ЖЭТФ, 2001, том 119, вып. 5, стр. 995–1000

ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА СОЛИТОНА ДИСКРЕТНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

А. М. Косевич*

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина
Национальной академии наук Украины
61164, Харьков, Украина

Max-Plank-Institut für Physik Komplexer Systeme
D01187, Dresden, Germany

Поступила в редакцию 28 сентября 2000 г.

Сформулированы уравнения Гамильтона в терминах коллективных переменных, описывающих динамику солитона интегрируемого нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) на $1D$-решетке. Ранее подобные уравнения движения были предложены для солитона НУШ в частных производных. Дано определение оператора количества движения солитона в дискретной цепочке, естественным образом связанного со скоростью центра тяжести солитона. Полученные уравнения Гамильтона подобны таковым в случае континуального НУШ, однако роль полевого импульса выполняет суммарный квазиимпульс виртуальных элементарных возбуждений изучаемой системы, связанных с солитоном.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Yv

1. ВВЕДЕНИЕ

Ряд важных для физических приложений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), уравнения Ландау–Лифшица в динамике намагниченности и др.) обладают так называемыми динамическими солитонами. Под динамическим солитоном понимается нелинейное пространственно локализованное возмущение изучаемой системы, стабильность которого обеспечивается наличием простых аддитивных интегралов движения. Динамика солитона НУШ подробно описана как при его свободном движении (см., например, [1]), так и во внешнем поле [2]. Не менее подробно изложена динамика магнитного динамического солитона [3, 4].

Движение динамического солитона обычно характеризуется скоростью перемещения его центра тяжести V и внутренней собственной частотой ω (частотой прецессии в случае магнитного солитона) в лабораторной системе отсчета. Этим двум механическим характеристикам солитона можно поставить в соответствие два интеграла движения: полевой импульс солитона (количество движения) P и его массу (количество связанных в солитоне виртуальных элементарных возбуждений изучаемой системы — квазичастиц) N. Замечательным свойством солитона как частицеподобного возбуждения является наличие важного соотношения между указанными интегралами движения, параметрами V, ω и энергией солитона E. Если выразить энергию E через интегралы движения (полный импульс и массу) как независимые динамические переменные, то малые изменения величин P, N и E будут связаны соотношением [2, 3]

$$\delta E = V\delta P + \Omega\delta N, \tag{1}$$

где Ω — частота солитона в системе отсчета, движущейся со скоростью V (постоянная Планка принята равной единице); если фаза солитона имеет вид $kx - \omega t$, то $\Omega = \omega - kV$.

В этом соотношении энергия свободного движения солитона, т. е. его кинетическая энергия, выступает в роли функции Гамильтона. Из (1) следуют уравнения движения

$$V = \frac{\partial E}{\partial P}, \quad \Omega = \frac{\partial E}{\partial N}. \tag{2}$$

*E-mail: kosevich@ilt.kharkov.ua

Первое соотношение в (2) есть обычное гамильтоново уравнение движения, а второе определяет физический смысл величины Ω: энергия солитона $E(P,N)$ увеличивается на $\Omega(P,N)$ при возрастании числа связанных квазичастиц в солитоне на единицу.

Мы намерены обобщить гамильтоново описание солитонов на динамику частицеподобных решений (солитонов) нелинейных дискретных уравнений на решетке, т. е. конечноразностных, а не дифференциальных уравнений. Нетривиальность такого обобщения связана с тем, что один из использованных выше интегралов движения, а именно полевой импульс солитона, связан с континуальностью изучавшихся систем и не имеет смысла в дискретной периодической решетке. Поэтому возникает проблема определения интеграла движения, сопряженного скорости солитона V. Мы покажем, как вводится и какой физический смысл имеет соответствующий интеграл движения.

Одно из простейших и хорошо изученных на предмет солитонной динамики нелинейных дифференциальных уравнений — это НУШ — полностью интегрируемое уравнение. Однако переход от континуального НУШ к дискретному (решеточному) неоднозначен. Если стартовать от модели типа сильной связи, то дискретным аналогом уравнения Шредингера (с учетом нелинейного члена) следовало бы считать следующее уравнение:

$$i\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = 2\Psi_n - \Psi_{n+1} - \Psi_{n-1} - 2g|\Psi_n|^2\Psi_n. \qquad (3)$$

Аналог именно такого уравнения используется в нелинейной оптике системы параллельных световодов [5]. К сожалению, уравнение (3) не является полностью интегрируемым и не имеет точных солитонных решений типа солитона континуального НУШ. Однако существует точно интегрируемая версия нелинейного уравнения Шредингера на решетке [6–8]:

$$i\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = (\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1})(1+|\Psi_n|^2) + \omega_0\Psi_n. \qquad (4)$$

Использованный в записи (4) сдвиг частоты $\omega_0 + 2$ несуществен, и мы выполнили его для удобства ссылок на публикацию [8], где это уравнение обсуждается с интересной для нас точки зрения.

Линеаризованное уравнение имеет закон дисперсии

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon(k), \quad \varepsilon(k) = -2\cos k, \qquad (5)$$

определяющий спектр элементарных возбуждений, отвечающий интервалу частот ($\omega_0 - 2 < \omega < \omega_0 + 2$).

Уравнение (4) обладает решением типа динамического солитона [6] и позволяет реализовать программу вывода гамильтоновых уравнений движения для такого солитона.

2. МЕХАНИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Уравнение (4) имеет два аддитивных интеграла движения: упомянутый выше интеграл

$$N = \sum_n \ln(1+|\Psi_n|^2), \qquad (6)$$

играющий роль нормы волновой функции и определяющий число связанных с солитоном элементарных возбуждений, и интеграл $\mathcal{H}$, определяемый как

$$\mathcal{H} = E + \omega_0 N, \quad E = -\sum_n (\Psi_n\Psi^*_{n+1} + \Psi^*_n\Psi_{n+1}). \qquad (7)$$

Последний может рассматриваться как гамильтониан системы.

Гамильтониан (7) порождает уравнение (4) согласно обычному определению

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = \{\mathcal{H},\, \Psi_n\}, \qquad (8)$$

но скобки Пуассона $\{\ldots,\ldots\}$ здесь определяются нестандартным образом:

$$\{\Psi_m,\, \Psi^*_n\} = i(1+|\Psi_n|^2)\delta_{mn},$$

$$\{\Psi_m,\, \Psi_n\} = \{\Psi^*_m,\, \Psi^*_n\} = 0.$$

Учтем теперь основное свойство дискретной цепочки — ее периодичность. В бесконечной однородной цепочке, благодаря трансляционной периодичности, существует очевидная симметрия, связанная со смещением на период решетки, т. е. с переходом $n \to n+1$. Обозначим через T оператор такого смещения:

$$T\Psi_n = \Psi_{n+1}. \qquad (9)$$

Его собственные функции e^{ikn} отвечают собственным значениям e^{ik} ($-\pi < k < \pi$), где k — квазиволновое число.

Оператор T порождает дополнительный аддитивный интеграл движения

$$\sum_n \Psi^*_n T\Psi_n,$$

который удобно представить в виде

$$S = -i\sum_n \left[\Psi_n^*(\Psi_{n+1}-\Psi_n) - \Psi_n(\Psi_{n+1}^*-\Psi_n^*)\right] = \\ = -i\sum_n(\Psi_n^*\Psi_{n+1} - \Psi_n\Psi_{n+1}^*) = \\ = -i\sum_n \Psi_n^*(\Psi_{n+1}-\Psi_{n-1}). \quad (10)$$

Заметим, что величина $j_n = -i\left[\Psi_n^*(\Psi_{n+1}-\Psi_n) - \Psi_n(\Psi_{n-1}^*-\Psi_n^*)\right]$ в дискретной цепочке есть аналог плотности потока частиц в сплошной среде. Поэтому S имеет смысл полного количества движения в возбужденной цепочке.

Ясно, что определения конечных интегралов движения (6), (7) и (10) относятся к любому локализованному в пространстве решению уравнения (4), однако нас будет интересовать их использование для описания динамики отдельного солитона.

Рассмотрим стационарное решение уравнения (4) типа

$$\Psi_n(t) = \Phi_n^\omega(t)\exp(ikn - i\omega t - i\theta), \quad (11)$$

где $\Phi_n^\omega(t)$ — вещественная функция, θ — постоянная произвольная фаза. Функция Φ_n и соотношение между ω и k определяются двумя вещественными уравнениями:

$$(\omega_0-\omega)\Phi_n = \cos k(\Phi_{n+1}+\Phi_{n-1})(1+\Phi_n^2), \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln(1+\Phi_n^2) = -2\sin k\Phi_n(\Phi_{n+1}-\Phi_{n-1}). \quad (13)$$

Солитонным решениям отвечает функция Φ_n, исчезающая на бесконечности: $\Phi_n = 0$ при $n\to\pm\infty$. Интегралы движения N, E и S зависят как от вида функции Φ_n, так и от величины k:

$$N = \sum_n \ln(1+\Phi_n^2), \quad (14)$$

$$E = -2\cos k\sum_n \Phi_n\Phi_{n+1}, \quad (14а)$$

$$S = 2\sin k\sum_n \Phi_n\Phi_{n+1}. \quad (14б)$$

Рассмотрим малые изменения интегралов движения, связанные с малыми вариациями волновой функции Ψ, т. е. с малыми вариациями Φ_n и малыми изменениями волнового числа k. Из (12) и (14) следует

$$(\omega_0-\omega)\delta N = \cos k\sum_n(\Phi_{n+1}+\Phi_{n-1})\delta\Phi_n. \quad (15)$$

Аналогично из (14а), (14б), (15), а также из (7) следует

$$\delta\mathcal{H} = \omega\delta N + S\delta k. \quad (16)$$

Видно, что основные параметры решения (11) ω и k связаны двумя динамическими уравнениями Гамильтона

$$\omega = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial N} = \omega_0 + \frac{\partial E}{\partial N}, \quad S = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial k} = \frac{\partial E}{\partial k}, \quad (17)$$

если рассматривать гамильтониан как функцию независимых переменных N и k: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(N,k)$. Заметим, что выводы как соотношений (14)–(14б), так и уравнений движения (17) не связаны явно с полной интегрируемостью исходного нелинейного уравнения, но предполагают, что бесконечные суммы в (14)–(14б) сходятся, т. е. что это уравнение обладает решением или решениями, исчезающими на бесконечности. В частности, предполагается наличие динамического солитона, другими словами, предполагается, что существует локализованное в пространстве динамическое решение типа (11), не сопровождающееся излучением волн малой амплитуды типа фононов. Такие решения неизвестны для дискретных нелинейных уравнений, не обладающих полной интегрируемостью. Именно поэтому мы обращаемся к уравнению (4).

3. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА В ТРАДИЦИОННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Трактуя динамический солитон как частицеподобное возбуждение с внутренней колебательной модой, хотелось бы иметь уравнения движения для традиционной пары канонических переменных, одной из которых является скорость центра тяжести солитона.

Если уравнение (4) имеет стационарное локализованное решение, перемещающееся вдоль цепочки со скоростью V, то следует ожидать, что как и в ситуации с континуальным нелинейным уравнением Шредингера его вещественная амплитуда имеет вид

$$\Phi_n(t) = \Phi(n - Vt). \quad (18)$$

Действительно, такое решение существует [8]:

$$\Phi(x) = A\,\mathrm{cn}\left[\beta(x-x_0),\kappa\right], \quad (19)$$

где $A = \mathrm{const}$, а $\mathrm{cn}(z,\kappa)$ — эллиптический косинус Якоби, параметр которого κ лежит в интервале $0<\kappa<1$. При $\kappa\ll 1$ эллиптический косинус переходит в тригонометрический косинус и (19) превращается в решение линейного уравнения. В обратном предельном случае ($\kappa \to 1$) имеет место переход $\mathrm{cn}(z,\kappa) \to 1/\mathrm{ch}\, z = \mathrm{sech}\, z$ и получается решение [8]

$$\Psi_n(t) = \mathrm{sh}\,\beta \mathrm{sech}\,[\beta(n - Vt - x_0)] \times \times \exp(ikn - i\omega t + i\theta), \quad (20)$$

где $x_0 = \mathrm{const}$, $\theta = \mathrm{const}$, а параметры β, V, ω и k связаны двумя формулами

$$\omega = \omega_0 - 2\,\mathrm{ch}\,\beta\cos k, \quad (21)$$

$$V = (2/\beta)\,\mathrm{sh}\,\beta\sin k. \quad (22)$$

Если солитонное решение имеет вид (20), то интегралы движения инвариантны относительно непрерывных трансляций, поэтому их можно вычислить путем интегрирования [8], заменив в (14)–(14б) суммы интегралами:

$$\sum_n \ldots = \int dn \ldots$$

Тогда окажется, что

$$N = 2\beta, \quad E = -4\,\mathrm{sh}\,\beta\cos k, \quad S = 4\,\mathrm{sh}\,\beta\sin k. \quad (23)$$

Следовательно, три из четырех параметров β, V, ω и k определяются фиксированными интегралами движения, а четвертый (квазиволновое число k) остается свободным. Видно, что ширина солитона $\lambda = 1/\beta$ определяется только величиной N, а энергия солитона и его скорость являются периодическими функциями k (как и положено в однородной периодической структуре).

Ясно, что соотношение (21) следует из первого уравнения Гамильтона (17), а второе уравнение Гамильтона вместе с (22) приводит к заключению, что

$$S = NV. \quad (24)$$

Результат (24) вполне согласуется с представлением об S как о полном количестве движения.

Наличие соотношения (24) позволяет придать гамильтоновым формулам (16) и (17) более привычный вид. Введем вместо k новую независимую переменную $P = Nk$ (суммарный квазиимпульс элементарных возбуждений, связанных с солитоном[1)]) и будем считать, что новый гамильтониан $\mathcal{E}$ есть функция независимых переменных P и N: $\mathcal{E}(N,P) = \mathcal{H}(N, P/N)$. Тогда формулы (16) и (17) заменятся на

$$\delta\mathcal{E} = \Omega\delta N + V\delta P, \\ \Omega = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial N}, \quad V = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial P}, \quad (25)$$

где Ω, как уже формулировалось в случае континуального НУШ, есть частота солитона в системе координат, движущейся со скоростью V.

Видно, что гамильтоновы уравнения для солитона дискретного НУШ в однородной цепочке по форме записи полностью совпадают с таковыми для случая континуального НУШ, однако роль полевого импульса выполняет суммарный квазиимпульс P связанных с солитоном линейных возбуждений. Такое определение P привязано к конкретному виду решения дискретного НУШ и использует определенную зависимость фазы решения от номера узла цепочки, определяющую смысл квазиимпульса k.

4. ДВИЖЕНИЕ ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

Перейдем к анализу уравнений динамики солитона в неоднородной цепочке, где не сохраняется квазиволновое число k. Предположим, что величина ω_0 слабо меняется вдоль цепочки, т. е. зависит от номера узла n. На малых интервалах длины цепочки эту зависимость можно считать линейной:

$$\omega_n = \omega_0 + \eta n. \quad (26)$$

Для удобства записи введен малый градиент η функции ω_n. Гамильтониан, порождающий уравнение (4) с ω_n типа (26), имеет вид [8]

$$\mathcal{H} = E + \sum_n \omega_n \ln(1 + |\Psi_n|^2) = \\ = E + \omega_0 N + \eta\sum_n n\ln(1 + |\Psi_n|^2), \quad (27)$$

где последнее слагаемое описывает неоднородный потенциал U, в поле которого движется солитон.

Используя представление

$$\Psi_n = \Phi_n^\omega \exp\left[i(kn - \omega t - \omega_0 t)\right],$$

записываем уравнение, обобщающее (12):

$$(\eta n - \omega)\Phi_n^\omega = \cos k(\Phi_{n+1}^\omega + \Phi_{n-1}^\omega)[1 + (\Phi_n^\omega)^2]. \quad (28)$$

1) Физический смысл полевого импульса как суммарного квазиимпульса элементарных возбуждений дискретной системы известен в динамике кристаллической решетки [9], и полученные нами соотношения подтверждают общий физический характер этого обстоятельства.

Если градиент η мал, то можно предложить приближенный метод анализа ситуации, который может быть применен и при более сложных потенциалах $U(n)$. Это так называемое адиабатическое приближение, которое хорошо оправдало себя в случае континуальных систем. Если $\eta \ll \omega_0$, то солитон чувствует только локальное постоянное значение ω_n в точке нахождения его центра. Поэтому можно считать, что его форма по-прежнему описывается решением типа (20), в котором параметры k и V слабо зависят от времени. Представим решение в виде

$$\Psi_n^0 = \Phi(n - X(t)) \exp\left[i(kn - \phi(t) - \omega_0 t\right], \qquad (29)$$

где $X(t)$ — координата центра солитона, а определения его скорости V и частоты ω очевидны:

$$V = \frac{dX}{dt}, \quad \omega = \frac{d\phi}{dt}.$$

Убедимся прежде всего в том, что неоднородный потенциал (последнее слагаемое в (27)) приводит к несохранению полного количества движения S и определяет уравнение движения квазиволнового числа k. Исходя из определения (14)–(14б) вычислим производную по времени от S:

$$\frac{dS}{dt} = \{\mathcal{H}, S\} = \eta \sum_n n\left[\Psi_n^*(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) + \right.$$
$$\left. + \Psi_n(\Psi_{n+1}^* + \Psi_{n-1}^*)\right]. \qquad (30)$$

Подставляя сюда (29) и переходя от суммирования к интегрированию, получаем

$$\frac{dS}{dt} = 2\eta \cos k \int\limits_{-\infty}^{\infty} n\Phi(n)[\Phi(n+1) - \Phi(n-1)]dn. \qquad (31)$$

Оставляя главные члены в разложении по η, можно в правой части (31) использовать решение уравнений (11) и (28), где $\omega_n = \omega_0 = \text{const}$. Используя (11) и замечая, что $(\partial\Phi/\partial t) = -V(d\Phi/dn)$, получаем

$$\frac{dS}{dt} = \eta V \operatorname{ctg} k \int\limits_{-\infty}^{\infty} n \frac{d}{dn} \ln(1 + \Phi_n^2) dn =$$
$$= -\eta V N \operatorname{ctg} k. \qquad (32)$$

В правой части (32) в соответствии с (24) имеем $NV = S$. Кроме того, ясно, что неоднородность величины ω_n не влияет на факт сохранения N как интеграла движения. С учетом последнего уравнение (32) упрощается:

$$\frac{dV}{dt} = -\eta V \operatorname{ctg} k.$$

Наконец, воспользуемся связью скорости с волновым числом (22) и получим окончательное уравнение

$$\frac{dk}{dt} = -\eta. \qquad (33)$$

Следовательно, как и должно быть в квазиклассическом приближении, квазиволновое число солитона в однородном внешнем поле линейно зависит от времени.

Преобразуем теперь неоднородный потенциал в формуле (27):

$$U(X) = \eta \int n \ln\left[1 + \Phi^2(n - X)\right] dn, \qquad (34)$$

где функция $\Phi(n)$ в принятом приближении определена формулой (19) или (20). Если учесть, что в указанном приближении $\Phi(\xi) = \Phi(-\xi)$, то

$$U(X) = \eta N X. \qquad (35)$$

Таким образом, оказывается, что полная энергия (27) представима в виде

$$\mathcal{E} = E(N, P/N) + \omega_0 N + U(X) \qquad (36)$$

и может рассматриваться как функция трех независимых переменных N, P и X. Так как в сумме (36) от времени зависят только $P = Nk$ и X, то производная от волнового числа по времени (33) играет роль одного из канонических уравнений Гамильтона

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial X}, \quad \frac{dX}{dt} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial P}. \qquad (37)$$

Динамические уравнения Гамильтона типа (37) естественно возникают в теории солитона континуального НУШ [1] и теории магнитных солитонов [3, 4].

Одним из замечательных применений уравнений движения солитона во внешних полях является описание и расчет блоховских осцилляций солитона дискретного НУШ в однородном внешнем поле [8].

Для квазиклассического описания блоховских осцилляций достаточно взять очевидное решение уравнения (33)

$$k = -\eta t \qquad (38)$$

(полагая $k = 0$ при $t = 0$) и подставить его в выражение для скорости солитона (22):

$$V = -\frac{1}{N} \operatorname{sh} \frac{N}{2} \sin \eta t, \quad N = \text{const}. \qquad (39)$$

Это и есть периодическая зависимость скорости солитона от времени в однородном внешнем поле [8, 10], определяющая блоховские осцилляции с частотой $\omega_B = |\eta|$.

Если ввести в рассмотрение в соответствии с (36) и (37) силу F, действующую на солитон,

$$F = -\frac{\partial U}{\partial X} = -\eta N,$$

то станет очевидным, что при заданной (фиксированной) силе блоховская частота $\omega_B = |F|/N$ обратно пропорциональна мощности солитона N.

Блоховские осцилляции иногда связывают с так называемой динамической локализацией движущейся во внешнем однородном поле частицы с периодической зависимостью скорости от квазиимпульса. Однако хотелось бы обратить внимание на другую сторону этого явления.

Квазиклассические осцилляции с одной частотой должны соответствовать некоторому дискретному эквидистантному спектру энергий в квантовой задаче. Действительно, такой спектр в задаче с уравнением (28) существует и проявляется в возникновении «лестницы Ванье–Штарка» (см. Приложение).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вернемся к уравнению (28). Решение уравнения (28) весьма специфическим образом зависит от параметра ω, а именно: оно является функцией переменной $z = n - \omega/\eta$. Следовательно, это решение будет одним и тем же при разных парах n и ω, удовлетворяющих требованию $z = \text{const}$. Но последнее возможно лишь при

$$\omega = m\eta, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{П.1}$$

т. е. при условии, что множество m — это набор целых чисел.

Следовательно, среди решений уравнений (13) и (28) существует система осциллирующих стационарных солитонов — это и есть серия решений, отвечающих «лестнице Ванье–Штарка» (П.1). Такие решения можно представить как

$$\Psi_n^m = \Psi_{n-m} \exp\left[ik(n-m) - i(\omega_0 + m\eta)t\right]. \tag{П.2}$$

Солитоны этой серии с различными номерами m имеют одинаковые профили со смещенными на m узлов центрами.

В заключение я хочу выразить благодарность академику В. А. Марченко за обсуждения ряда математических вопросов и М. М. Богдану за полезные дискуссии. Я благодарен за гостеприимство Институту Макса Планка физики сложных систем в Дрездене, где была завершена эта работа. Исследование выполнено при частичной поддержке INTAS (грант № 167 за 1999 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
2. A. M. Kosevich, Physica D **41**, 253 (1990).
3. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Magnetic Solitons: a New Type of Collective Excitation in Magnetically Ordered Crystals*, Soviet Scientific Reviews, Physics Reviews (1985), vol. 6, p. 161; А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова Думка, Киев (1983).
4. A. M. Kosevich, Physica D **119**, 134 (1998); А. М. Косевич, В. В. Ганн, Ф. И. Жуков, В. П. Воронов, ЖЭТФ **114**, 735 (1998).
5. A. Hasegawa, *Optical Solitons in Fibers*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
6. M. A. Ablowitz and J. F. Ladik, J. Math. Phys. **17**, 1011 (1976).
7. L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer-Verlag, Berlin (1987).
8. R. Schart and A. R. Bishop, Phys. Rev. A **43**, 6535 (1991).
9. A. M. Kosevich, *The Crystal Lattice: Phonons, Solitons, Dislocations*, Wiley-VCH, Berlin (1999).
10. D. Cai, A. R. Bishop, and N. Crönbech-Jensen, Phys. Rev. Lett. **74**, 1186 (1995).