нелинейностей $f(u)$ могут приводить к решениям типа топологических солитонов, обладающих внутренней структурой и заданным топологическим зарядом. Более подробно этот вопрос обсуждается в [10] и в цитируемых там работах.

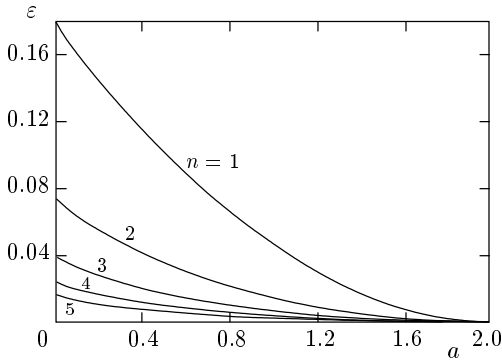


Рис. 2. Зависимость собственных значений ε от параметра a для первых пяти мод

4. Приведем результаты численного анализа задачи о топологических солитонах (19). При численном анализе краевые условия при $x = 0$ были взяты в качестве начальных условий задачи Коши и интегрирование (при произвольных значениях параметров ε, a) проводилось до попадания траектории на плоскость симметрии $u = 2$ при $u_{xx} = 0$. Это означает, что на плоскости симметрии выделялись точки, отвечающие точкам перегиба функции $u(x; \varepsilon, a)$. Далее траектория продолжалась до $x = l$ по симметрии задачи.

Для значений структурного параметра $a \in [0, 2]$ точечный спектр параметра $\varepsilon_n(a)$ и соответствующие собственные функции $u_n(x; a)$ были определены для $n = 1, 2, \dots, 10$. Более полно были рассмотрены значения $a \ll 1, a \sim 1$ и $a \sim 2$.

Общая картина изменения точечного спектра $\varepsilon_n(a)$ при изменении параметра a (деформации нелинейности $f(u, a)$) изображена на рис. 2. При возрастании параметра a все собственные значения $\varepsilon_n(a)$ убывают и при $a \rightarrow 2$ стремятся к своему предельному значению $\varepsilon = 0$.

С точки зрения исходного волнового уравнения (1) точечному спектру $\varepsilon_n(a)$ отвечает точечный спектр скоростей

$$v_n = c \left(1 - \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^2 \varepsilon_n^{-1/2}(a) \right)^{1/2} \quad (38)$$

семейства топологических солитонов, характеризующихся собственными функциями (модами) $u_n(x; \varepsilon_n, a)$. При фиксированных значениях параметров ($\ell/\ell_0 < 1, a$) скорости солитонов при возрастании номера моды n убывают (в силу убывания $\varepsilon_n(a)$ при увеличении n). Далее, существует наибольшее значение $n_c = n(\ell/\ell_0, a)$, отвечающее нижней границе спектра скоростей, не равной нулю

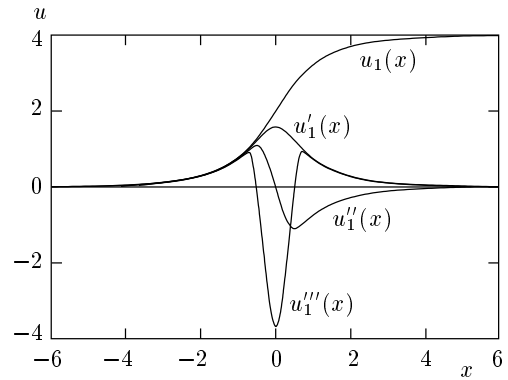


Рис. 3. Графики первой собственной функции $u_1(x)$ и ее трех производных, u'_1, u''_1, u'''_1 , для $a = 1$. Собственное значение $\varepsilon = 0.047$

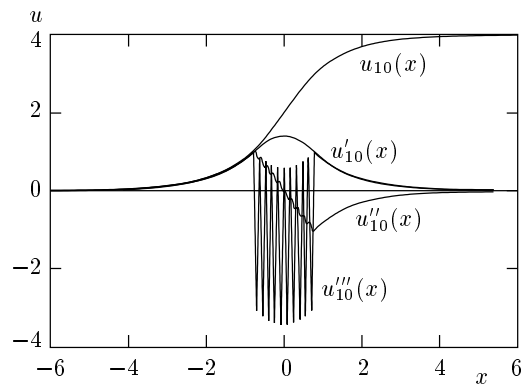


Рис. 4. Графики десятой собственной функции $u_{10}(x)$ и ее трех производных, $u'_{10}, u''_{10}, u'''_{10}$, для $a = 1$. Собственное значение $\varepsilon = 0.00062$

в общем случае. При фиксированном значении параметра нелокальности ℓ/ℓ_0 возрастание параметра a приводит к уменьшению скорости солитонов и числа мод. Для каждой из мод существует свое критическое значение параметра $a_c = a_c(\ell/\ell_0, n)$, при достижении которого скорость солитона обращается в нуль. При $\ell/\ell_0 \ll 1$ очевидно, что $a_c \sim 2$.

При $a = 1$ спектр собственных значений при $n > 1$, найденный численно, с высокой степенью точности определяется выражением $1/4\sqrt{\varepsilon_n} = n$, которое возникает при анализе условий разрешимости задачи в пределе $\varepsilon \ll 1$.

На рисунках 3, 4 приведены графики зависимостей $u_n(x), (u_n(x))_x, (u_n(x))_{xx}, (u_n(x))_{xxx}$ для $n = 1$ ($\varepsilon_1 = 0.047$) и $n = 10$ ($\varepsilon_{10} = 0.00062$) для $a = 1$. Сравнение рисунков показывает, что при переходе от первой моды к десятой собственная функция и ее производная сохраняют внешне свой простой вид,

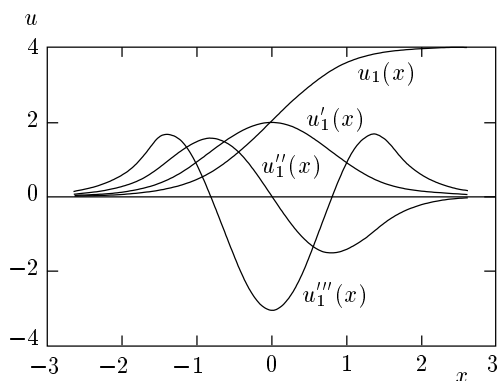


Рис. 5. Графики первой собственной функции $u_1(x)$ и ее трех производных, $u_1'(x)$, $u_1''(x)$, $u_1'''(x)$, для $a = 0.1$. Собственное значение $\varepsilon = 0.160$

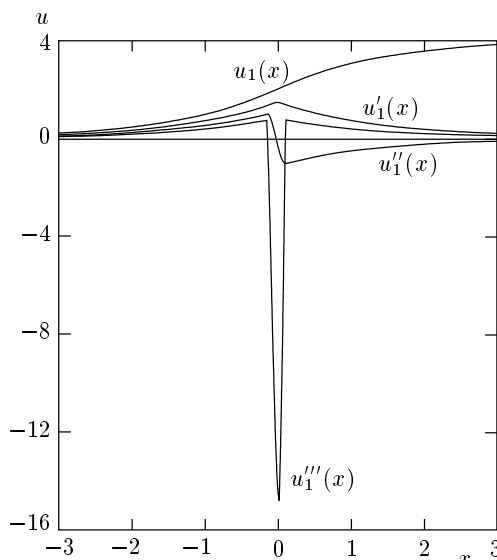


Рис. 8. Графики первой собственной функции $u_1(x)$ и ее трех производных, $u_1'(x)$, $u_1''(x)$, $u_1'''(x)$, для $a = 1.8$. Собственное значение $\varepsilon = 0.001992$

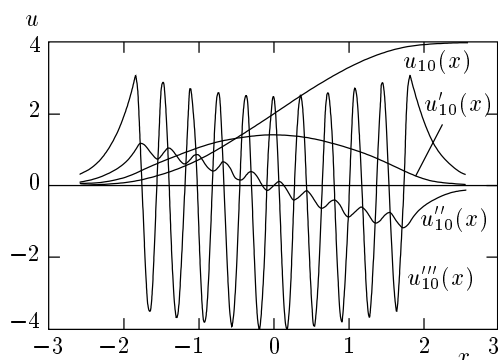


Рис. 6. Графики десятой собственной функции $u_{10}(x)$ и ее трех производных, $u_{10}'(x)$, $u_{10}''(x)$, $u_{10}'''(x)$, для $a = 0.1$. Собственное значение $\varepsilon = 0.0034$

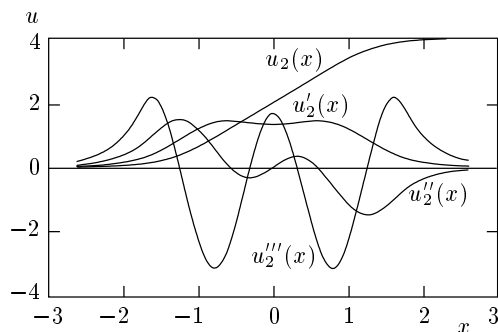


Рис. 7. Графики второй собственной функции $u_2(x)$ и ее трех производных, $u_2'(x)$, $u_2''(x)$, $u_2'''(x)$, для $a = 0.1$. Собственное значение $\varepsilon = 0.063$

но вторая и третья производные собственных функций $u_1(x)$ и $u_{10}(x)$ существенно отличаются друг от друга. А именно, при переходе к высшим модам на почти неизменной длине возникает все более сложная мелкомасштабная структура (в частно-

сти, мелкомасштабные осцилляции третьей производной, характерная амплитуда которых слабо изменяется при переходе от низших мод к высшим).

На рисунках 5, 6 приведены графики зависимостей $u_n(x)$, $(u_n(x))_x$, $(u_n(x))_{xx}$, $(u_n(x))_{xxx}$ для $n = 1$ ($\varepsilon_1 = 0.160$) и $n = 10$ ($\varepsilon_{10} = 0.0034$) при $a = 0.1$. Общая тенденция к формированию мелкомасштабной структуры второй и третьей производных собственных функций при переходе к высшим модам сохраняется. При этом, однако, становится заметным возрастание амплитуды осцилляций третьей производной. Еще одно различие проявляется при взгляде на зависимость от x первой производной собственной функции $(u_2(x))_x$ второй моды (см. рис. 7), которая характеризуется тремя экстремальными точками. Такое поведение $(u_2(x))_x$ сохраняется и для третьей моды, исчезая из поля зрения лишь при переходе к более высоким модам.

При переходе в область значений $a \lesssim 2$ собственная функция и ее первая производная сохраняют характерный размер области локализации и свой внешне простой вид. Однако ее вторая и третья производные в малой окрестности $x = 0$ претерпевают резкие изменения (типа конечного разрыва для второй производной и δ -образного выброса — для третьей производной). Рисунок 8 иллюстрирует возникающую картину для первой собственной функции ($a = 1.8$, $\varepsilon = 0.001992$). Неясно, можно ли рассматривать такое поведение решений в области $a \lesssim 2$

как указание на существование решений с разрывом высших производных.

В заключение отметим, что рассмотренная выше простая модель нелокальной джозефсоновской электродинамики в задаче о топологическом солитоне с наименьшим топологическим зарядом (2π -кинке) действительно приводит к точечному спектру скоростей и своеобразной внутренней структуре такого солитона (вихря). Существенно, что однопараметрическая деформация кусочно-линейной функции, аппроксимирующей джозефсоновский ток, приводит в общем случае к соответствующей деформации точечного спектра скоростей и качественно той же внутренней структуре солитона. Однако неясно, сохраняется ли такая структурная устойчивость исследуемого привлекательного объекта при деформациях кусочно-линейных нелинейностей в более общих моделях (например, при учете следующих высших пространственных производных в исходном волновом уравнении или учете нелокальных эффектов в интегральной форме).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00342).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Aubry and P. J. L. Daeron, *Physica D* **7**, 240 (1983); S. Aubry, *J. Phys. C* **16**, 2497 (1983).
2. A. F. Volkov, *Physica C* **183**, 177 (1991); **192**, 306 (1992).
3. S. Sakai and H. Tatenno, *Jap. J. Appl. Phys.* **22**, 1374 (1983); S. Sakai and N. F. Pedersen, *Phys. Rev. B* **34**, 3506 (1986).
4. A. S. Malishevskii, V. P. Silin, and S. A. Uryupin, *Phys. Lett. A* **253**, 333 (1999).
5. А. С. Малишевский, В. П. Силин, С. А. Урюпин, *ЖЭТФ* **117**, 711 (2000).
6. В. П. Силин, А. В. Студенов, *ЖЭТФ* **117**, 1230 (2000).
7. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, Наука, Москва (1984).
8. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, Москва (1979).
9. Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Наука, Москва (1976). Н. В. Бутенин, Ю. И. Наймарк, Н. А. Фурфурев, *Введение в теорию нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1976).
10. G. L. Alfimov, V. M. Eleonsky, and L. M. Lerman, *Chaos* **8**, 257 (1998).