ЖЭТФ, 2001, том 119, вып. 6, стр. 1210–1221

О ФОРМИРОВАНИИ ПОТЕНЦИАЛА УДЕРЖАНИЯ В ДВУХЭЛЕКТРОННОЙ КВАНТОВОЙ ТОЧКЕ

М. Динейхан, С. А. Жаугашева

Казахский государственный университет им. аль-Фараби
480012, Алматы, Казахстан

Р. Г. Назмитдинов*

Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова
Объединенный институт ядерных исследований
141980, Дубна, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 17 августа 2000 г.

Предложена и проанализирована модель квантовой точки для двух взаимодействующих электронов. Свойства внешней среды, определяющей характер потенциала удержания электронов, моделируются с помощью электростатического поля заряда изображений. С использованием представления гамильтониана системы в виде суммы гамильтонианов центра масс и относительного движения в рамках метода осцилляторного представления [16] получены аналитические выражения для собственных значений каждой из подсистем с учетом внешнего магнитного поля. Найдено, что относительное движение электронов ответственно за потенциал удержания, который отличается от потенциала параболического конфайнмента и зависит как от эффективной массы электрона, так и от характеристик заряда изображений.

PACS: 73.20.Dx, 73.23.-b

1. ВВЕДЕНИЕ

Прогресс в современной технологии позволяет создавать полупроводниковые наноструктуры — квантовые точки [1–3], — в которых конечное число электронов удается «запереть» в ограниченном объеме с размерами порядка атомных. При этом квантовая точка ассоциируется с квантовой ямой, образованной на границе раздела двух полупроводников конечных размеров, например GaAs и GaAlAs, вследствие разных энергетических положений запрещенных зон в этих полупроводниках. Кроме того, важную роль играют внешние контакты, позволяющие регулировать свойства квантовой ямы. Наличие дискретных уровней и даже проявление оболочечной структуры, которая была предсказана [4, 5] и экспериментально обнаружена [6] в квантовых точках, дает основание называть их искусственными атомами. Возможность контролировать и управлять свойствами квантовых точек привлекает к ним огромный интерес, так как они могут быть использованы, например, в качестве новой элементной базы для будущих компьютеров [2].

Самым простейшим образцом таких систем, в котором можно проследить существенные особенности и более сложных комплексов, является двухэлектронная квантовая точка.

Используя гипотезу о том, что эффективный потенциал удержания электронов в квантовой точке соответствует потенциалу параболического конфайнмента, удается описать [7–9] характерные особенности транспортных явлений [10] и осцилляции спина основного состояния квантовой точки в магнитном поле [11]. Однако в зависимости от условий эксперимента электронные корреляции могут существенно влиять на характер потенциала удержания. В частности, описание экспериментов с фотоизлучением [12] в квантовой точке требует введения ангармонических поправок [13] к потенциалу параболического конфайнмента. Возникает естественный вопрос о природе механизма формирования потенциала удержания в квантовой точке.

Каковы должны быть условия возникновения в

*E-mail: rashid@thsun1.jinr.ru

квантовой точке, например, потенциала параболического конфайнмента? Какие характеристики системы могут привести к подавлению ангармонизма или, наоборот, вызвать эти эффекты?

Целью данной работы является анализ механизма формирования потенциала удержания в двухэлектронной квантовой точке во внешнем постоянном магнитном поле. Внешнее напряжение, приложенное к слоистой наноструктуре, и свойства контактов различной геометрии, связывающих квантовую точку с внешней средой, — это одни из основных составляющих, которые ответственны за формирование потенциала удержания в квантовой точке в режиме кулоновской блокады [2, 3]. Мы исходим из того, что при описании механизма формирования квантовых точек малых размеров с небольшим числом электронов квантовомеханические эффекты играют существенную роль. Далее, мы предполагаем, что квантовая яма однородна по диэлектрическим свойствам, а в целом система неоднородна, и должны выполняться условия непрерывности тангенциальных производных потенциалов. Эти предположения приводят к введению эффективного положительного заряда изображений, который ассоциируется с внешними факторами.

Этот прием хорошо известен в электростатике при изучении свойств диэлектриков [14]. Таким образом, мы предполагаем, что существенную роль в формировании потенциала удержания играет потенциал изображений, обусловленный, в частности, большой разностью диэлектрических проницаемостей слоев, которые образуют квантовую точку, например вакуум и полупроводник или полупроводник и диэлектрик[1)].

Мы рассмотрим кулоновскую систему трех тел во внешнем магнитном поле, которая состоит из двух электронов и заряда изображений. Отметим, что в нашей постановке задачи заряд изображений может быть ассоциирован и с примесью в квантовой точке.

Наш анализ основан на методе осцилляторного представления [16], который был успешно применен при расчете энергетического спектра системы, управляемой кулоновским и степенным потенциалами, а также кулоновским потенциалом и потенциалом Юкавы [17]. Структура статьи следующая. В разд. 2 обсуждается гамильтониан модели трех тел, который можно разделить на гамильтониан системы центра масс и гамильтониан относительного движения. В разд. 3 дан анализ гамильтониана относительного движения. В разд. 4 приведены примеры расчета энергетического спектра двухэлектронной системы для двумерного случая на основе результатов из разд. 3. В Заключении суммированы основные результаты статьи. В Приложении даны некоторые технические детали вычислений в рамках метода осцилляторного представления.

[1)] См., например, дискуссию о роли потенциалов изображений при формировании экситонов в наноструктурах типа сверхрешеток и квантовых ям [15].

2. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Квантовую точку, содержащую небольшое число электронов, можно рассматривать как модель атома, в которой аналогом ядра является эффективный положительный заряд изображений. Наша задача — определить потенциал удержания электронов исходя из кулоновского взаимодействия между электронами и изображенным зарядом в рамках квантовомеханического формализма. Для этого рассмотрим систему трех тел с кулоновским взаимодействием во внешнем постоянном магнитном поле. Пусть m_1, m_2, m_3 — массы , а $-Z_1e$, $-Z_2e$, $-Z_3e$ — заряды частиц. Гамильтониан системы можно записать в следующем виде:

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{m_j}\left[\mathbf{P}_j+\frac{e}{c}\mathbf{A}(r_j)\right]^2+\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}-\\ -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Z_1Z_3e^2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|}-\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Z_3Z_2e^2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|}. \quad (1)$$

Здесь ε и ε_0 — относительная и абсолютная диэлектрические проницаемости, а $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — вектор-потенциал, который определяется стандартным образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{1}{2}\left[\mathbf{B}\times\mathbf{r}\right], \quad (2)$$

где $\mathbf{B}$ — напряженность внешнего магнитного поля. Введем координаты Якоби $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ и координаты системы центра масс $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1&=\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{x}+\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\mathbf{y}+\mathbf{R},\\ \mathbf{r}_2&=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{x}+\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\mathbf{y}+\mathbf{R},\\ \mathbf{r}_3&=-\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3}\mathbf{y}+\mathbf{R}.\end{aligned} \quad (3)$$

В квантовых точках потенциал удержания характеризуется достаточно сильным запиранием по одной из трех (x, y или z) координатных осей. В результате низколежащие квантовые возбуждения определяются свойствами потенциала запирания по оставшимся двум осям. Следовательно, с геометрической точки зрения, квантовые точки можно рассматривать как эффективные двумерные системы. Внешнее магнитное поле можно сориентировать, например, в плоскости, перпендикулярной плоскости квантовой точки. Предположим, что пересечение этих плоскостей является линейным и направляется только по $\mathbf{x}$, или $\mathbf{A}(y) = 0$. Учитывая это допущение, после ряда упрощений гамильтониан (1) можно разделить на две части: гамильтониан системы центра масс

$$H_{cm} = \frac{1}{2}\mathbf{P}_Q^2 + \frac{\hbar^2}{4}\frac{m^*}{m_t}\omega_c^2\rho_Q^2 + \frac{m^*}{2m_t}\hbar\omega_c L_z \tag{4}$$

и гамильтониан относительного движения

$$\begin{aligned} H_{rm} = \frac{1}{2M}\mathbf{P}_x^2+\frac{1}{2\mu}\mathbf{P}_y^2+m^*\frac{\rho_x^2}{16}\omega_c^2+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Z_1Z_2}{|\mathbf{x}|}- \\ -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Z_1Z_3}{|\mathbf{y}+\mathbf{x}/2|}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Z_2Z_3}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}/2|}+\frac{1}{2}\hbar\omega_c L_{x_z}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\omega_c = eB/cm^*$ — циклотронная частота, $m_1 = m_2 = m^*$ — эффективная масса электрона и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} & M = \frac{1}{2}m^* = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}, \quad \mu = \frac{(m_1+m_2)m_3}{m_t}, \\ & m_t = m_1+m_2+m_3, \quad \mathbf{Q} = \frac{\sqrt{m_t}}{\hbar}\mathbf{R}, \\ & \rho_Q^2 = Q_1^2+Q_2^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Вследствие наличия магнитного поля каждый гамильтониан содержит проекции углового момента $\mathbf{L} = -i\hbar[\mathbf{r}\times\Delta_r]$ на ось z в собственных системах координат. Соответственно, операторы L_{x_z} и L_z являются проекциями углового момента в системах координат относительного движения ($\mathbf{r}\equiv\mathbf{x}$) и центра масс ($\mathbf{r}\equiv\mathbf{Q}$).

Отметим, что кулоновское взаимодействие не дает вклада в гамильтониан движения центра масс (4). Решения для гамильтониана центра масс при наличии потенциала параболического конфайнмента впервые обсуждались Фоком и хорошо известны в литературе как уровни Фока–Дарвина [18]. Однако в рассматриваемом случае, когда мы не предполагаем априори существования потенциала удержания, например потенциала параболического конфайнмента, собственные значения гамильтониана центра масс имеют вид

$$E_{NM} = (2N+|M|+1)\sqrt{\frac{m^*}{2m_t}}\hbar\omega_c + \frac{m^*}{2m_t}M\hbar\omega_c, \tag{7}$$

где $N = 0,1,2,\ldots$ — радиальное квантовое число и $M = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ — квантовое число углового момента. В отличие от решений Фока–Дарвина, которые зависят от потенциала параболического конфайнмента и циклотронной частоты, энергетический спектр движения центра масс в нашей модели определяется кинетической энергией электронов, т. е. только циклотронной частотой, и зависит от отношения эффективной массы электрона к сумме масс составляющих систем. Для анализа гамильтониана относительного движения перейдем к новым переменным

$$\mathbf{r} = \frac{\sqrt{M}}{\hbar}\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\zeta} = \frac{\sqrt{\mu}}{\hbar}\mathbf{y}. \tag{8}$$

Далее, мы предполагаем, что заряд изображений, Z_3, зависит не только от величины эффективного электрического заряда Q, но и от соотношения диэлектрических проницаемостей сред:

$$Z_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}}\frac{|\varepsilon-\varepsilon'|}{\varepsilon+\varepsilon'}Q,$$

где ε и ε' — относительные диэлектрические константы, например, полупроводника и диэлектрика. Соответствующее уравнение Шредингера для относительного движения имеет вид

$$\begin{aligned} \Bigg\{ & \frac{1}{2}\mathbf{P}_r^2 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_\zeta^2 + \frac{\hbar^2}{8}\omega_c^2\rho_r^2 + \frac{\hbar}{a^*\sqrt{2m^*}}\frac{Z_1Z_2}{r} + \\ & + \frac{1}{2}\hbar\omega_c L_{r_z} - \frac{\hbar\sqrt{2}f}{a^*\sqrt{m^*}}\frac{Z_1Z_3}{|\boldsymbol{\zeta}+f\mathbf{r}|} - \\ & - \frac{\hbar\sqrt{2}f}{a^*\sqrt{m^*}}\frac{Z_2Z_3}{|\boldsymbol{\zeta}-f\mathbf{r}|} - E\Bigg\}\Psi(\mathbf{r},\boldsymbol{\zeta}) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $f = \sqrt{m_3/m_t}$, $a^* = a_B\varepsilon m_e/m^*$ является эффективным радиусом системы, а a_B — радиус Бора. В следующем разделе мы определим решения уравнения Шредингера (9).

3. АНАЛИЗ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1. Энергетический спектр внутренней системы

В двухцентровом адиабатическом приближении [19] волновая функция относительного движения кулоновской системы трех тел представляется в виде

$$\Psi(\mathbf{r},\boldsymbol{\zeta}) = \chi(\mathbf{r})\Phi(r,\boldsymbol{\zeta}), \tag{10}$$

где $\Phi(r,\boldsymbol{\zeta})$ — волновая функция внутренней системы. В двухцентровом приближении переменная r рассматривается как внешний параметр, т. е. $r = \mathrm{const}$. Вектор $\boldsymbol{\zeta}$ представим в цилиндрической системе координат: $\boldsymbol{\zeta} = \{\rho, z, \varphi\}$. Тогда волновая функция $\Phi(r,\boldsymbol{\zeta})$ принимает вид

$$\Phi(r,\boldsymbol{\zeta}) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{\pi}}\widetilde{\Phi}_m(r;\rho,z). \tag{11}$$

Здесь φ — азимутальный угол, а m — магнитное квантовое число. Учитывая (11), после некоторых упрощений уравнения Шредингера (9) имеем

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]-\frac{Z_1Z_3\lambda}{\sqrt{\zeta^2+2frz+f^2r^2}}-\frac{Z_2Z_3\lambda}{\sqrt{\zeta^2-2frz+f^2r^2}}\right\}\widetilde{\Phi}_m(r;\rho,z) = E_r(r)\widetilde{\Phi}_m(r;\rho,z), \tag{12}$$

где $E_r(r)$ является собственным значением гамильтониана внутренней системы, а параметр λ определен соотношением

$$\lambda = \frac{\hbar\sqrt{2}f}{a^*\sqrt{m^*}}.$$

Проводя замену переменных

$$\rho = 2\sqrt{\rho_1\rho_2}, \quad z = (\rho_1-\rho_2) \tag{13}$$

и переходя к параболической системе координат в (12), после необходимых вычислений получаем

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2}\left[\rho_1\frac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial}{\partial\rho_1}+\rho_2\frac{\partial^2}{\partial\rho_2^2}+\frac{\partial}{\partial\rho_2}-\frac{m^2}{4\rho_1}-\frac{m^2}{4\rho_2}\right]-(\rho_1+\rho_2)E_r-\frac{Z_1Z_3\lambda(\rho_1+\rho_2)}{\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2+2fr(\rho_1-\rho_2)+f^2r^2}}-\frac{Z_2Z_3\lambda(\rho_1+\rho_2)}{\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-2fr(\rho_1-\rho_2)+f^2r^2}}\right\}\times \widetilde{\Phi}_m(r;\rho_1,\rho_2) = 0. \tag{14}$$

Перед тем как определить энергетический спектр и волновую функцию уравнения Шредингера (14) с помощью метода осцилляторного представления [16], уместно напомнить, что этот метод основан на идеях и методах квантовой теории скалярного поля. Одно из существенных отличий квантовой теории поля от квантовой механики состоит в том, что в первой квантованные поля, представляющие набор бесконечного числа осцилляторов для основного состояния или вакуума, при квантовополевом взаимодействии сохраняют свою осцилляторную природу. В квантовой механике собственные функции для большинства потенциалов, как правило, отличаются от гауссовского поведения осцилляторной волновой функции. Поэтому для применения методов и идей квантовой теории поля к решению квантовомеханических задач следует в исходном радиальном уравнении Шредингера провести замену переменных таким образом, чтобы искомая волновая функция на больших расстояниях обладала гауссовским поведением, а трансформированное уравнение идентифицировать с радиальным уравнением Шредингера в пространстве с большой размерностью. Отметим, что впервые похожая идея обсуждалась Фоком при решении задачи о спектре атома водорода с помощью трансформации в четырехмерное пространство импульсов [20].

Следуя Фоку [21], будем считать асимптотическое поведение волновой функции внутренней системы кулоновским. В соответствии с изложенным выше проведем замену переменных следующим образом (детали см. в [16]):

$$\rho_k = q_k^2, \ \widetilde{\Phi}_m = q_1^{|m|}q_2^{|m|}\Psi_m\left(q_1^2,q_2^2\right), \quad k=1,2. \tag{15}$$

Используя атомную систему единиц ($\hbar = e = c = 1$), получим из (14)

$$\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial q_j^2}+\frac{d-1}{q_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\right]-\frac{4Z_1Z_3\lambda\left(q_1^2+q_2^2\right)}{\sqrt{\left(q_1^2+q_2^2\right)^2+2fr\left(q_1^2-q_2^2\right)+f^2r^2}}-4E_r\left(q_1^2+q_2^2\right)-\frac{4Z_2Z_3\lambda\left(q_1^2+q_2^2\right)}{\sqrt{\left(q_1^2+q_2^2\right)^2-2fr\left(q_1^2-q_2^2\right)+f^2r^2}}\right\}\times \Psi_m\left(q_1^2,q_2^2\right) = 0, \tag{16}$$

где d — размерность вспомогательного пространства, которая равна

$$d = 2+2|m|. \tag{17}$$

В результате замены переменных мы получили модифицированное уравнение Шредингера в d-мерном вспомогательном пространстве R^d. Из (16) и (17) следует, что магнитное квантовое число m вошло в определение размерности пространства d. Данный прием позволяет определить все интересующие нас характеристики, а именно, спектр и волновую функцию, решая модифицированное уравнение Шредингера только для основного состояния в d-мерном вспомогательном пространстве R^d. Волновая функция $\Psi_m\left(q_1^2,q_2^2\right)$ основного состояния в R^d зависит только от переменных q_1^2 и q_2^2. Поэтому оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial {q_k}^2}+\frac{d-1}{q_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\equiv\Delta_{q_k},\quad k=1,2 \qquad (18)$$

отождествим с лапласианом Δ_{q_k} во вспомогательном пространстве R^d, который действует на волновую функцию основного состояния, зависящую только от радиуса q_k. Исходя из модифицированного уравнения Шредингера

$$H\Psi_m(q_1,q_2)=\varepsilon(E_r)\Psi_m(q_1,q_2), \qquad (19)$$

согласно (16) получаем, что энергетический спектр в R^d равен нулю:

$$\varepsilon(E_r)=0. \qquad (20)$$

Будем рассматривать это соотношение как условие определения энергетического спектра E_r гамильтониана (12). Следуя методу осцилляторного представления, представим канонические переменные через операторы рождения и уничтожения в пространстве R^d:

$$q_j^{(k)}=\frac{a_j^k+a_j^{k+}}{\sqrt{2\omega_k}},\quad P_j^{(k)}=\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\,\frac{a_j^k-a_j^{k+}}{i}, \qquad (21)$$
$$k=1,2,\quad j=1,\dots,d,\quad [a_i^k,a_j^{k+}]=\delta_{i,j},$$

где ω_k — частота осциллятора, которая пока не известна. Подставляя (21) в (16) и упорядочивая по операторам рождения и уничтожения, получаем

$$H=H_0+\varepsilon_0(E_r)+H_I. \qquad (22)$$

Здесь H_0 является гамильтонианом двух несвязанных осцилляторов,

$$H_0=\omega_1(a_j^+(1)a_j(1))+\omega_2(a_j^+(2)a_j(2)), \qquad (23)$$

а $\varepsilon_0(E_r)$ — энергия основного состояния в нулевом приближении осцилляторного представления [16, 22], которая имеет вид

$$\varepsilon_0(E_r)=\frac{d}{4}\omega_1+\frac{d}{4}\omega_2-2\frac{dE_r}{\omega_1}-2\frac{dE_r}{\omega_2}-4\left(\omega_1\omega_2\right)^{d/2}\times$$
$$\times\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\frac{d\beta_1 d\beta_2}{\Gamma^2(d/2)}\left[\frac{Z_1Z_3\lambda\left(\beta_1\beta_2\right)^{d/2-1}\left(\beta_1+\beta_2\right)}{\sqrt{\left(\beta_1+\beta_2\right)^2+2fr\left(\beta_1-\beta_2\right)+f^2r^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{Z_2Z_3\lambda\left(\beta_1\beta_2\right)^{d/2-1}\left(\beta_1+\beta_2\right)}{\sqrt{\left(\beta_1+\beta_2\right)^2-2fr\left(\beta_1-\beta_2\right)+f^2r^2}}\right]\times$$
$$\times\exp(-\omega_1\beta_1-\omega_2\beta_2). \qquad (24)$$

Гамильтониан взаимодействия H_I также представляется в нормальной форме по операторам рождения и уничтожения, причем он не содержит квадратичных слагаемых по каноническим переменным:

$$H_I=-\frac{\partial}{\partial\beta}\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^\infty\frac{d\tau}{\sqrt{\pi}}e^{-\tau^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{d\eta_1}{\sqrt{\pi}}\right)^d\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{d\eta_2}{\sqrt{\pi}}\right)^d\exp\left[-(fr)^2t-\eta_1^2-\eta_2^2\right]\times$$
$$\times\left\{\exp\left\{-\eta_1^2\frac{\mu_+}{\omega_1}-\eta_2^2\frac{\mu_-}{\omega_2}\right\}\times\right.$$
$$\times F\Big(2i\sqrt{\mu_+}(\eta_1q_1),2i\sqrt{\mu_-}(\eta_2q_2)\Big)+$$
$$+\exp\left\{-\eta_1^2\frac{\mu_-}{\omega_1}-\eta_2^2\frac{\mu_+}{\omega_2}\right\}\times$$
$$\left.\left.\times F\Big(2i\sqrt{\mu_-}(\eta_1q_1),2i\sqrt{\mu_+}(\eta_2q_2)\Big)\right\}\right|_{\beta=0}, \qquad (25)$$

где введены обозначения

$$F(y_1,y_2)=:e_2^{-y_1}::e_2^{-y_2}:+:e_2^{-y_2}:\left(1+\frac{1}{2}:y_1^2:\right)+$$
$$+:e_2^{-y_1}:\left(1+\frac{1}{2}:y_2^2:\right),$$
$$\mu_\pm=\beta\pm2rft+2i\sqrt{t}\tau.$$

Здесь $:\ldots:$ является символом нормального упорядочения и мы использовали обозначение $e_2^x=e^x-1-x-x^2/2$ (см. также [17]). Некоторые детали представления гамильтониана в нормальной форме приведены в Приложении.

Вклад гамильтониана взаимодействия H_I рассматривается как малое возмущение. В квантовой теории поля после представления канонических переменных через операторы рождения и уничтожения и представления гамильтониана взаимодействия в нормальной форме требование отсутствия в гамильтониане взаимодействия полевых операторов второй степени по существу эквивалентно перенормировкам константы связи и волновой функции [23]. Более того, такая процедура позволяет учесть основной квантовый вклад через перенормировку масс и энергию вакуума. Другими словами, все квадратичные формы полностью включены в гамильтониан свободного осциллятора. Данное требование позволяет сформулировать, согласно осцилляторному представлению, условия

$$\frac{\partial\varepsilon_0(E)}{\partial\omega_1}=0,\quad\frac{\partial\varepsilon_0(E)}{\partial\omega_2}=0 \qquad (26)$$

для нахождения частот ω_1 и ω_2 несвязанных осцилляторов, которые определяют основной квантовый вклад. Учитывая (24), из уравнений (20) и (26) мы можем вычислить энергию E_r внутренней системы как функцию параметра r. Так как нас интересует основное состояние, в данной работе мы не будем рассматривать радиальные возбуждения. В рамках осцилляторного представления для различных потенциалов [17, 22, 24] неоднократно проверялось, что поправка первого порядка, связанная с гамильтонианом взаимодействия, тождественно равна нулю, а поправка второго порядка меньше одного процента. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только нулевого приближения.

Энергия E_r в этом приближении равна

$$E_r = \frac{\omega_1\omega_2}{8} - \frac{2}{d}\frac{(\omega_1\omega_2)^{d/2+1}}{\omega_1+\omega_2} \times \\ \times \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\beta_1 d\beta_2}{\Gamma^2(d/2)}(\beta_1\beta_2)^{d/2-1} \times \\ \times \left[\frac{Z_1Z_3\lambda(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{(\beta_1+\beta_2)^2+2fr(\beta_1-\beta_2)+f^2r^2}} + \right. \\ \left. + \frac{Z_2Z_3\lambda(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{(\beta_1+\beta_2)^2-2fr(\beta_1-\beta_2)+f^2r^2}}\right] \times \\ \times \exp\{-\omega_1\beta_1-\omega_2\beta_2\}. \quad (27)$$

Введем новые параметры:

$$\omega_+ = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \quad \omega_- = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}, \quad (28)$$

которые определяются из уравнения (26) с учетом выражений (24) и (27) как функции величины r.

Отметим, что в нашем подходе нарушение сферической симметрии контролируется параметром ω_-.

3.2. Структура потенциала удержания

Приступим к рассмотрению задачи о потенциале удержания. Учитывая (12), подставляя (10) в (9), после преобразований (в обычной системе единиц) получаем

$$\left[\frac{1}{2}\mathbf{P}_r^2 + \frac{\hbar^2}{8}\omega_c^2\rho_r^2 + \frac{\hbar}{a^*\sqrt{2m^*}}\frac{Z_1Z_2}{r} - \right. \\ \left. - E + \frac{\hbar\omega_c}{2}L_{r_z} + V_c(r)\right]\chi(\mathbf{r}) = 0, \quad (29)$$

где E — энергетический спектр исходной системы, а величина $V_c(r)$ и есть искомый потенциал удержания:

$$V_c(r) = E_r(r) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\omega_+}\frac{\partial}{\partial r}\omega_+\right)^2. \quad (30)$$

Первое слагаемое в (30), $E_r(r)$, — потенциал (27), создаваемый электростатическим полем заряда изображений, а второе слагаемое связано с относительным движением частиц и определяется усреднением полного гамильтониана (9) по волновой функции $\Phi(r,\boldsymbol{\zeta})$ внутренней системы. Очевидно, что полученный потенциал удержания содержит различные решения в зависимости от характера кулоновского взаимодействия и величины магнитного поля. В данной работе мы ограничимся рассмотрением лишь сферически-симметричного решения $\omega_- = 0$, т. е. $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$. В этом случае имеем

$$V_c(r) = \frac{\omega^2}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2 - \\ - \frac{\lambda\omega}{2}(Z_1Z_3+Z_2Z_3)\left[2\frac{1-e^{-fr\omega}}{fr\omega} - e^{-fr\omega}\right], \quad (31)$$

где ω определяется уравнением

$$\omega - 2\lambda(Z_1Z_3+Z_2Z_3)(1+fr\omega)e^{-fr\omega} = 0. \quad (32)$$

Таким образом, в нашей модели двухэлектронной квантовой точки потенциал удержания отличается от потенциала параболического конфайнмента и определяется выражением (31) и уравнением (32).

Рассматривая предел $r \ll 1$ и разлагая потенциал V_c в ряд Тейлора по переменной r, получаем

$$V_c(r) = -\frac{\hbar\omega_0}{8} + \hbar^2\left(\frac{1}{24}+\frac{f^2}{4}\right)f^2\omega_0^2r^2 - \\ - \left(\frac{1}{48}+\frac{f^2}{4}\right)\hbar^{3/2}\omega_0^{3/2}r^3 + \hbar^3\frac{\omega_0^3f^4}{60}r^4 + O(r^5), \quad (33)$$

где

$$\omega_0 = \left(4Z_3\frac{f\sqrt{2\hbar}}{a^*\sqrt{m^*}}\right)^2. \quad (34)$$

Ограничиваясь только второй степенью по r в (33), получаем потенциал параболического конфайнмента с частотой конфайнмента ω_0. Из (31), (33), (34) следует, что свойства потенциала зависят от заряда изображений и эффективной массы электронов. Данная зависимость включается в конечное выражение для энергетического спектра через параметры ω_0 и f. Если масса заряда изображений создается

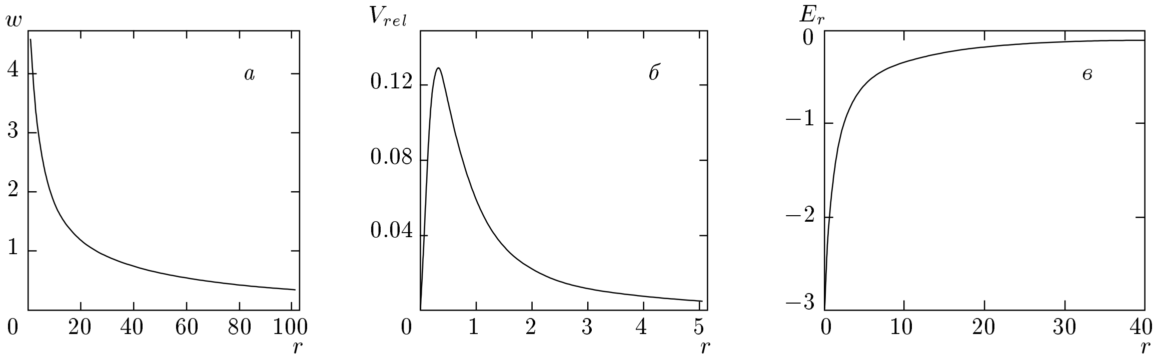

Рис. 1. Зависимости частоты осциллятора (*а*), потенциала, созданного относительным движением электронов, (*б*) и потенциала, созданного электростатическим полем заряда изображений, (*в*) от расстояния между двумя электронами

всеми электронами окружающей среды или тяжелыми ионами, то параметр $f \approx 1$ (для $m_1 = m_2 = m_3$ $f = 1/\sqrt{3}$). Характеристическая длина квантовой точки (ямы) [8, 9], образованной на границе двух сред,

$$\ell_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m^*\omega_0}} = \frac{a^*}{4Z_3 f\sqrt{2}},$$

также зависит от заряда изображений.

Используя конкретные значения параметров для случая квантовой точки, например $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 1$ и $m_1 = m_2 = m_3$, можно определить зависимость частоты осциллятора ω от величины r из уравнения (32). Соответственно, это позволяет определить зависимость потенциала,

$$E_r(r) = \frac{\omega^2}{8} - \lambda\omega\left[2\frac{1-e^{-fr\omega}}{fr\omega} - e^{-fr\omega}\right], \qquad (35)$$

создаваемого электростатическим полем заряда изображений, а также потенциала

$$V_{rel} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2, \qquad (36)$$

связанного с относительным движением электронов, от параметра r. Из рис. 1*а* видно, что при возрастании r частота осциллятора ω плавно уменьшается от 4.619 до 0. Потенциал V_{rel} в начале координат равен нулю, на малых расстояниях он возрастает, а затем при дальнейшем возрастании r быстро убывает (рис. 1*б*). Потенциал $E_r(r)$ при $r = 0$ является конечным, т. е. сингулярность отсутствует, а при $r = \infty$ убывает как кулоновский. Величина потенциала V_{rel} на порядок меньше абсолютного значения $E_r(r)$. Таким образом, основной вклад в потенциал удержания определяется взаимодействием электронов в электростатическом поле заряда изображений.

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

В данном разделе осцилляторное представление [16] применяется для вычисления энергетического спектра двухэлектронной системы с потенциалом $V_c(r)$ (33). Для иллюстрации рассмотрим случай $z = 0$, т. е. двумерную систему, которая может служить моделью квантовой точки. Согласно (29) и (33), гамильтониан относительного движения двухэлектронной системы имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{m^2}{\rho^2}\right] + \frac{\hbar^2}{2}\Omega^2\rho^2 + \\ + \frac{k\sqrt{\hbar\omega_0}}{\rho} - \hbar^2\sqrt{\hbar}W\rho^3 + \hbar^3 G\rho^4 - \frac{\hbar\omega_0}{8} + \frac{1}{2}m\hbar\omega_c, \qquad (37)$$

где $m = 0, \pm1, \ldots$ — магнитное квантовое число и

$$\omega_r^2 = \frac{\lambda^2\omega_0^2}{12}, \quad W = \frac{\lambda^3}{48}\omega_0^2\sqrt{\omega_0}, \\ \Omega = \sqrt{\omega_r^2 + \frac{\omega_c^2}{4}}, \quad G = \frac{\lambda^4\omega_0^3}{160}, \quad k = \frac{\ell_0}{a^*}. \qquad (38)$$

Уравнение Шредингера для гамильтониана (37) принимает вид

$$\left[\frac{1}{2}P_\rho^2 + \frac{\hbar^2}{2}\Omega^2\rho^2 + \frac{k\sqrt{\hbar\omega_0}}{\rho} - \\ - \hbar^{3/2}W\rho^3 + \hbar^3 G\rho^4\right]\Psi_m = U_m\Psi_m. \qquad (39)$$

Здесь U_m — энергетический параметр,

$$U_m = E_m + \frac{\hbar\omega_0}{8} - \frac{m}{2}\hbar\omega_c. \qquad (40)$$

Прежде всего рассмотрим чисто параболический потенциал, т. е. $W = 0$ и $G = 0$. В этом случае для энергетического спектра получим (детали см. в [9])

$$E_m = \hbar\omega_0 \left\{ -\frac{1}{8} + t\frac{m}{2} + x^2(1+|m|) \times \right.$$
$$\times \sqrt{\frac{f^2}{2}\left(\frac{1}{6}+f^2\right)+\frac{t^2}{4}+\frac{3kx}{2}\left[\frac{f^2}{2}\left(\frac{1}{6}+f^2\right)+\frac{t^2}{4}\right]^{1/4}} \times$$
$$\left. \times \frac{\Gamma(|m|+1/2)}{\Gamma(1+|m|)} + \frac{t}{4}[1-(-1)^m]\frac{m^*}{m_e}g^* \right\}. \quad (41)$$

Параметр x определяется из уравнения

$$x^4 + x^3 k \left[\frac{f^2}{2}\left(\frac{1}{6}+f^2\right)+\frac{t^2}{4}\right]^{-1/4} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(|m|+1/2)}{\Gamma(2+|m|)} - 1 = 0. \quad (42)$$

Здесь $t = \omega_c/\omega_0$ — относительная напряженность магнитного поля, а g^* является эффективным фактором Ланде. В выражение (41) также включен вклад эффекта Зеемана, связанный со спиновым взаимодействием двух электронов в магнитном поле. Выражения (41) и (42) дают возможность определить основные состояния квантовой точки как функции ее размера $k = \ell_0/a^*$ и относительной напряженности магнитного поля t.

Перейдем к вычислению энергетического спектра гамильтониана (39). В этом случае замена переменных представляется следующим образом:

$$\rho = q^{2\alpha}, \quad \Psi_m = q^{2\alpha|m|}\Phi_m(q), \quad (43)$$

где параметр α связан с поведением волновой функции на больших расстояниях. Потенциал содержит ангармонические члены, и при определении параметра α будем следовать результатам работы [22]. Для больших ρ асимптотика волновой функции определяется ангармоническим членом $G\rho^4$, при этом $\alpha = 1/3$. При малых значениях G и W истинная волновая функция ближе к гауссовской волновой функции, поэтому $\alpha = 1/2$. Этот предел соответствует потенциалу параболического конфайнмента. Таким образом, параметр α, рассматриваемый в качестве вариационного параметра при минимизации энергии основного состояния в нулевом приближении [22], может изменяться в интервале $1/3 \le \alpha \le 1/2$. На рис. 2 представлена зависимость параметра α от напряженности магнитного поля $t = \omega_c/\omega_0$ для состояний $m = -1, -2, -3, \ldots$ Результаты анализа показывают, что для состояний с небольшим абсолютным значением магнитного квантового числа m параметр $\alpha < 1/2$. С ростом

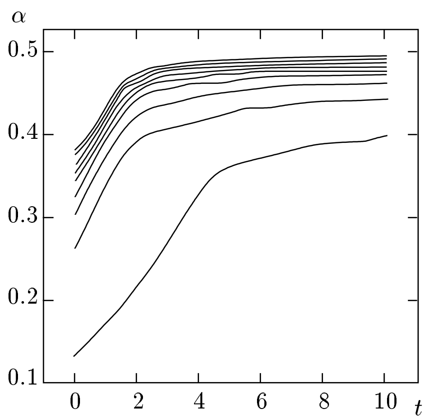

Рис. 2. Зависимость параметра α от относительной напряженности внешнего магнитного поля t для различных значений магнитного квантового числа m. Нижний уровень соответствует $m = -1$, следующий $m = -2$ и т. д.

величины магнитного поля параметр α асимптотически стремится к пределу $\alpha = 1/2$, соответствующему гауссовской волновой функции. Отметим, что в осцилляторном представлении, благодаря введению параметра α, удается избежать проблемы суммирования рядов теории возмущений, т. е. успешно обойти проблему феномена Дайсона [25].

После некоторых преобразований уравнения (39) получим модифицированное уравнение Шредингера

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q}\frac{\partial}{\partial q}\right] + 4k\sqrt{\hbar\omega_0}\alpha^2 q^{2(\alpha-1)} + \right.$$
$$+ 2\alpha^2\hbar^2\Omega^2 q^{2(4\alpha-1)} - 4\hbar^{3/2}\alpha^2 W q^{2(5\alpha-1)} +$$
$$\left. + 4\alpha^2\hbar^3 G q^{2(6\alpha-1)} - 4\alpha^2 U_m q^{2(2\alpha-1)} \right\} \times$$
$$\times \Phi_m(q^2) = 0, \quad (44)$$

где $d = 2 + 4\alpha|m|$. Энергия основного состояния в нулевом приближении равна

$$\varepsilon_0(U_m) = \frac{d\omega\hbar}{4} - \frac{4\alpha^2 U_m}{(\omega\hbar)^{2\alpha-1}}\frac{\Gamma(d/2+2\alpha-1)}{\Gamma(d/2)} +$$
$$+ \frac{4k\sqrt{\hbar\omega_0}\alpha^2}{(\omega\hbar)^{\alpha-1}}\frac{\Gamma(d/2+\alpha-1)}{\Gamma(d/2)} -$$
$$- \frac{4\hbar^{3/2}\alpha^2 W}{(\omega\hbar)^{5\alpha-1}}\frac{\Gamma(d/2+5\alpha-1)}{\Gamma(d/2)} +$$
$$+ \frac{2\alpha^2\hbar^2\Omega^2}{(\omega\hbar)^{4\alpha-1}}\frac{\Gamma(d/2+4\alpha-1)}{\Gamma(d/2)} +$$
$$+ \frac{4\alpha^2\hbar^3 G}{(\omega\hbar)^{6\alpha-1}}\frac{\Gamma(d/2+6\alpha-1)}{\Gamma(d/2)}, \quad (45)$$

а для гамильтониана взаимодействия имеем

$$H_I = \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d e^{-\eta^2(1+\tau)} : e_2^{-2i\sqrt{x\hbar\omega}(q\eta)} : \times \left[\frac{4k\sqrt{\hbar\omega_0}\alpha^2}{(\omega\hbar)^{\alpha-1}} \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{4\hbar^2\sqrt{\hbar}\alpha^2 W}{(\omega\hbar)^{5\alpha-1}} \frac{\tau^{-5\alpha}}{\Gamma(1-5\alpha)} - \frac{4U_m\alpha^2}{(\omega\hbar)^{2\alpha-1}} \frac{\tau^{-2\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)} + \frac{2\alpha^2\hbar^2\Omega^2}{(\omega\hbar)^{4\alpha-1}} \frac{\tau^{-4\alpha}}{\Gamma(1-4\alpha)} + \frac{4\alpha^2\hbar^3 G}{(\omega\hbar)^{6\alpha-1}} \frac{\tau^{-6\alpha}}{\Gamma(1-6\alpha)}\right]. \quad (46)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial\varepsilon_0(U_m)}{\partial\omega} = 0 \quad (47)$$

определяем параметр ω как функцию энергии U_m, а также и другие параметры потенциала.

Учитывая (47), (45) и используя обозначения (38), после необходимых преобразований для энергетического спектра получаем

$$\frac{E_m}{\hbar\omega_0} = \min_\alpha \left\{ -\frac{1}{8} + \frac{tm}{2} + \frac{tm^*}{4m_e}[1-(-1)^m]g^* + \frac{z^2}{4\alpha} \frac{\sqrt{\Gamma(2+2\alpha|m|)\Gamma(4\alpha+2\alpha|m|)}}{\Gamma(2\alpha+2\alpha|m|)} \sqrt{\frac{f^2}{3}+t^2} + \frac{3kz\sqrt{\alpha}}{2} \frac{\Gamma(\alpha+2\alpha|m|)}{\Gamma(2\alpha+2\alpha|m|)} \times \left[\frac{\Gamma(4\alpha+2\alpha|m|)}{\Gamma(2+2\alpha|m|)}\left(\frac{f^2}{3}+t^2\right)\right]^{1/4} + \frac{f^3}{96z^3\alpha^{3/2}} \frac{\Gamma(5\alpha+2\alpha|m|)}{\Gamma(2+2\alpha|m|)} \times \left[\frac{\Gamma(2+2\alpha|m|)}{\Gamma(4\alpha+2\alpha|m|)}\left(\frac{f^2}{3}+t^2\right)^{-1}\right]^{3/4} - \frac{f^4}{160z^4\alpha^2} \frac{\Gamma(6\alpha+2\alpha|m|)}{\Gamma(2+2\alpha|m|)} \frac{\Gamma(2+2\alpha|m|)}{\Gamma(4\alpha+2\alpha|m|)} \times \left(\frac{f^2}{3}+t^2\right)^{-1}\right\}. \quad (48)$$

Параметр z определяется из уравнения

$$z^4 + 4k\alpha^{3/2}z^3 \frac{\Gamma(\alpha+2\alpha|m|)}{\Gamma(2+2\alpha|m|)} \times \left[\frac{\Gamma(2+2\alpha|m|)}{\Gamma(4\alpha+2\alpha|m|)}\left(\frac{f^2}{3}+t^2\right)^{-1}\right]^{1/4} - 1 + \frac{f^3}{4z\sqrt{\alpha}} \frac{\Gamma(5\alpha+2\alpha|m|)}{\Gamma(2\alpha+2\alpha|m|)} \times \left[\frac{\Gamma(2+2\alpha|m|)}{\Gamma(4\alpha+2\alpha|m|)}\left(\frac{f^2}{3}+t^2\right)^{-1}\right]^{5/4} - \frac{f^4}{z^2 10\alpha} \frac{\Gamma(6\alpha+2\alpha|m|)}{\Gamma(2\alpha+2\alpha|m|)} \times \left[\frac{\Gamma(2+2\alpha|m|)}{\Gamma(4\alpha+2\alpha|m|)}\left(\frac{f^2}{3}+t^2\right)^{-1}\right]^{3/2} = 0. \quad (49)$$

Очевидно, что энергетический спектр (48) отличается от энергетического спектра (41), обусловленного параболическим характером потенциала удержания. Из рис. 3 следует, что зависимости энергетического спектра от размера квантовой точки $k = \ell/a^*$ и относительной напряженности магнитного поля $t = \omega_c/\omega_0$ для параболического и квазипараболического потенциалов являются аналогичными. Однако в слабых магнитных полях синглет-триплетные переходы для квазипараболического потенциала происходят при более высоких значениях магнитного поля (ср. рис. 3*а* и 3*б*). Мы ожидаем, что в слабых магнитных полях потенциал удержания будет отличаться от потенциала параболического конфайнмента. В то же время в сильных магнитных полях, $\omega_c \gg \omega_0$, т. е. в пределе $t \to \infty$, из анализа выражений (48) и (49) следует, что вклад потенциала (33), связанного с квазипараболической структурой, менее заметен ($z \sim 1$). Таким образом, в сильных магнитных полях гипотеза о параболическом характере потенциала удержания для двухэлектронной системы является вполне оправданной. В наших вычислениях мы использовали следующие характерные для GaAs величины: эффективная масса $m^* = 0.067m_e$ и $g^* = -0.44$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из предположения о существовании заряда изображений, который может быть обусловлен большой разностью диэлектрических проницаемостей слоев, формирующих квантовую точку, или наличием примеси в полупроводнике, мы сформулировали модель двухэлектронной квантовой точки.

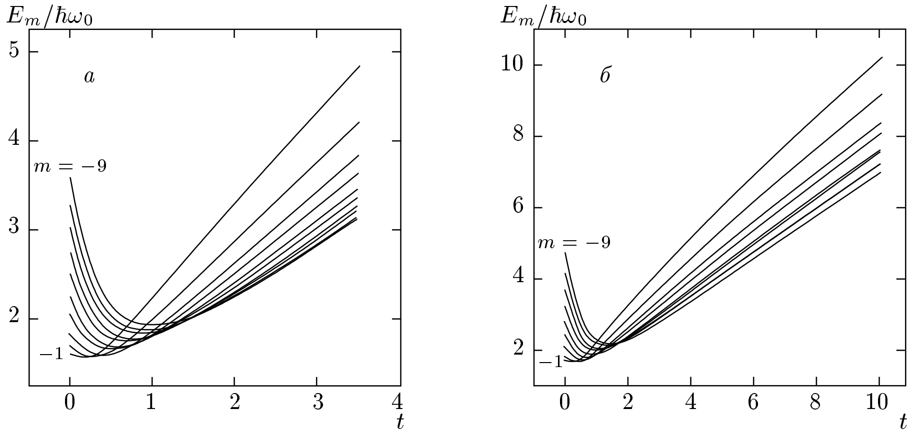

Рис. 3. Энергетические спектры гамильтониана относительного движения с учетом эффекта Зеемана в зависимости от относительной напряженности внешнего магнитного поля t для параболического (a) и квазипараболического ($б$) потенциалов, рассчитанных соответственно по формулам (41) и (48)

Модель позволяет самосогласованным образом определить эффективный потенциал удержания электронов, который зависит от эффективной массы электрона и характеристик заряда изображений.

Используя осцилляторное приближение, мы аналитически вычислили энергетический спектр квантовой точки при различных значениях магнитного поля. Разделение полного гамильтониана на гамильтониан движения центра масс и гамильтониан относительного движения дает два типа решений. Энергетический спектр гамильтониана центра масс является гармоническим и определяется кинетическим движением электронов, циклотронной частотой и отношением эффективной массы электрона к сумме масс двух электронов и заряда изображений. Подчеркнем, что данное решение не зависит от потенциала удержания электронов в отличие от случая Фока–Дарвина. Другое решение определяет потенциал удержания. В предложенной модели потенциал удержания полностью обусловлен взаимодействием электронов в поле заряда изображений. Результаты анализа позволяют утверждать, что потенциал удержания в квантовой точке может заметно отличаться от параболического типа, особенно при малых значениях магнитного поля, что может быть проверено при анализе спиновых осцилляций основного состояния двухэлектронной системы в магнитных полях. При этом наличие отклонения потенциала удержания от потенциала параболического конфайнмента не противоречит теореме Кона [26], которая справедлива для случая электрон-электронного взаимодействия, зависящего только от относительного расстояния.

Данная работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-02-17194).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Важным элементом вычислений в осцилляторном приближении [16] является представление канонических переменных в нормальной форме. Поэтому приведем детали этого представления для различных потенциалов. Рассмотрим следующую величину:

$$I = \frac{q^2}{\sqrt{q^4 + 2\gamma x q^2 + \gamma^2}} = \\ = -\frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\beta q^2 - t(q^4 + 2\gamma x q^2 + \gamma^2)\right]\Bigg|_{\beta=0}, \tag{П.1}$$

где q_j — вектор во вспомогательном пространстве R^d. Учитывая соотношения ($q_j, \eta_j \in R^d$)

$$\exp(-tq^4) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\tau^2 - 2i\sqrt{t}\tau q^2\right), \\ \exp(-q^2\kappa) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \exp\left[-\eta^2 - 2i\sqrt{\kappa}(q\eta)\right], \tag{П.2}$$

подставляя (П.2) в (П.1) и используя выражения (21) для канонической переменной q_j, проведем нормальное упорядочение по операторам рождения a_j^+ и уничтожения a_j. В результате имеем

$$I = -\frac{\partial}{\partial\beta}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\gamma^2 t\right)\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\pi}}\exp(-\tau^2)\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^\infty \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \exp\left[-\eta^2\left(1+\frac{\kappa}{\omega}\right)\right]\times$$
$$\times :\exp\left[-2i\sqrt{\kappa}(q\eta)\right]:\Bigg|_{\beta=0}, \quad (\text{П.3})$$

где

$$\kappa = \beta + 2\gamma x t + 2i\sqrt{t}. \quad (\text{П.4})$$

Используя представление (П.3), получим выражения (24) для энергии основного состояния $\varepsilon_0(E)$ и (25) для гамильтониана взаимодействия H_I.

При анализе гамильтониана (44) с квазипараболическим потенциалом нам необходимо представить в нормальной форме величину $q^{2\tau}$, где τ принимает любые значения. Для этого используем соотношение

$$q^{2\tau} = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\Gamma(-\tau)}x^{-1-\tau}\exp(-xq^2) =$$
$$= \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\Gamma(-\tau)}x^{-1-\tau}\int\limits_{-\infty}^\infty \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d\times$$
$$\times\exp\left[-\eta^2\left(1+\frac{x}{\omega}\right)\right]:\exp\left[-2i\sqrt{x}(q\eta)\right]: =$$
$$= \frac{1}{\omega^\tau}\frac{\Gamma(d/2+\tau)}{\Gamma(d/2)} + :q^2:\frac{\tau}{\omega^{\tau-1}}\frac{\Gamma(d/2+\tau)}{\Gamma(d/2+1)} +$$
$$+\frac{1}{\omega^\tau}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\Gamma(-\tau)}x^{-1-\tau}\int\limits_{-\infty}^\infty \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d\times$$
$$\times\exp\left[-\eta^2(1+x)\right]:\exp_2\left[-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)\right]:. \quad (\text{П.5})$$

Теперь изложим детали вычисления интегралов следующего вида:

$$J = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{d\beta_1 d\beta_2}{\Gamma^2(d/2)}\times$$
$$\times\frac{(\beta_1\beta_2)^{d/2-1}(\beta_1+\beta_2)\exp(-\omega_1\beta_1-\omega_2\beta_2)}{\sqrt{\gamma^2-2\gamma(\beta_1-\beta_2)+(\beta_1+\beta_2)^2}}. \quad (\text{П.6})$$

Прежде всего проведем замены переменных:

$$s = \frac{\beta_1-\beta_2}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{\beta_1+\beta_2}{\sqrt{2}},$$
$$\beta_1 = \frac{s+t}{\sqrt{2}}, \quad \beta_2 = \frac{t-s}{\sqrt{2}}. \quad (\text{П.7})$$

При этом интеграл (П.6) записывается в виде

$$J = \frac{\gamma^d}{2^{d-1}}\int\limits_0^\infty dt\int\limits_{-1}^1 dx\frac{(1-x^2)^{d/2-1}t^d}{\Gamma^2(d/2)}\times$$
$$\times\frac{\exp[-\omega_+ t\gamma - \omega_- x t\gamma]}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, \quad (\text{П.8})$$

где

$$\omega_+ = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \quad \omega_- = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}, \quad d = 2+2|m|.$$

Будем рассматривать случай $\omega_- = 0$. Для вычисления интеграла (П.8) будем использовать следующие соотношения [27]:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{k=0}^\infty\begin{cases} t^k P_k(x), & |t|\le 1,\\ t^{-1-k}P_k(x), & |t|\ge 1.\end{cases}$$
$$\int\limits_{-1}^1 dx\, x^{2j}P_{2k}(x) = \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(1+j-k)}\frac{\Gamma(1/2+j)}{\Gamma(k+3/2+j)}. \quad (\text{П.9})$$

Здесь $P_{2k}(x)$ — полином Лежандра. Учитывая эти представления, получим из (П.8)

$$J = \frac{\gamma^{2(|m|+1)}}{2^{2|m|+1}}\sum_{j=0}^{|m|}\frac{(-1)^j}{|m|!(|m|-j)!}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^j\left\{\int\limits_0^1 dt\exp(-\omega_+ t\gamma)\left(t^{2|m|+2+2k}-t^{2|m|-2k+1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(2|m|-2k+2)}{(\gamma\omega_+)^{2(|m|+1-k)}}\right\}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(1/2+j)}{\Gamma(1+j-k)!\Gamma(k+3/2+j)}. \quad (\text{П.10})$$

Следующий интеграл вычисляется точно:

$$\int\limits_0^1 dt\, t^n e^{-At} = (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial A^n}\int\limits_0^1 dte^{-At} =$$
$$= (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial A^n}\frac{1-e^{-A}}{A}, \quad n = 0,1,\ldots \quad (\text{П.11})$$

Применяя эти соотношения, получаем выражения (31), (П.6)–(П.11) для потенциала удержания (33).

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Chakraborty, Comments Condens. Matter Phys. **16**, 35 (1992); M. A. Kastner, Phys. Today **46**, 24 (1993).

2. R. Turton, *The Quantum Dot. A Journey into Future Microelectronics*, Oxford University Press, New York (1995).

3. L. Jacak, P. Hawrylak, and A. Wojs, *Quantum Dots*, Springer-Verlag, Berlin (1997).

4. M. Macucci, K. Hess, and G. J. Iafrate, Phys. Rev. B **48**, 17354 (1993); J. Appl. Phys. **77**, 3267 (1995).

5. W. D. Heiss and R. G. Nazmitdinov, Phys. Lett. A **222**, 309 (1996); Phys. Rev. B **55**, 16310 (1997); Письма в ЖЭТФ **68**, 870 (1998).

6. S. Tarucha, D. G. Austing, T. Honda et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 3613 (1996).

7. M. Maksym and T. Chakraborty, Phys. Rev. Lett. **65**, 108 (1990); Phys. Rev. B **45**, 1947 (1992).

8. U. Merkt, J. Huser, and M. Wagner, Phys. Rev. B **43**, 7320 (1991); M. Wagner, U. Merkt, and A. V. Chaplik, Phys. Rev. B **45**, 1951 (1992).

9. M. Dineykhan and R. G. Nazmitdinov, Phys. Rev. B **55**, 13707 (1997); J. Phys.: Condens. Matter **11**, L83 (1999).

10. Bo Su, V. J. Goldman, and J. E. Cunningham, Phys. Rev. B **46**, 7644 (1992).

11. R. C. Ashoori, H. L. Stormer, J. S. Weiner et al., Phys. Rev. Lett. **71**, 613 (1993); R. C. Ashoori, Nature (London) **379**, 413 (1996).

12. T. Demel, D. Heitmann, P. Grambow, and K. Ploog, Phys. Rev. Lett. **64**, 788 (1990).

13. D. Phannkuche and R. R. Gerhardts, Phys. Rev. B **43**, 12098 (1991); Phys. Rev. B **44**, 13132 (1991).

14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).

15. Н. А. Гиппиус, В. Д. Кулаковский, С. Г. Тиходеев, УФН **167**, 558 (1997); Е. А. Муляров, С. Г. Тиходеев, ЖЭТФ **111**, 274 (1997).

16. М. Динейхан, Г. В. Ефимов, ЭЧАЯ **26**, 651 (1995); M. Dineykhan, G. V. Efimov, G. Ganbold, and S. N. Nedelko, *Oscillator Representation in Quantum Physics*, Lecture Notes in Physics, **m 26**, Springer-Verlag, Berlin (1995).

17. M. Dineykhan and R. G. Nazmitdinov, ЯФ **62**, 143 (1999).

18. V. Fock, Z. Phys. **47**, 446 (1928); C. G. Darwin, Proc. Cambridge Phil. Soc. **27**, 86 (1930).

19. И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*, Наука, Москва (1976); С. И. Виницкий, Л. И. Пономарев, ЭЧАЯ **13**, 1336 (1982).

20. В. А. Фок, *Начала квантовой механики*, Наука, Москва (1976).

21. В. А. Фок, Изв. АН СССР, серия физ. **18**, 161 (1954).

22. M. Dineykhan and G. V. Efimov, Rep. Math. Phys. **36**, 287 (1995); ЯФ **59**, 862 (1996).

23. E. S. Fradkin, Nucl. Phys. **49**, 624 (1963); K. Hayashi, M. Hirayama, T. Muta et al., Fortschr. Phys. **15**, 625 (1967); A. Salam, *Nonpolynomial Lagrangians. Renormalization and Gravity*, Gordon and Breach Science Publ., New York (1971).

24. M. Dineykhan, Z. Phys. D **41**, 77 (1997).

25. F. J. Dyson, Phys. Rev. **85**, 631 (1952).

26. W. Kohn, Phys. Rev. **123**, 1242 (1961).

27. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).