

ДИНАМИКА СВЕТОВОГО ПОЛЯ В СОСТАВНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ МОДЕЛИ

*А. А. Заболотский**

*Институт автоматизации и электрометрии
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 22 мая 2000 г.

Метод обратной задачи рассеяния применяется для решения модели, описывающей эволюцию импульсов света в оптической системе, включающей набор сред с разными нелинейно-оптическими свойствами. В качестве физического примера исследуется модель, составленная из систем уравнений, описывающих резонансное взаимодействие ультракороткого импульса света с энергетическим переходом среды и последующее распространение светового поля в волоконно-оптическом световоде. Показано, что постоянное граничное значение одного из полей приводит к асимптотическому квазирадиационному решению модели.

PACS: 41.20.Jь

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучению генерации солитонов в нелинейной оптике, в том числе и в рамках полностью интегрируемых моделей [1], посвящено значительное число теоретических работ (см., например, [2, 3]). Часто для адекватного описания экспериментальной ситуации требуется решать начально-краевую задачу для систем нелинейных эволюционных уравнений. На практике в настоящее время эту задачу удается решать лишь в рамках полностью интегрируемых моделей. Поэтому нахождение и решение полностью интегрируемых моделей имеет как теоретический, так и практический интерес.

В настоящей работе рассматривается интегрируемая модель, состоящая из двух и более моделей, описывающих эволюцию полей на не пересекающихся, состыкованных интервалах. Будем называть такого рода модели «составными», чтобы отличать их от моделей, объединяющих интегрируемые модели на совпадающих интервалах. К последним моделям относится, например, объединение интегрируемых системы уравнений Максвелла–Блоха для двухуровневой среды и нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) в случае бесконечной среды [3].

Составные модели такого рода и специфика генерации импульсов в них, насколько нам известно, не исследовались. В то же время существование подобных моделей обусловлено реальными физическими ситуациями. Экспериментальные установки, используемые для генерации ультракоротких импульсов в оптике, обычно включают разные нелинейные и линейные среды. В одних средах происходит генерация импульса, в других — усиление, в третьих — сжатие и образование формы импульса, удобной для дальнейших приложений, и т. д. Примером такой системы может быть двухуровневый лазерный усилитель, дополненный нелинейной средой в виде волоконно-оптического световода. Исследования составных моделей и ассоциированных с ними начально-краевых задач могут выявить качественно новые режимы генерации в реальных физических условиях.

Для анализа эффектов распространения ультракоротких световых импульсов в волоконных световодах часто применяется модифицированное нелинейное уравнение Шредингера (МНУШ) с дифференциальной нелинейностью [4]. Устойчивые солитоноподобные импульсы поля в такой среде возникают вследствие баланса между действием дисперсии и нелинейностью. Дополнительные нелинейные взаимодействия в большинстве работ, посвященных

*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

исследованию солитонных эффектов в волоконных световодах, учитывались в виде возмущения (см., например, [5]). В то же время некоторые комбинации нелинейных эффектов удается описать в рамках интегрируемых моделей, объединяющих более простые интегрируемые модели в бесконечной среде [3].

Исследуемый в настоящей работе пример составной модели описывает распространение ультракоротких импульсов светового (основного) поля в волоконном световоде с учетом взаимодействия с дополнительными полями в нелинейной резонансной среде конечной длины вне рамок теории возмущений. В реальном эксперименте такая схема может быть использована для изучения генерации ультракоротких импульсов в резонансной среде, которые затем инжектируются в волоконный световод, служащий для передачи информации с помощью этих импульсов. Модель включает МНУШ и систему приведенных уравнений Максвелла, описывающую резонансные взаимодействия трех световых волновых пакетов с двухуровневой средой. Эта интегрируемая модель ассоциируется со спектральной задачей, родственной задаче Вадати–Конно–Ичикава (ВКИ) [6].

Вообще говоря, для описания генерации солитонов и других волновых пакетов в нелинейно-оптических задачах в конечных или полубесконечных средах следует решать начально-краевую задачу с ненулевыми значениями полей на границах. Часто такие граничные условия отвечают более реалистичным и легче реализуемым в эксперименте условиям, чем физические условия, для которых построена солитонная «классическая версия» метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [1]. В связи с этим определение типа и формы решения, ассоциированного с граничными условиями такого рода, важно для практических приложений. Эти граничные условия могут приводить к качественному изменению условий генерации оптических солитонов, бризеров и других типов решений. В то же время на практике, как отмечено выше, решить такую задачу удается только в рамках интегрируемых моделей. Решение начально-краевой задачи при этом, как правило, сталкивается со значительными математическими трудностями. Однако в последнее время появились работы, посвященные развитию методов решения таких задач для ряда моделей, интегрируемых с применением МОЗР, основанного на решении задачи Римана–Гильберта [1]. Отметим работы [7, 8], в которых исследовались краевые задачи для уравнений синус-Гордон, НУШ и других. В частности, в работе [9] указан формаль-

ный способ решения задачи Гурса для системы уравнений Максвелла–Блоха для двухуровневой среды. Ранее начально-краевая задача для этой же системы рассматривалась в работе [10], где исследовалась автомодельная асимптотика. Фокас [11] предложил новый подход к применению задачи Римана–Гильберта для решения начально-краевой задачи на конечном интервале. В [8] в рамках МОЗР для конечного интервала решалась модель комбинационного рассеяния, родственная модели Максвелла–Блоха для одночастотного перехода, учитывающая усреднение по частотному смещению. В ряде последних работ [12–14] обсуждался вопрос о форме и свойствах асимптотического решения, генерируемого простыми, но нетривиальными граничными условиями. В работах [12–14], в которых решалась модель комбинационного рассеяния для ненулевых граничных значений поля Стокса и накачки, найдены изолированные солитоноподобные решения с переменными параметрами. В работе автора [15] для этой же модели доказано, что с ростом эффективной длины нелинейной среды суммарный вклад этих полюсов приводит к квазиавтомодельному, не солитонному решению. Результат, доказанный теоретически для медленно меняющихся граничных условий, подтверждается численным моделированием [15].

В настоящей работе для решения новой интегрируемой модели используется вариант МОЗР, основанный на решении задачи Римана–Гильберта, ассоциированной со спектральной проблемой ВКИ. Для простых, но не тривиальных начально-краевых условий теоретически исследуется генерация и динамика ультракоротких импульсов света. Дополнительное существенное отличие исследуемой в настоящей работе интегрируемой модели от рассмотренных, например, в обзоре [3], проявляется в нетривиальной зависимости коэффициента рассеяния от одной из переменных. Эта зависимость может приводить, в частности, к появлению бесконечного числа движущихся полюсов в комплексной плоскости, ассоциированных с солитоноподобными решениями.

В рассматриваемом в настоящей работе физическом примере двух разных нелинейных сред граничные условия для второй среды определяются эволюцией полей в первой среде. В общем случае решение такой начально-краевой задачи не представляется возможным. Однако в рамках новой интегрируемой модели, которая рассматривается в этой работе, может быть найдено асимптотическое решение. В настоящей работе развивается подход, позволяющий асимптотически описывать эволюцию полей в

составных моделях для такого рода граничных условий. Доказано, что для достаточно большой эффективной длины резонансной среды решение сводится к системе интегральных уравнений, которые асимптотически совпадают с уравнениями, определяющими квазирадиационное решение МНУШ. Это решение определяется только непрерывным спектром задачи ($\text{Im } \lambda^2 = 0$) и может быть выражено через один из трансцендентов Пенлеве [1]. Асимптотики квазирадиационного решения МНУШ найдены Китаевым и Варганияном [16] в явном виде. Результаты настоящей работы дают также ответ и на вопрос о виде асимптотического решения задачи о взаимодействии света с двухуровневой средой в условиях вырожденного двухчастотного резонанса и слабого возбуждения среды.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 работы описывается общая структура составных интегрируемых моделей. В разд. 3 рассматриваются физические ситуации, приводящие к исследуемой далее составной модели. В разд. 4 приводится аппарат метода решения модели, основанный на задаче Римана–Гильберта, в разд. 5 найдена зависимость данных рассеяния от переменных. В разд. 6 для простых начально-краевых условий показано, что приближенное квазирадиационное решение МНУШ, описывающее динамику импульса в световоде, может генерироваться граничными условиями для дополнительного поля в резонансной среде. В последнем разделе обсуждаются результаты и их возможное обобщение.

2. СОСТАВНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ

Опишем структуру интегрируемой модели, составленной из $N \times M$ интегрируемых моделей (некоторые из них могут совпадать). Пусть составная интегрируемая модель представима в виде условия совместности следующих линейных систем уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\tau, z; \lambda) &= \\ &= \sum_{j=1}^M \beta_{j,j+1}(\tau) L_j(\tau, z; \lambda) \psi(\tau, z; \lambda) \equiv \mathcal{L}\psi, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \psi(\tau, z; \lambda) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_{i,i+1}(z) A_i(\tau, z; \lambda) \psi(\tau, z; \lambda) \equiv \mathcal{A}\psi, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \beta_{j,j+1}(\tau) &= [\theta(\tau - \tau_j) \theta(-\tau + \tau_{j+1})] \tilde{\beta}_j(\tau), \quad \tau_{j+1} > \tau_j, \\ \alpha_{i,i+1}(z) &= [\theta(z - z_i) \theta(-z + z_{i+1})] \tilde{\alpha}_i(z), \quad z_{i+1} > z_i. \end{aligned}$$

Здесь $\theta(z)$ — ступенчатая функция:

$$\theta(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0, \end{cases}$$

$\tilde{\beta}_i(\tau)$, $\tilde{\alpha}_i(z)$ — гладкие функции, не обращающиеся в нуль и бесконечность; $\alpha_{i,i+1}(z)/\tilde{\alpha}_i(z)$, $\beta_{i,i+1}(\tau)/\tilde{\beta}_i(\tau)$ — проекторы:

$$\alpha_{i,i+1}^2(z)/\tilde{\alpha}_i^2(z) = \alpha_{i,i+1}(z)/\tilde{\alpha}_i(z)$$

и т. д.; $L_j, A_i, \mathcal{L}, \mathcal{A}$ — некоторые матричные операторы.

Условие совместности этих линейных систем имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \sum_{j=1}^M \beta_{j,j+1}(\tau) L_j - \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{i=1}^N \alpha_{i,i+1}(z) A_i + \\ + \left[\sum_{j=1}^M \beta_{j,j+1}(\tau) L_j, \sum_{i=1}^N \alpha_{i,i+1}(z) A_i \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Умножая (3) на $\alpha_{i,i+1} \beta_{j,j+1} \tilde{\alpha}_i^{-1} \tilde{\beta}_j^{-1}$, находим

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_j(\tau) \frac{\partial}{\partial z} L_j - \tilde{\alpha}_i(z) \frac{\partial}{\partial \tau} A_i + \\ + \left[\tilde{\beta}_j(\tau) L_j, \tilde{\alpha}_i(z) A_i \right] = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$z \in [z_i, z_{i+1}], \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}].$$

Таким образом, эволюция в квадрате $[z_i, z_{i+1}]$, $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ описывается системой уравнений, имеющей представление Лакса в виде линейных систем

$$\partial_\tau \psi = \tilde{\beta}_j L_j \psi, \quad \partial_z \psi = \tilde{\alpha}_i A_i \psi.$$

Аппарат МОЗР для спектральной проблемы (1) в случае нескольких интервалов $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ нам не известен. В настоящей работе исследуется пример составной модели с представлением Лакса вида (1), (2) для одного полубесконечного интервала $[\tau_1 = 0, \tau_2 = \infty)$ и двух разных сред, расположенных на интервалах $[z_1 = 0, z_2]$, $[z_2, z_3 = \infty)$. Задача для конечного или полубесконечного интервала $[\tau_1, \tau_2]$, отвечающего ненулевому значению проектора $\beta_{12}(\tau)$, решалась, как отмечено во Введении, для некоторых простых, но не тривиальных начально-краевых условий для одного интервала $[z_1, z_2]$ (см., например, [11, 8]).

Отметим, что здесь заранее предполагается интегрируемость составной модели, включающей разные интегрируемые на разных интервалах модели. Это предположение приводит в общем случае к дополнительным условиям на физические параметры.

3. ФИЗИЧЕСКИЙ ПРИМЕР СОСТАВНОЙ МОДЕЛИ

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим составную модель, включающую модель резонансного взаимодействия основного поля с дополнительным полем в двухуровневой среде на интервале $[z_0 = 0, z_1)$, и модель, описывающую эволюцию основного поля в керровской среде, расположенной на полубесконечном интервале $z \geq z_1$. Предполагается, что взаимодействие полей в резонансной среде приводит к генерации импульсов, которые затем распространяются в керровской среде. Начально-краевые условия в простейшем случае следующие: амплитуда начального «дополнительного» поля в резонансной среде отлична от нуля и основное поле в начальный момент нулевое. Генерация импульсов в такой задаче может инициироваться сколь угодно малой затравкой основного поля на границе $z = 0$.

3.2. Модель взаимодействия двух волн в резонансной среде

Сначала рассмотрим примеры резонансного взаимодействия полей с двухуровневой средой и физические условия, которые приводят к следующей системе эволюционных уравнений:

$$\partial_\tau q_1 = -2\bar{q}_1 q_2 + i\nu q_1, \quad (5)$$

$$\partial_z q_2 = q_1^2 - i2g^2 q_2 |q_1|^2 \quad (6)$$

(черта сверху означает комплексное сопряжение), а затем к системе, составленной из модели (5), (6) и МНУШ.

3.3. Распространение света в условиях вырожденного двухфотонного взаимодействия

Когерентное взаимодействие ультракороткого импульса с двухфотонно поглощающей средой рассматривалось в ряде работ, начиная с [17] (см. также обзор [3]). Эффект самоиндуцированной прозрачности исследовался в рамках системы уравнений Максвелла–Блоха с учетом как изменения населенностей уровней, так и нелинейного эффекта Штарка. Однако для значительного (порядка единицы) изменения населенностей уровней требуются мощные световые поля. В то же время для практических приложений, например, в микроэлектронике, важно найти условия существования

самоиндуцированной прозрачности для относительно слабых полей, не разрушающих оптическую среду.

В этом разделе выводится самосогласованная интегрируемая модель самоиндуцированной прозрачности, отвечающая слабому возбуждению среды. Существование многосолитонных решений этой модели доказывает возможность наблюдения самоиндуцированной прозрачности в этом предельном случае для значительно (на порядки) более слабых, чем в отмеченной выше модели работы [17], интенсивностей полей.

Общая система уравнений для поля и двухуровневой среды (с уровнями 1 и 2) в условиях вырожденного двухфотонного резонанса получена из уравнения Шредингера и волнового уравнения в [17, 18]. Динамика поляризуемости среды описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t} R = -i \left(\frac{r_{22} - r_{11}}{4\hbar} \right) |E|^2 R - \frac{r^2}{2\hbar} E^2 R_3. \quad (7)$$

Здесь R_3 — разность населенностей верхнего и нижнего уровней, $R = iR_1 + R_2$ (R_1, R_2 — реактивная и активная составляющие поляризации среды), E — амплитуда поля. Компоненты вектора Блоха нормированы на единицу, т. е. справедливо следующее равенство:

$$R_3^2 + |R|^2 = 1. \quad (8)$$

Считаем, что удвоенная несущая частота поля ω равна частоте перехода среды ω_{12} . Стандартный вывод уравнений двухчастотного взаимодействия с двухуровневой средой состоит в адиабатическом исключении амплитуды вероятности заполнения промежуточных уровней (см., например, [17, 19]). Эта процедура приводит к следующей форме коэффициентов:

$$r = \frac{2}{\hbar} \sum_{n>3} \frac{q_{2n} q_{n1} (\omega_{n2} + \omega_{n1})}{(\omega_{n2} + \omega)^2},$$

$$r_{mm} = \frac{1}{\hbar} \sum_{n>3} \frac{\omega_{nm} |q_{nm}|^2}{\omega_{nm}^2 - \omega^2}, \quad m = 1, 2.$$

Здесь q_{mn} — дипольный момент между уровнями перехода $m = 1, 2$ и промежуточными уровнями n , ω_{nm} — соответствующая частота перехода.

Уравнения Максвелла для медленно изменяющейся огибающей поля E сводятся к следующему уравнению [17]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E = -\frac{2\pi\omega N_0}{c} \times \left[i \left(\frac{r_{22} - r_{11}}{4\hbar} \right) (R_3 - R_3^{(0)}) E + \bar{E} R \right], \quad (9)$$

где $R_3^{(0)}$ — начальное значение разности заселенностей уровней, c — скорость света в среде. Во многих известных экспериментах по наблюдению двухчастотных когерентных эффектов обнаружено, что заселенность верхнего уровня ($m = 2$) в процессе взаимодействия полей с двухуровневым переходом остается малой по сравнению с заселенностью основного состояния. Отношение заселенностей верхнего и нижнего уровней часто не превышает 10^{-5} – 10^{-7} в течение всего процесса взаимодействия [20]. В этом случае, т. е. в пределе слабого возбуждения среды, справедливо разложение

$$R_3 \approx -1 + |R|^2/2 + \mathcal{O}(|R|^4) \quad (10)$$

(здесь учтено, что $R_3^{(0)} = -1$). Для вывода уравнений (5), (6) используем разложение (10) и пренебрежем всеми членами четвертого порядка и выше по амплитуде поля и поляризации ($\sim |R|^2 E^2$) в уравнениях (7), (9). Отметим, что учет членов третьего порядка ($\sim |R|^2 E$) в итоге приводит лишь к перенормировке константы g^2 в (5), (6). Перейдем к переменным τ, z :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{c}{\pi \omega N_0} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{2\hbar}{r^2} \frac{\partial}{\partial (t - xc^{-1})}.$$

При этом система (7), (9) принимает вид (5), (6) после учета разложения (10), пренебрежения членами выше третьего порядка и следующих замен:

$$E = q_1 \exp \left(-ig_1 \int_0^\tau |R|^2 d\tau - i\nu\tau \right),$$

$$R = q_2 \exp \left(-2ig_1 \int_0^\tau |R|^2 d\tau - 2i\nu\tau \right),$$

где

$$g_1 = \frac{r_{22} - r_{11}}{2\hbar}, \quad 2g^2 = \frac{r_{22} - r_{11}}{2r^2} + g_1.$$

При выводе (5), (6) использовано равенство

$$\frac{\partial}{\partial \tau} |E|^2 = -2 \frac{\partial}{\partial z} |R|^2, \quad (11)$$

вытекающее из (7), (9).

3.1 Трехволновое смещение в резонансной среде

Опишем еще одну физическую схему взаимодействия, также приводящую к системе уравнений (5),

(6). Пусть в среде распространяется трехчастотное поле

$$\tilde{E}(x, t) = \sum_{j=1}^3 \{P_j \exp[i(q_j x - \omega_j t)] + \text{c.c.}\}. \quad (12)$$

Здесь P_j — медленно изменяющиеся огибающие, ω_j — несущие частоты, q_j — несущие волновые векторы. Предполагается, что выполняются следующие условия двухфотонного резонанса с собственным энергетическим переходом среды с частотой ω_0 :

$$\omega_1 + \delta_1 \omega_2 = \omega_0 + \nu_1, \quad \omega_3 + \delta_2 \omega_1 = \omega_0 + \nu_2. \quad (13)$$

Здесь $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_2 = \pm 1$, а расстройки ν_k удовлетворяют условию

$$\nu_k \ll \omega_i, \quad k = 1, 2, \quad i = 0, \dots, 3.$$

Условия резонанса (13) не только позволяют значительно (на порядки) усилить эффект нелинейного смешения, но и исключить в уравнениях члены, которые описывают кубичное по амплитуде самодействие полей, т. е. члены типа $P_j |P_j|^2$. Эти члены в данном случае нарушают интегрируемость модели. В итоге модель включает лишь кубичные члены, отвечающие двухфотонно-индуцированной керровской нелинейности (см., например, [21]).

Итак, считая, что поляризация среды адиабатически отслеживает изменение полей, и используя стандартную процедуру адиабатического исключения [2], получаем уравнения Максвелла, в которых процесс нелинейного смешения полей описывается двухфотонно-индуцированной керровской нелинейностью. Редуцированные уравнения Максвелла для условий резонанса (13) при $\delta_1 = \delta_2 = -1$ имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \right) P_1 = i \frac{4\pi\omega_1}{c^2} [\alpha_{22} P_1 |P_2|^2 + \alpha_{32} P_1 |P_3|^2 + 2 \text{Im} \alpha_{23} P_2 \bar{P}_1 P_3 \exp(-i\Delta x)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \right) P_2 = i \frac{4\pi\omega_2}{c^2} \times$$

$$\times [\alpha_{22} P_2 |P_1|^2 + \alpha_{23} P_1^2 \bar{P}_3 \exp(i\Delta x)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_3} \frac{\partial}{\partial t} \right) P_3 = i \frac{4\pi\omega_3}{c^2} \times$$

$$\times [\alpha_{33} P_3 |P_1|^2 + \alpha_{32} \bar{P}_2 P_1^2 \exp(i\Delta z)],$$

где $\Delta = 2q_1 - q_2 - q_3$, v_i — групповые скорости полей с огибающими P_i . Уравнения Максвелла, отвечающие данной схеме взаимодействия, и коэффициенты α_{23} , α_{32} , α_{22} , α_{33} приведены в книге Шена [2, разд. 10.4]. Однако, в отличие от уравнений в [2], в системе (14) учитывается временная зависимость

амплитуд полей и использовано приближение медленных огибающих. Предполагается также, что характерные времена изменения амплитуд много меньше времени Γ^{-1} , где Γ — минимальная константа релаксации. Для других значений δ_i возникают аналогичные уравнения, которые мы здесь не приводим для экономии места.

В ряде случаев при смешении волн в среде с кервской нелинейностью с хорошей точностью выполнялось условие постоянства интенсивности одного из полей [20]. Это условие также значительно упрощает синхронизацию импульсов полей, которая требуется для наблюдения эффекта. Условие постоянства одного из полей выполняется, например, при $|P_2| \gg |P_3|$ или $|P_2| \ll |P_3|$. Выберем последний вариант, т. е. тот, когда изменением поля P_3 можно пренебречь. В этом случае в системе (14) остаются лишь первые для уравнения. Пусть $P_3(x, t) \equiv A$, где A — действительная константа (в случае комплексной $A = A_0 e^{i\phi_0}$ фазовый множитель $e^{i\phi_0}$ устраняется сдвигом фазы поля P_2). В этом приближении первые два уравнения системы (14) сводятся к системе (5), (6) следующими заменами:

$$P_1 = q_1 \exp \left[-i \frac{\Delta}{2} x + i g_1 \int_0^\tau |q_2|^2 d\tau \right],$$

$$P_2 = i q_2 \exp \left[i g_1 \int_0^\tau |q_2|^2 d\tau \right],$$

$$g^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{ss}}{\alpha_{sa} A} + \frac{1}{2} g_1 \right), \quad g_1 = \frac{\alpha_{ss}}{\alpha_{pa} A},$$

$$\nu = \frac{c^2 \Delta}{8\pi\omega_1 \alpha_{pa}} + \frac{\alpha_{as}}{\alpha_{pa}} |A|^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{c^2}{4\pi\alpha_{pa}\omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{c^2}{4\pi\alpha_{sa}\omega_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Интегрируемая система уравнений (5), (6) приводится впервые. Эта система, как и аналогичная интегрируемая система уравнений, построенная ранее автором в [22], ассоциируется со спектральной проблемой типа задачи ВКИ. Однако применение аппарата МОЗР к системе (5), (6) приводит к новым особенностям, связанным со спецификой граничных условий для этой модели. Практическое значение модели (5), (6) может быть связано с тем, что она описывает вырожденное двухчастотное взаимодействие света со средой для минимальных значений интенсивностей полей и в то же время имеет

несингулярные солитонные решения. Это отличает ее от известной модели генерации второй гармоники, формально эквивалентной (5), (6) при $g = 0$. В последнем случае эта система уравнений аналогична модели взрывной неустойчивости [1], не имеющей устойчивых солитонных решений. Некоторые автомодельные решения системы уравнений (5), (6) могут совпадать с решениями модели генерации второй гармоники или двухволнового взаимодействия в средах с квадратичной нелинейностью с учетом кубичной нелинейности. В связи с этим исследование системы (5), (6) представляет самостоятельный интерес, однако в настоящей работе она будет исследоваться как элемент составной модели.

3.5. Составная модель

В реальных экспериментальных установках нередко световые импульсы проходят через разные оптические среды, расположенные последовательно. Рассмотрим ситуацию, когда ультракороткий импульс проходит через резонансную среду, находящуюся в интервале $[z_1, z_2]$, а затем распространяется в волоконном световоде, расположенном на интервале $[z_2, \infty)$.

В резонансной среде происходит взаимодействие основного поля с двумя дополнительными полями. Пусть на интервале $[z_1 = 0, z_2]$ световой импульс \mathcal{E} (основное поле) взаимодействует с двумя дополнительными полями с огибающими \mathcal{G}, \mathcal{U} по схеме, описанной в предыдущем подразделе. В обозначениях этой модели

$$\mathcal{E} \equiv P_2, \quad \mathcal{G} \equiv P_3, \quad \mathcal{U} \equiv P_1.$$

Считаем, что изменением поля \mathcal{G} в процессе взаимодействия можно пренебречь. Опишем механизм конверсии энергии дополнительных полей в импульсы основного поля и определим вид соответствующего решения. Для этого построим составную модель из модели (5), (6) на интервале $[0, z_2]$, $\alpha_{1,2} \neq 0$ и МНУШ на интервале $[z_2, \infty)$, $\alpha_{2,3} \neq 0$ ($\alpha_{i,i+1}$ определены в разд. 2).

МНУШ включает дифференциальную кубичную нелинейность (см. ниже левую часть уравнения (20), которая приводит к нелинейной фазовой модуляции импульса и которую необходимо учитывать при описании эволюции достаточно коротких световых импульсов в волоконных световодах [23]. Линейно поляризованная оптическая волна подчиняется уравнению Максвелла в одномерной среде:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \frac{2\pi n_2 n_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|E|^2 E). \quad (15)$$

Здесь E — электрическое поле, а $D = E + 4\pi P_L$ — поле в среде. Коэффициент преломления имеет вид

$$n(\omega, E) = n(\omega) + n_2|E|^2, \quad n_0 = n(\omega_0), \quad (16)$$

где ω_0 — несущая частота поля с медленной огибающей \mathcal{E} :

$$E(x, t) = \mathcal{E} \exp \left[i\omega_0 \left(\frac{n_0}{c}x - t \right) \right]. \quad (17)$$

Подставив (17) в (15), перейдя в систему отсчета импульса и удерживая члены с первой производной по нелинейности, получаем модифицированное нелинейное уравнение Шредингера:

$$i \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n_0 \partial}{c \partial t} \right) \mathcal{E} - \frac{1}{2} k'' \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \tau^2} + \frac{\pi n_0 \omega_0}{c} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} + i \frac{2\pi n_2}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} (|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) = 0 \quad (18)$$

(штрих означает производную по ω в точке ω_0).

Для ультракоротких импульсов в общем случае необходимо добавить в левую часть (18) дисперсионный член $ik''' E_{\tau\tau\tau}/6$ [24]. В работе [25] для одномодовых волоконных световодов найдено следующее эмпирическое отношение коэффициентов, справедливое вблизи точки минимума $|k''|$:

$$-\frac{k'''}{3|k''|} \approx 7 \cdot 10^{-4} \frac{\lambda_{\text{мкм}} - 0.86}{1.27 - \lambda_{\text{мкм}}}. \quad (19)$$

Из (19) следует, что в окрестности $\lambda_{\text{мкм}} \approx 0.86$ дисперсией третьего порядка можно пренебречь. В то же время, согласно формуле (19), эту дисперсию необходимо учитывать в окрестности длины волн $\lambda_0 = 1.27$, поскольку в ней $k'' = 0$ [26]. Для λ достаточно далекой от точки λ_0 нелинейные волны — решения уравнения (18) — формируются вследствие баланса действия кубичной дифференциальной нелинейности, кубичной нелинейности и квадратичной дисперсии. Эти «робастные» нелинейные моды (солитоны и другие автомодельные решения) устойчивы к действию малых возмущений. В этих условиях кубичная дисперсия ($\sim ik''' E_{ttt}$), согласно (19), может рассматриваться как малое возмущение, учет которого ведет лишь к малому изменению параметров нелинейных мод. Поэтому кубичная дисперсия в настоящей работе не учитывается.

Можно показать, что система уравнений Максвелла для \mathcal{E} — огибающей поля импульса, распространяющегося в световоде, — с учетом взаимодействия с дополнительными полями и в рамках исполь-

зованных приближений сводится к следующей системе:

$$\partial_z \mathcal{E} + \theta(z - z_2) \left[iD \partial_{tt}^2 \mathcal{E} + \tilde{\alpha} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} + \tilde{\beta} \partial_t (|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) \right] = \theta(-z + z_2) (-2\tilde{\gamma}_1 U^2 \mathcal{G} + 2i\tilde{g}_1^2 \mathcal{E} |U|^2), \quad z \geq 0, \quad (20)$$

$$\theta(-z + z_2) \times (\partial_t U - \tilde{\gamma}_2 \mathcal{E} \bar{U} + 2i\tilde{g}_2^2 U |\mathcal{E}|^2 + i\tilde{\nu} U) = 0, \quad z \geq 0. \quad (21)$$

где $D, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}_{1,2}, \tilde{g}_{1,2}$ — некоторые действительные коэффициенты.

Поскольку взаимодействие поля \mathcal{E} с полем U в резонансной среде и самодействие в керровской среде пространственно разделены, коэффициенты в правой части уравнения (20) могут быть произвольными. Как правило, взаимодействие в резонансной среде характеризуется нелинейностями с коэффициентами, на порядки большими, чем в волоконных световодах. В то же время нелинейное взаимодействие и дисперсия эффективно проявляются для реальных световодов, длина которых на несколько порядков больше, чем длина резонансной среды. Поэтому для обоснования физической применимости системы (20), (21) достаточно убедиться в наличии членов в правой и левой частях (20) отдельно.

Дифференциальная кубичная нелинейность так же, как и второе слагаемое в правой части (20), приводит к нелинейной фазовой модуляции в отличие от остальных членов уравнения. Как показано выше, эта нелинейная модуляция частоты имеет резонансную природу и поэтому определяет доминирующий кубичный член в правой части (20). Изменением \mathcal{G} пренебрегаем.

Считаем далее, что расстройка $\tilde{\nu}$ поля U достаточно велика, чтобы можно было пренебречь нелинейным сдвигом частоты, т. е.

$$|\tilde{g}_2^2 U |\mathcal{E}|^2| \ll |\tilde{\nu} U|. \quad (22)$$

Перейдем от переменных \mathcal{E}, U, t, x к переменным Q, U, τ, z :

$$\mathcal{E} = \tilde{\rho} Q \exp(-2i\tilde{\nu} t), \quad U = \tilde{\delta} U \exp(-i\tilde{\nu} t), \quad (23)$$

$$t - x/v_0 = \tilde{\kappa} \tau, \quad z = \zeta_0 x,$$

где

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\frac{2\zeta_0}{\tilde{\alpha} + 2\tilde{\nu}}}, \quad \tilde{\kappa} = \sqrt{\frac{D}{\zeta_0}},$$

$$\tilde{\delta}^2 = \frac{\sqrt{2\zeta_0}}{\tilde{\gamma}_1 G \sqrt{\tilde{\alpha} + 2\tilde{\nu}}},$$

$$\frac{1}{v_0} = \frac{4\tilde{\beta}D\tilde{\nu}^2}{\tilde{\alpha} + 2\tilde{\nu}} - D\tilde{\nu}, \quad \zeta_0 = \frac{\tilde{g}_1^2\sqrt{\tilde{\alpha} + 2\tilde{\nu}}}{\tilde{\beta}\sqrt{2D}\gamma_1 G}.$$

Тогда окончательно система (20), (21) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \partial_z Q - \alpha_{2,3} \{ \partial_{\tau\tau}^2 Q - 2i(|Q|^2 - |Q^\pm|^2) Q + \\ + g^2 \partial_\tau [(|Q|^2 - |Q^\pm|^2) Q] \} = \\ = \alpha_{1,2} (2U^2 + 2ig^2 Q|U|^2), \quad z \geq 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\alpha_{1,2} (\partial_\tau U + hQ\bar{U}) = 0, \quad z \geq 0, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} h = \frac{\tilde{\gamma}_2 G \sqrt{2D}}{\sqrt{\tilde{\alpha} + 2\tilde{\nu}}}, \quad |Q^\pm|^2 = \frac{2D\tilde{\nu}^2}{\zeta_0}, \\ g^2 = \frac{2\tilde{\beta}\sqrt{\zeta_0}}{\sqrt{D}(\tilde{\alpha} + 2\tilde{\nu})}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь и далее $\alpha_{1,2} = \theta(z)\theta(-z + z_2)$, $\alpha_{2,3} = \theta(z - z_2)$. Для применимости МОЗР к (24), (25) необходимо наложить следующее ограничение на коэффициент модели:

$$h = 1. \quad (27)$$

Условие (27) может быть выполнено при определенном выборе расстройки $\tilde{\nu}$ и (или) амплитуды дополнительного поля G .

Система (24), (25) инвариантна относительно следующих одновременных преобразований:

$$\begin{aligned} z \rightarrow \tilde{z} = z + (1 - f^2)\tau/g^2, \\ Q \rightarrow \tilde{Q} = Q \exp[-2i(1 - f^2)z], \\ U \rightarrow \tilde{U} = U \exp[-i(1 - f^2)z], \\ Q^\pm \rightarrow \tilde{Q}^\pm = fQ^\pm, \end{aligned} \quad (28)$$

где f — произвольная действительная константа. Условия, использованные выше для вывода интегрируемой системы (24), (25), ограничивают, очевидно, ее применимость. Однако интегрируемость модели позволяет провести аналитический анализ вида нелинейной динамики полей, который не удается выполнить для неинтегрируемых моделей. Исследование модели позволяет аналитически определить качественные характеристики генерируемых пакетов импульсов в близких системах, поскольку автомодельные решения интегрируемых моделей, как правило, сохраняют свои характерные особенности при небольшом отклонении от условий интегрируемости. Эти решения могут быть использованы и как тестовые при численном моделировании. Анализ

влияния отклонения от условий интегрируемости на форму решений может быть проведен с использованием теории возмущений. Отметим, что такой анализ был выполнен для модели, объединяющей систему уравнений Максвелла–Блоха и нелинейное уравнение Шредингера, в работе [27]. В этой работе было показано, что при малом нарушении условия интегрируемости, аналогичного условию (27), в первом приближении не происходит изменения существенных свойств солитонов, в частности, его амплитуда и скорость не изменились. Аналогичных результатов следует ожидать и для рассматриваемой здесь составной модели.

Сформулируем теперь начально-краевую задачу для составной модели (24), (25), которая решается в остальной части работы. Поскольку предполагается интегрируемость составной модели, достаточно сформулировать условия для $\tau = 0$ и $z = z_1 = 0$. Действительно, условие интегрируемости посредством МОЗР предполагает существование представления Лакса вида (1), (2), которое является аналогом разделения переменных. В этом случае зависимость решения от z полностью определяется зависимостью от z данных рассеяния, которая для рассматриваемой задачи сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для матрицы рассеяния, см. ниже уравнение (44). Решение этого уравнения обладает следующим очевидным свойством: значение матрицы рассеяния в точке $z = z_2$ (т. е. на конце резонансной среды) является граничным значением для матрицы рассеяния, описывающей эволюцию во второй — керровской — среде. Таким образом, достаточно задать граничное условие в точке $z = z_1$, поскольку при этом граничное значение для керровской среды в точке $z = z_2$ определено эволюцией поля в резонансной среде, т. е. в рамках интегрируемой модели решением уравнения (44) в этой точке. Подчеркнем, что это свойство является следствием интегрируемости всей составной модели как целого. Начальные условия для поля должны быть общими для обеих сред, поскольку спектральная задача является общей для обеих моделей взаимодействия поля в резонансной и керровской средах.

Для простоты выбираем начальные условия, которые отвечают тривиальной асимптотике на $\tau \rightarrow \infty$ и $\tau = 0$. В общем случае аппарат МОЗР, приведенный в следующих двух разделах, отвечает следующим начально-краевым условиям:

$$q^\pm = 0, \quad q(\tau, 0) = q_0(\tau), \quad \infty > \tau > 0,$$

$$\begin{aligned} q_0(0) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} q(\tau, z) = 0, \quad \forall z, \\ U(0, z) = U_0(z), \quad q(0, z) = 0, \quad 0 \leq z \leq z_2, \\ U(0, z) = 0, \quad q(0, z) = q_1(z), \quad z > z_2, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$q = \frac{Q}{ig}, \quad q^\pm = \frac{Q^\pm}{ig}.$$

Константа g , такая что $\text{Im } g^2 = 0$, определена в (24), (25). Функция $U_0(z)$ задана на конечном интервале, ограничена и достаточно быстро убывает на бесконечности. Функции $q_0(\tau)$, $q_1(z)$ — достаточно гладкие и ограниченные, см. ниже. Этот аппарат позволяет находить солитонные и другие родственные решения, обращающиеся в нуль на бесконечности, а также радиационное решение. В разд. 6 решается частная краевая задача, отвечающая условиям

$$q_0 \equiv 0, \quad q_1 \equiv 0, \quad \partial z(U_0/|U_0|) = 0.$$

4. ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЫ ВКИ

Представление Лакса для интегрируемой составной модели (24), (25) следующее:

$$\begin{aligned} \partial_\tau \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda^2 - ig^{-2} & \lambda q \\ \lambda \bar{q} & i\lambda^2 + ig^{-2} \end{pmatrix} \Phi \equiv \\ \equiv \mathcal{L}_c \Phi, \quad \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \partial_z \Phi = \frac{i\alpha_{1,2}(z)\lambda g^3}{\lambda^2 g^2 + 1} \begin{pmatrix} \lambda g|U|^2 & iU^2 \\ i\bar{U}^2 & -\lambda g|U|^2 \end{pmatrix} \Phi + \\ + \alpha_{2,3}(z) \begin{pmatrix} -iH_{11} & H_{12} \\ H_{21} & iH_{11} \end{pmatrix} \Phi \equiv \mathcal{A}_c \Phi, \end{aligned} \quad (31)$$

здесь λ — спектральный параметр,

$$\begin{aligned} H_{11} &= \\ &= \left[2(\lambda^2 + g^{-2})^2 - |q^\pm|^2(2\lambda^2 + g^{-2}) - \lambda^2|q|^2 \right], \\ H_{12} &= \\ &= \lambda \left[2q(\lambda^2 + g^{-2} - |q^\pm|^2) + i\partial_\tau q - |q|^2 q \right], \\ H_{21} &= \\ &= \lambda \left[2\bar{q}(\lambda^2 + g^{-2} - |q^\pm|^2) - i\partial_\tau \bar{q} - |q|^2 \bar{q} \right], \end{aligned} \quad (32)$$

черта сверху означает комплексное сопряжение. Интегрируемая система (24), (25) и ее представление Лакса приводятся впервые. При $g = 0$ эта система

сводится к известной системе, объединяющей уравнения генерации второй гармоники без учета керровской нелинейности и нелинейное уравнение Шредингера.

Приведем основные сведения из аппарата МОЗР для спектральной проблемы ВКИ (30) для полубесконечного интервала [$\tau_1 = 0, \tau_2 = \infty$].

Для функции $q(\tau, z)$, достаточно быстро убывающей при $\tau \rightarrow \infty$ (т. е. она и все ее производные убывают быстрее любой положительной степени τ), определим векторные функции $\psi^\pm(\tau, z; \lambda)$ и $\phi^\pm(\tau, z; \lambda)$ как функции Йоста системы

$$(\partial_\tau - \mathcal{L}_c(\tau, z; \lambda))\psi^\pm(\tau, z; \lambda) = 0,$$

$$(\partial_\tau - \mathcal{L}_c(\tau, z; \lambda))\phi^\pm(\tau, z; \lambda) = 0$$

(см. (30)) со значениями на концах полубесконечного интервала:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \psi^+(\tau, z; \lambda) &= (0, 1)^T e^{i\Lambda^2 \tau}, \\ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \psi^-(\tau, z; \lambda) &= (1, 0)^T e^{-i\Lambda^2 \tau}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\phi^+(0, z; \lambda) = (1, 0)^T, \quad \phi^-(0, z; \lambda) = (0, -1)^T, \quad (34)$$

где $\Lambda^2 = \lambda^2 + g^{-2}$, верхние индексы \pm означают, что функция аналитична в $\text{Im } \lambda^2 \gtrless 0$, соответственно, индекс T означает транспонирование. Из теоремы Коши следует, что условие (34) выполняется $\forall \tau < 0$.

Функции Йоста связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \psi^\pm(\tau, z; \lambda) &= \mp a^\pm(z; \lambda)\phi^\mp(\tau, z; \lambda) + \\ &+ b^\mp(z; \lambda)\phi^\pm(\tau, z; \lambda), \quad \text{Im } \lambda^2 = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где a^\pm, b^\pm — комплексные скалярные функции от λ и z . Верхний индекс означает, что функция аналитически продолжаема в соответствующую полуплоскость комплексной плоскости λ^2 . Например, $a^\pm(\lambda)$ аналитически продолжаема в область, где $\text{Im } \lambda^2 \gtrless 0$.

При $\lambda \rightarrow \infty$ и $\text{Im } \lambda^2 > 0$ имеем

$$a^+(\lambda) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2}),$$

$$\psi^+(\tau, z; \lambda)e^{-i\Lambda^2 z} = \left(\frac{q(\tau, z)}{2\lambda}, 1 \right)^T + \mathcal{O}(\lambda^{-2}),$$

$$\phi^+(\tau, z; \lambda)e^{i\Lambda^2 z} = \left(1, \frac{\bar{q}(\tau, z)}{2\lambda} \right)^T + \mathcal{O}(\lambda^{-2}),$$

для $\lambda \rightarrow \infty, \text{Im } \lambda^2 < 0$

$$a^-(z; \lambda) = 1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2}),$$

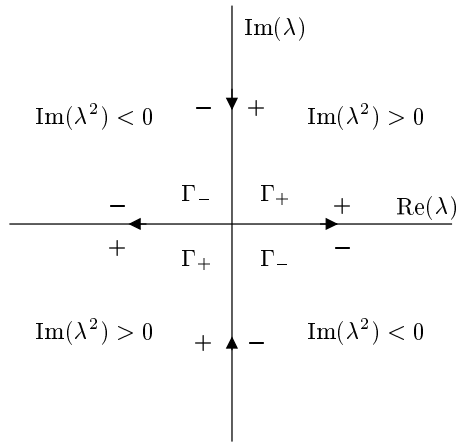


Рис. 1. Непрерывный спектр $\hat{\Gamma} : \{\lambda, \text{Im } \lambda^2 = 0\}$ и контуры интегрирования Γ_{\pm}

$$\psi^-(\tau, z; \lambda)e^{i\Lambda^2 z} = \left(1, \frac{\bar{q}(\tau, z)}{2\lambda}\right)^T + \mathcal{O}(\lambda^{-2}),$$

$$\phi^-(\tau, z; \lambda)e^{-i\Lambda^2 z} = -\left(\frac{q(\tau, z)}{2\lambda}, 1\right)^T + \mathcal{O}(\lambda^{-2}),$$

а при $\text{Im } \lambda^2 = 0$

$$\begin{aligned} a^+(\lambda)a^-(\lambda) + b^+(\lambda)b^-(\lambda) &= 1, \\ a^+(\lambda) &= \overline{a^-(\bar{\lambda})}, \\ b^+(\lambda) &= -\overline{b^-(\bar{\lambda})}, \quad a^{\pm}(-\lambda) = a^{\pm}(\lambda), \\ b^{\pm}(\lambda) &= -b^{\pm}(-\lambda), \\ a^+(\lambda)a^-(\lambda) + b^+(\lambda)b^-(\lambda) &= 1, \\ a^+(\lambda) &= \overline{a^-(\bar{\lambda})}, \quad b^+(\lambda) = \overline{-b^-(\bar{\lambda})}, \\ a^{\pm}(-\lambda) &= a^{\pm}(\lambda), \quad b^{\pm}(\lambda) = -b^{\pm}(-\lambda). \end{aligned} \tag{36}$$

Выражения (36) справедливы в плоскости λ на контуре $\hat{\Gamma} = \{\lambda; \text{Im } \lambda^2 = 0\}$, который ориентирован как показано на рис. 1. Черта сверху, как и выше, означает комплексное сопряжение.

Положим

$$\psi(\tau, z; \lambda) \equiv \mu(\tau, z; \lambda) \exp(-i\Lambda^2 \tau \sigma_3),$$

$\sigma_3 = \text{diag}(1, -1)$ — матрица Паули. Определим для $\text{Im } \lambda^2 > 0$

$$\mu^+(\tau, z; \lambda) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\phi_1^+(\tau, z; \lambda)}{a^+(\lambda, t)} & \psi_1^+(\tau, z; \lambda) \\ \frac{\phi_2^+(\tau, z; \lambda)}{a^+(\lambda, t)} & \psi_2^+(\tau, z; \lambda) \end{pmatrix} \times \exp(i\Lambda^2 \tau \sigma_3),$$

а для $\text{Im } \lambda^2 < 0$

$$\mu^-(\tau, z; \lambda) \equiv \begin{pmatrix} \psi_1^-(\tau, z; \lambda) & -\frac{\phi_1^-(\tau, z; \lambda)}{a^-(\lambda, t)} \\ \psi_2^-(\tau, z; \lambda) & -\frac{\phi_2^-(\tau, z; \lambda)}{a^-(\lambda, t)} \end{pmatrix} \times \exp(i\Lambda^2 \tau \sigma_3).$$

Введем коэффициент рассеяния

$$\rho^{\pm}(\lambda) = b^{\pm}(\lambda)/a^{\pm}(\lambda),$$

аналитические свойства которого следуют из приведенных выше формул. Далее, чтобы не писать верхние индексы, обозначим $\rho(\lambda) \equiv \rho^-(\lambda)$. Тогда 2×2 -матричная функция $\mu(\tau, z; \lambda)$ ($\det \mu(\tau, z; \lambda) = 1$) является решением следующей задачи Римана–Гильберта:

1. $\mu(\tau, z; \lambda)$ голоморфна $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \hat{\Gamma}$;
2. $\mu(\tau, z; \lambda)$ удовлетворяет условию

$$\mu^+(\tau, z; \lambda) = \mu^-(\tau, z; \lambda)E(\tau; \lambda)^{-1}G(\lambda)E(\tau; \lambda), \quad \lambda \in \hat{\Gamma}, \tag{37}$$

где

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \overline{\rho(\bar{\lambda})}\rho(\lambda) & \rho(\lambda) \\ -\overline{\rho(\bar{\lambda})} & 1 \end{pmatrix},$$

$$E(\tau; \lambda) = \exp(i\Lambda^2 \tau \sigma_3);$$

здесь $\rho(\lambda)$ определено для $\lambda \in \hat{\Gamma}$ и обладает свойством $\rho(-\lambda) = -\rho(\lambda)$;

3. для $\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \hat{\Gamma}$,

$$\mu(\tau, z; \lambda) = \mathbf{I} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}),$$

\mathbf{I} — единичная матрица. Эти свойства следуют из определения $\mu(\tau, z; \lambda)$ для $\text{Im } \lambda^2 \gtrless 0$ и аналитических свойств функций Йоста. Пусть интеграл от модуля ρ как функции λ по всем значениям переменной $\lambda \in \hat{\Gamma}$ ограничен. Тогда задача Римана–Гильберта, сформулированная выше, однозначно разрешима:

$$\psi(\tau, z; \lambda) \equiv \mu(\tau, z; \lambda) \exp(-i\Lambda^2 \tau \sigma_3)$$

— решение системы (30), (31),

$$\begin{aligned} q(\tau, z) &\equiv 2i \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda \mu(\tau, z; \lambda))_{12}, \\ \bar{q}(\tau, z) &\equiv -2i \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda \mu(\tau, z; \lambda))_{21}, \end{aligned} \tag{38}$$

а $\mu(\tau, z; \lambda)$ обладает следующими свойствами симметрии:

$$\mu(\tau, z; -\lambda) = \sigma_3 \mu(\tau, z; \lambda) \sigma_3,$$

$$\mu(\tau, z; \lambda) = \overline{\sigma_1 \mu(\tau, z; \bar{\lambda}) \sigma_1},$$

где σ_1 — матрица Паули. Разрешимость задачи Римана–Гильберта $\forall z$ следует из ограниченности интеграла от модуля ρ по $\lambda \in \hat{\Gamma}$ (детали см. в [16, 28–31]). Условия (38) следуют из (30) и разложения функций $\Phi_{1,2}$ по λ^{-1} при $\lambda \rightarrow \infty$.

Решение задачи Римана–Гильберта (37) для рассматриваемого случая известно. Оно сводится к решению интегральных уравнений Вольтерра. Для $a(\lambda) \neq 0$ из (37) находим уравнения Вольтерра (см., например, [11, 30, 31]):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1^+(\tau, z; \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_+} \bar{\rho}(z; \lambda) \times \\ &\times \exp(2i\tau\Lambda^2) \bar{\psi}_2^-(\tau, z; \lambda) \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2^-(\tau, z; \lambda) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_-} \rho(z; \lambda) \times \\ &\times \exp(-2i\tau\Lambda^2) \bar{\psi}_1^+(\tau, z; \lambda) \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda}, \end{aligned} \quad (40)$$

где $\Lambda^2 = \zeta^2 + g^{-2}$. Γ_+ — контур интегрирования, который объединяет пути вдоль осей в первом и третьем квадрантах плоскости λ (см. рис. 1) и связывающие их дуги на бесконечности, лежащие в этих же квадрантах; Γ_- — аналогичный контур, расположенный во втором и третьем квадрантах плоскости λ . Таким образом, задача свелась к решению интегральных уравнений (39), (40). Пусть в конечном числе изолированных невырожденных полюсов λ_k , $k = 1, 2, \dots$, коэффициент $a(z; \lambda_k) = 0$ и $\text{Im } \lambda^2 \neq 0$. Тогда сумма по вычетам во всех этих полюсах должна быть добавлена к интегралам в правых частях (39), (40).

Для нахождения решения составной эволюционной модели (24), (25) для поля $q(\tau, z)$ с помощью МОЗР следует найти решение уравнений (39), (40) с учетом зависимостей $\rho = \bar{b}/a$, $\bar{\rho} = b/a$ от z и затем восстановить $q(\tau, z)$, используя уравнения (38).

5. ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА ρ ОТ z

Следующий шаг процедуры МОЗР состоит в нахождении зависимости от z требуемых для решаемой задачи спектральных данных. Далее опускаем верхние индексы \pm . Рассмотрим вначале общий случай и найдем зависимость коэффициентов a , \bar{b} от λ для N различных оптических сред, расположенных

на N интервалах $[z_i, z_{i+1}]$. Для этого перепишем (35) в матричном виде:

$$\psi(\tau, z; \lambda) = \phi(\tau, z; \lambda) T(z; \lambda). \quad (41)$$

Из свойств симметрии конкретной спектральной задачи (30) следует, что матрица T имеет вид

$$T(z, \lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Подставляя (41) в (30), находим

$$\frac{\partial}{\partial z} T(z; \lambda) = \tilde{A}^+ T(z; \lambda) - T(z; \lambda) \tilde{A}, \quad (43)$$

где

$$\tilde{A}^+(z; \lambda) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E^{-1}(\tau; \lambda) \mathcal{A}(\tau, z; \lambda) E(\tau, \lambda),$$

$$\tilde{A}(z; \lambda) = E^{-1}(0, \lambda) \mathcal{A}(0, z, \lambda) E(0, \lambda),$$

$$E(\tau, \lambda) = \exp[i\sigma_3 \tau (\lambda^2 + g^{-2})],$$

здесь \mathcal{A} — произвольная 2×2 -матрица, σ_3 — матрица Паули.

Рассмотрим один конечный интервал $[\tau_1 = 0, \tau_2]$. В этом случае $\beta_{1,2}(\tau) \neq 0$, т. е. в (1) $L_j \equiv 0$ при $j > 1$. В дальнейшем мы перейдем к пределу $\tau_2 \rightarrow \infty$. Мы рассматриваем N интервалов $[z_i, z_{i+1}]$ по переменной z . В этом случае $\alpha_{i,i+1}(z) \neq 0$. Тогда зависимость матрицы T от z определяется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} T(z; \lambda) &= E^{-1}(\tau_2; \lambda) \mathcal{A}(\tau_2, z; \lambda) E(\tau_2; \lambda) T(z; \lambda) - \\ &- T(z; \lambda) E^{-1}(0; \lambda) \mathcal{A}(0, z; \lambda) E(0; \lambda). \end{aligned} \quad (44)$$

Введем функции

$$\mathcal{B}(y, z) = \int_0^z E^{-1}(y; \lambda) \sum_{i=1}^N \alpha_i(z) A_i(y, z; \lambda) E(y; \lambda),$$

$$\mathcal{B}_i(y, z) = \int_{z_i}^z E^{-1}(y; \lambda) A_i(y, z; \lambda) E(y; \lambda),$$

$$z_i \leq z < z_{i+1}.$$

Тогда формальное решение (44) имеет вид

$$\begin{aligned} T_{i+1}(z; \lambda) &= \exp[\mathcal{B}(\tau_2, z)] T_1(0, \lambda) \exp[-\mathcal{B}(0, z)] = \\ &= \exp[\mathcal{B}_i(\tau_2, z)] T_i(z_i, \lambda) \exp[-\mathcal{B}_i(0, z)] = \\ &= \exp[\mathcal{B}_i(\tau_2, z)] \dots \exp[\mathcal{B}_1(\tau_2, z)] T_1(z_1; \lambda) \times \\ &\times \exp[-\mathcal{B}_1(0, z)] \dots \exp[-\mathcal{B}_i(0, z)]. \end{aligned} \quad (45)$$

Из этого решения видно, что эволюция $T(z, \lambda)$ на интервале $[z_i, z_{i+1}]$ определяется формулой (45) с граничным условием $T(z_i, \lambda)$.

При $\tau_2 \rightarrow \infty$ справедливо

$$\mathcal{A}_{12}(\tau_2, z; \lambda) = \mathcal{A}_{21}(\tau_2, z; \lambda) = 0$$

($A_{12,21}$ — недиагональные элементы матрицы \mathcal{A}), при этом из уравнения (44) следует

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{T}_{1,k}(z; \lambda) = -\mathcal{T}_{1,k}(z; \lambda) \tilde{A}_k(0, z; \lambda), \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,k} = \\ = \exp \left[-i\sigma_3 \int_0^z \sum_{i=1}^k \alpha_{i,i+1}(s) \lim_{\tau_2 \rightarrow \infty} (A_i)_{11}(\tau_2, s; \lambda) ds \right] \times \\ \times \mathcal{T}_{1,k}, \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_k(0, z; \lambda) = E^{-1}(0; \lambda) A_k(0, z; \lambda) E(0; \lambda).$$

Формула (46) описывает динамику матрицы $\mathcal{T}_{1,k}$ в интервале $[z_k, z_{k+1}]$ с граничным значением $\mathcal{T}_{1,k-1}$, $k > 2$.

Формальное решение (46) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,N} = \mathcal{T}_{1,2} \mathcal{T}_{2,3} \dots \mathcal{T}_{N-1,N}, \\ \mathcal{T}_{i,i+1}(z; \lambda) = \exp \left[\int_{z_i}^{z_{i+1}} \alpha_{i,i+1}(s) \tilde{A}_i(0, s; \lambda) ds \right]. \quad (47) \end{aligned}$$

Перейдем к случаю двух разных сред, расположенных на интервалах $[z_1, z_2]$ и $[z_2, z_3]$. Приведем решение (44) для элементов матрицы T в случае произвольной 2×2 -матрицы $\mathcal{A}(0, z; \lambda)$, такой что $\det \mathcal{A}(0, z; \lambda) \neq 0 \forall z$, которая постоянна на интервалах $[0, z_2]$ и $[z_2, \infty)$ и меняется скачком в точке

$z = z_2$. Выберем без потери общности $\tilde{a}_i(z) \equiv 1$, $i = 1, 2$. Для условий (54) решение (44) для $z \geq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} a(z; \lambda) = \frac{a_0}{2\Omega} \left\{ \left[(\Omega + \tilde{A}_{11}) + \rho_0 \tilde{A}_{21} \right] \times \right. \\ \times \exp(-z\Omega - \Theta(z)) + \\ \left. + \left[(\Omega - \tilde{A}_{11}) - \rho_0 \tilde{A}_{21} \right] \exp(z\Omega - \Theta(z)) \right\}, \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b}(z; \lambda) = \frac{a_0}{2\Omega} \left\{ \left[(\Omega - \tilde{A}_{11}) \rho_0 + \tilde{A}_{12} \right] \times \right. \\ \times \exp(-z\Omega - \Theta(z)) + \\ \left. + \left[(\Omega + \tilde{A}_{11}) \rho_0 - \tilde{A}_{12} \right] \exp(z\Omega - \Theta(z)) \right\}, \quad (49) \end{aligned}$$

где \tilde{A}_{ij} — элементы матрицы $\tilde{A}(\tau = 0)$ (см. (43)), которые также изменяются скачкообразно в точке $z = z_2$, $\tilde{A}_{11} = -\tilde{A}_{22}$,

$$\Omega^2(z) = \tilde{A}_{11}^2(0, z; \lambda) + \tilde{A}_{12}(0, z; \lambda) \tilde{A}_{21}(0, z; \lambda),$$

$$\rho_0(\lambda) = \rho(z = 0, \lambda) = \frac{\bar{b}_0}{a_0},$$

$$\Theta(z) = \int_0^z \tilde{A}_{11}^+(s; \lambda) ds.$$

Окончательно для коэффициента $\rho(z; \lambda)$ получаем

$$\rho(z; \lambda) = \frac{\bar{b}}{a} = \frac{\left[(\Omega - \tilde{A}_{11}) \rho_0 + \tilde{A}_{12} \right] e^{-2\Omega z} + \left[(\Omega + \tilde{A}_{11}) \rho_0 - \tilde{A}_{12} \right]}{\left[(\Omega + \tilde{A}_{11}) + \rho_0 \tilde{A}_{21} \right] e^{-2\Omega z} + \left[(\Omega - \tilde{A}_{11}) - \rho_0 \tilde{A}_{21} \right]}. \quad (50)$$

Коэффициент $\rho_0(\lambda)$ находится из спектральной задачи (30) для заданного потенциала $q(\tau, 0)$. Легко показать, что если $q(\tau, 0) \equiv 0$, то $\rho_0 = 0$. В последнем случае решение модели определяется только граничными условиями.

Для рассматриваемой физической модели (24), (25) и конкретных начально-краевых условий (54), при $z > z_2$ (см. следующий раздел) недиагональные элементы матрицы \mathcal{A}_c (см. линейную систему (31)) равны нулю. Из приведенных выше формул следует, что зависимость T от z при $z > z_2$ определяется выражением

$$T(z; \lambda) = T_+(z_2, z) T(z_2; \lambda) T_+^{-1}(z_2, z), \quad (51)$$

где $T_+(z_2, z)$ — решение линейной системы (31)

для нулевых недиагональных элементов матрицы $\mathcal{A}_c(\tau_2, z; \lambda)$:

$$T_+(z_2, z; \lambda) = e^{-i2\sigma_3 \Lambda^4 z}, \quad z > z_2. \quad (52)$$

Для коэффициентов матрицы T (42) в этом случае находим

$$\frac{\bar{b}}{a}(z, \lambda) = \frac{\bar{b}_2}{a_2} \exp(4i\Lambda^4 z), \quad z > z_2, \quad (53)$$

где a_2, \bar{b}_2 — элементы матрицы $T(0, z_2, \lambda)$. Из последней формулы следует, что граничное условие для среды, расположенной на интервале $[z_2, z_3]$, в рассматриваемом примере составной модели определяется зависимостью коэффициента ρ от z в среде, расположенной на интервале $[z_1, z_2]$.

6. КВАЗИРАДИАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ СОСТАВНОЙ МОДЕЛИ

Покажем, что квазирадиационное решение для основного поля $q = Q/ig$ в составной модели (24), (25) может генерироваться дополнительным полем U для нулевых начальных и граничных значений основного поля. С этой целью выберем следующие начально-краевые условия:

$$\begin{aligned} q^\pm &= 0, \quad q(\tau, 0) = 0, \\ \tau &\geq 0, \quad q(0, z) = 0 \quad \forall z, \\ U(0, z) &= U_0 \neq 0, \quad \partial_z \frac{U_0}{|U_0|} = 0, \\ z_1 &= 0 \leq z \leq z_2, \quad U(0, z) = 0, \quad z > z_2. \end{aligned} \tag{54}$$

Линейный анализ устойчивости решения $q(\tau, z) \equiv 0$ уравнения (24) для $z > z_2$ показывает, что это решение устойчиво, поэтому считаем, учитывая (54), что справедливо

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} q(\tau, z) = 0 \quad \forall z.$$

Далее покажем, что начально-краевые условия (54) приводят к квазирадиационному решению модели для достаточно большой эффективной длины резонансной нелинейной среды.

Далее для применения уравнений (39), (40) в рамках МОЗР остается найти $\rho(z; \lambda)$ и положение нулей $a(\lambda)$. Используя решение (50), находим для модели (24), (25) и условий (54)

$$T(z; \lambda) = s_0 \begin{pmatrix} \left[\text{cth}(\Omega\tau) - \frac{(\mathcal{A}_0)_{11}}{\Omega} + \rho_0 \frac{(\mathcal{A}_0)_{21}}{\Omega} \right] e^{i\Theta} & \left\{ \rho_0 \left[\text{cth}(\Omega\tau) + \frac{(\mathcal{A}_0)_{11}}{\Omega} \right] - \frac{(\mathcal{A}_0)_{12}}{\Omega} \right\} e^{i\Theta} \\ \left\{ \bar{\rho}_0 \left[\text{cth}(\Omega\tau) - \frac{(\mathcal{A}_0)_{11}}{\Omega} \right] - \frac{(\mathcal{A}_0)_{21}}{\Omega} \right\} e^{-i\Theta} & \left\{ \text{cth}(\Omega\tau) + \frac{(\mathcal{A}_0)_{11}}{\Omega} \right\} - \bar{\rho}_0 \frac{(\mathcal{A}_0)_{12}}{\Omega} \right\} e^{-i\Theta} \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Здесь

$$s_0 = a_0 \text{sh}(\Omega\tau), \quad \Theta = \int_0^z (\mathcal{A}_\infty)_{11}(s; \lambda) ds,$$

$(\mathcal{A}_0)_{ij}$ и $(\mathcal{A}_\infty)_{11}$ — элементы матрицы $\mathcal{A}_c(z, \tau; \lambda)$ (31) соответственно при $\tau = 0$ и $\tau = \infty$,

$$\Omega = \frac{i}{\Lambda^2} \left\{ \alpha_{1,2}(z) [(1 - g^2\Lambda^2) |U_0|^2 + \alpha_{2,3}(z) 2\Lambda^6]^2 - \alpha_{1,2}(z) (1 - g^2\Lambda^2) |U_0|^4 \right\}^{1/2},$$

$$(\mathcal{A}_0)_{11} = -\alpha_{1,2}(z) i |U_0|^2 \frac{1 - g^2\Lambda^2}{\Lambda^2} - 2\alpha_{2,3}(z) i \Lambda^4.$$

Выражение для $(\mathcal{A}_0)_{12}$ не приводим, так как в явном виде оно ниже не используется.

Уравнение, определяющее положение полюсов, т. е.

$$T_{11}(z; \lambda) = 0,$$

принимает вид

$$a_0 \left[\text{cth}(\Omega\tau) - \frac{(\mathcal{A}_0)_{11}}{\Omega} \right] + \bar{b}_0 \frac{(\mathcal{A}_0)_{21}}{\Omega} = 0. \tag{56}$$

Те из решений, которые лежат в первом и третьем квадрантах (см. рис. 1), отвечают солитонным решениям. Из (56) следует, что при $\bar{b}_0(\mathcal{A}_0)_{21} \neq 0$ положения полюсов определяются как решением спектральной проблемы (30), так и решением дополнительной проблемы (31). Поскольку в (54) $q(0, z) \equiv 0$, получаем $\rho_0 = 0$. При этом положение полюсов в

комплексной области в точке z определяется уравнением

$$\text{cth}(\Omega z) - \frac{(\mathcal{A}_0)_{11}}{\Omega} = 0, \tag{57}$$

в котором

$$(\mathcal{A}_0)_{ij}(z) \equiv (\mathcal{A}_0)_{ij}(z_2), \quad \forall z \in [z_1, z_2].$$

Для границы резонансной среды $z = z_2$ уравнение (57) принимает вид

$$\text{cth}(i\zeta L_0) = \zeta, \tag{58}$$

где

$$\zeta = \pm \frac{\sqrt{g^2\Lambda^2 - 1}}{g\Lambda},$$

$L_0 = z_2 |U_0|^2 g^2$ — эффективная длина резонансной среды. Это уравнение имеет счетное множество решений $\zeta(n)$ (n — целое число), удовлетворяющих уравнению

$$\zeta(n) + \frac{i}{L_0} \ln \frac{\zeta(n) + 1}{\zeta(n) - 1} = \frac{\pi n}{L_0}. \tag{59}$$

Численное решение уравнения (59) приводится на рис. 2. Обнаружено, что для $L_0 \ll 1$ мнимая часть $\zeta(n)$ с ростом n стремится к постоянной величине. При $L_0 \gg 1$ можно с точностью $\mathcal{O}(1/(L_0 \ln L_0))$ считать, что

$$\text{Im} \zeta(n) = 0, \quad \text{Re} \zeta(n) = \zeta(0) + n\pi/L_0. \tag{60}$$

Итак, решение интегральных уравнений (39), (40) для $z \in [0, z_2]$ описывает динамику поля в резонансной среде. Зависимость ρ от z в этом интервале приводит к бесконечной серии полюсов (59). Вне этого интервала зависимость коэффициента ρ от z имеет простой вид (см. (53)):

$$\begin{aligned} \rho(z; \lambda) &= \rho(z_2) \exp \left[4i (\lambda^2 + g^{-2})^2 y \right] = \\ &= \rho(z_2) \exp(4i\Lambda^4 y), \quad y = z - z_2, \quad z > z_2. \end{aligned} \quad (61)$$

Для решения уравнений (39), (40) предварительно вычислим сумму по вычетам в полюсах λ_n . Эти полюсы связаны с ζ_n , входящими в уравнение (59) следующим образом:

$$\lambda_n^2 = \frac{g^{-2}\zeta^2(n)}{1 - \zeta^2(n)}.$$

Перепишем правую часть уравнения (39) в виде

$$\begin{aligned} F_1(\tau, z; \xi) &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i\Lambda_n^2 \tau + 4i\Lambda_n^4 (z - z_2)\theta(z - z_2)]}{\xi - \lambda_n} \times \\ &\times \frac{(c_1(\lambda_n) + c_2(\lambda_n)) \exp[2iL_0\Omega(\lambda_n)]}{c_4(\lambda_n) \exp[2iL_0\Omega(\lambda_n)]} \psi_2(\tau; \lambda_n), \end{aligned} \quad (62)$$

где ξ — произвольная комплексная переменная,

$$\begin{aligned} \Omega'(\lambda_n) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{\partial}{\partial \lambda} \Omega(\lambda), \\ \exp(2iL\Omega(\lambda_n)) &= -\frac{c_3(\lambda_n)}{c_4(\lambda_n)}, \quad \Lambda_n^2 = \lambda_n^2 + g^{-2}. \end{aligned}$$

Зависимости c_i , $i = 1, \dots, 4$, от λ при $b_0(z; \lambda) = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} c_1(\lambda) &= (\mathcal{A}_1)_{12} = -c_2(\lambda), \quad c_3(\lambda) = \Omega + (\mathcal{A}_1)_{11}, \\ c_4(\lambda) &= \Omega - (\mathcal{A}_1)_{11} \end{aligned}$$

(эти коэффициенты — результат подстановки решения (50)); $(\mathcal{A}_1)_{ij}$ — элемент матрицы \mathcal{A}_c (31) в точке $\tau = 0$, $z = z_1$. Таким образом, первый множитель в сумме (62) отвечает эволюции поля \mathcal{U} во второй среде ($z > z_2$), а второй множитель ассоциируется с эволюцией в первой среде.

Рассмотрим случай большой эффективной длины резонансной среды, $L_0 \gg 1$. Подставляем зависимость λ_n^2 от n , следующую из (60), в (62). Учитывая, что при больших L_0 все коэффициенты в сумме (62) изменяются монотонно и каждый член

суммы пропорционален L_0^{-1} , в пределе $L_0 \rightarrow \infty$ переходим в (62) от суммы по n к интегралу по непрерывной переменной $\mu = n\pi/L_0$:

$$\begin{aligned} F_1(\tau, z; \xi) &= \\ &= g \int_{-+} \frac{\exp(2iX^2\tau + 4iX^4y)}{\xi - \lambda} \frac{\psi_1(\tau; \mu)\mu d\mu}{\pi(1 - \mu^2)^3} = \\ &= \frac{g^3}{2\pi} \int_{-+} \frac{\exp(2i\tau X^2 + 4iX^4y)}{\xi - \chi} \psi_1(\tau; \chi) dX^2, \\ & \quad z > z_2. \end{aligned} \quad (63)$$

Здесь

$$X^2 = g^{-2}(1 - \mu^2)^{-2} + g^{-2} = \chi^2 + g^{-2}, \quad y = z - z_2 > 0.$$

Аналогично вычисляем интеграл в уравнении (40). В итоге получаем приближенные, справедливые в области $z > z_2$ с точностью $O(1/L_0 \ln L_0)$ сингулярные интегральные уравнения

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1^+(\tau, y; \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_+} \bar{\rho}_{eff}(\chi) \times \\ &\times \exp(2i\tau X^2 + 4iX^4y) \bar{\psi}_2^-(\tau, y; \chi) \frac{d\chi}{\lambda - \chi}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2^-(\tau, y; \lambda) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_-} \rho_{eff}(\chi) \times \\ &\times \exp(-2i\tau X^2 - 4iX^4y) \bar{\psi}_1^+(\tau, y; \chi) \frac{d\chi}{\lambda - \chi}, \end{aligned} \quad (65)$$

где $\rho_{eff}(\chi) = 2ig^3\chi$.

Эти уравнения описывают радиационное решение уравнения МНУШ с эффективным коэффициентом рассеяния ρ_{eff} , которое ассоциировано с непрерывным спектром спектральной проблемы ВКИ. Это решение сводится к трансценденту Пенлеве P_{IV} [32].

Найдем решение для малых τ . Используя (38), получаем для предела $(\bar{\psi}_1^+)_2 \approx 1$, $(\bar{\psi}_2^-)_2 \ll 1$

$$\begin{aligned} q(\tau, y) &\approx \frac{\sqrt{i}g^3 \exp(i\tau^2/8y)}{2\pi\sqrt{2y}} \times \\ &\times \left[D_{-1} \left(\frac{\sqrt{i}\tau}{\sqrt{2y}} \right) + D_{-1} \left(-\frac{\sqrt{i}\tau}{\sqrt{2y}} \right) \right], \\ & \quad y = z - z_2 > 0, \end{aligned} \quad (66)$$

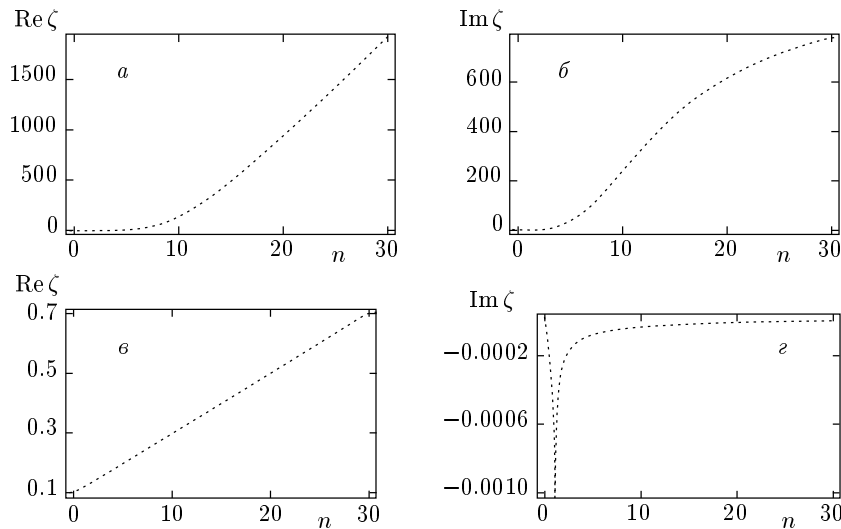


Рис. 2. Зависимость мнимой и действительной частей ζ от n ; $L_0 = 0.01$ (а, б) и 50 (в, г)

где D_{-1} — функция параболического цилиндра [33]. Приведем асимптотику решения при $y \rightarrow \infty$, используя результаты работы [16]. Асимптотическое решение для q имеет следующий вид:

$$q(\tau, y) \approx \sqrt{\pm \frac{\mu(\lambda_0)}{2\lambda_0^2 y}} \exp \left\{ i \left[4\lambda_0^4 y \mp \mu(\lambda_0) \ln |y| + \phi^\pm(\lambda_0) + \widehat{\Phi}^\pm(\lambda_0) - 2\vartheta^\pm(\lambda_0) + \frac{\pi}{2} \right] \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{C_2(\lambda_0) \ln |y|}{\lambda_0^2 y} \right). \quad (67)$$

Здесь введены переменная $\lambda_0 = (1/2)\sqrt{\tau/y}$ и функции от нее:

$$\begin{aligned} \mu(\lambda_0) &= -\frac{1}{2\pi} \ln(1 - |r(\lambda_0)|^2), \\ \phi^-(\lambda_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_0}^{\infty} \ln |\xi^2 - \lambda_0^2| d \ln(1 - |r(\xi)|^2), \\ \phi^+(\lambda_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda_0} \ln |\xi^2 - \lambda_0^2| d \ln(1 - |r(\xi)|^2) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln |\xi^2 + \lambda_0^2| d \ln(1 + |r(i\xi)|^2), \\ \widehat{\Phi}^\pm(\lambda_0) &= \pm \arg \Gamma(i\mu(\lambda_0)) + \\ &\quad + \arg r(\lambda_0) \mp 3\mu(\lambda_0) \ln 2 + \frac{(2 \pm 1)\pi}{4}, \end{aligned}$$

$$\vartheta^+(\lambda_0) = - \int_0^{\lambda_0} \frac{\ln(1 - |r(\xi)|^2)}{\xi} \frac{d\xi}{\pi} + \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + |r(i\xi)|^2)}{\xi} \frac{d\xi}{\pi},$$

$$\vartheta^-(\lambda_0) = - \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r(\xi)|^2)}{\xi} \frac{d\xi}{\pi},$$

$$r(\lambda_0) = \rho_{eff}(\lambda_0) = 2ig^3 \lambda_0,$$

$C_2(s) \sim \mathcal{O}(1)$, а Γ — гамма-функция,

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовался вариант составной модели, которая может применяться для описания генерации импульсов в системе, состоящей из резонансной двухуровневой среды и волоконно-оптического световода. Показано, что ненулевое поле $U(0, z)$ приводит к возникновению волнового пакета $Q(\tau, z)$. Этот пакет описывается решением, которое с ростом эффективной длины первой среды ($L_0 \rightarrow \infty$) асимптотически стремится к квазирадиационному решению МНУШ.

Использованный в работе подход носит достаточно универсальный характер. Граничные условия, приводящие к бесконечной последовательности полюсов в комплексной плоскости, положение которых зависит от переменной, нередко возникают в задачах когерентной нелинейной оптики. Например, при нахождении решения уравнений Максвелла–Блоха, описывающих динамику импульсов в двухуровневой полубесконечной среде в условиях одночастотно-

го резонанса, для неполной начальной инверсии среды также возникают бесконечные серии движущихся полюсов [8]. К этим же граничным условиям может приводить моделирование взаимодействия света с двухуровневым переходом в условиях двухчастотного резонанса и четырехволнового смещения в полубесконечной керровской среде [15]. В случае вырожденного двухчастотного резонанса такого рода граничные условия, генерирующие бесконечную серию полюсов в комплексной плоскости, возникают при ненулевом затравочном поле, медленно меняющемся с изменением временной переменной. Для исследованного примера модели взаимодействия поля с составной средой, ненулевое значение поля $U(0, z)$ приводит к нетривиальной динамике полей для всех z . Применение аппарата МОЗР для этой модели позволило определить вид асимптотического решения.

Аналогичным образом может быть найдено асимптотическое решение начально-краевой задачи для модели, описывающей вырожденное двухчастотное взаимодействие поля с двухуровневой средой (7), (9) для постоянного граничного значения амплитуды поля без учета нелинейной фазовой модуляции, т. е. для

$$\tilde{\beta} = \tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = 0.$$

В этом случае нетривиальное асимптотическое решение возникает при начально-краевых условиях (54), где

$$U_0 = \exp(ik_0 z) |U_0(z)|, \quad k_0 \neq 0,$$

для произвольной конечной амплитуды $|U_0(z)|$.

Один из результатов работы состоит в доказательстве факта, что асимптотика решения составной модели для заданных выше начально-краевых условий описывается автомодельным решением и не содержит «истинных» солитонов (в смысле [1]) для любой интенсивности $|U_0|^2$ дополнительного поля и большой эффективной длины ($L_0 \gg 1$) резонансной среды.

Аналитический аппарат настоящей работы может быть использован и для других составных моделей, а полученные решения — в качестве тестовых для моделей близких к интегрируемым и как нулевое приближение при построении теории возмущений.

Как отмечено выше, лазерные установки, применяемые для генерации света, обычно включают различные нелинейные среды, линейную модуляцию потерь и т. д. Более сложные составные интегрируемые модели могут найти применение при анализе эволюции импульсов света в идеализированных моделях оптических установок, в которых

используются разные виды нелинейного взаимодействия полей и сред, происходящие в разные моменты времени. Известно, что комбинированные схемы взаимодействия с разными средами дают дополнительные возможности управления процессами нелинейного взаимодействия, конверсии полей и генерации импульсов. Как показано в настоящей работе, применение составных интегрируемых моделей позволяет проанализировать некоторые такие схемы в рамках точно решаемых моделей и в то же время расширить область практического применения интегрируемых моделей.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-02-17904).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
2. И. Р. Шен, *Принципы нелинейной оптики*, Наука, Москва (1989).
3. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht (1999).
4. Y. Kodama, J. Stat. Phys. **39**, 597 (1985); Y. Kodama and A. Hasegawa, IEEE J. Quantum Electron. **23**, 510 (1987); G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic: N. Y. (1989).
5. In *Optical Solitons — Theory and Experiment*, ed. by J. R. Taylor, Cambridge Studies in Modern Optics, Vol. 10, CUP: Cambridge (1992); H. A. Haus, Proc. IEEE **81**, 970 (1993); A. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*, Oxford Series in Optical and Imaging Sciences, № 7, OUP: Oxford (1995).
6. M. Wadati, K. Konno, Y. Ichikawa, J. Phys. Soc. Jap. **46**, 1965 (1979); D. J. Kaup and A. C. Newell, J. Math. Phys. **19**, 798 (1978); H. Eichhorn, Inverse Problems **1**, 193 (1985); J. H. B. Nijhof and G. H. M. Roelofs, J. Phys. A: Math. Gen. **25**, 2403 (1992).
7. Е. К. Склянин, Функциональный анализ и его прилож. **21**, 86 (1987); A. S. Fokas and A. R. Its, ТМФ **92**, 387 (1992); A. S. Fokas and A. R. Its, Phys. Rev. Lett. **68**, 3117 (1992); E. D. Belokos, in *Algebraic and Geometrical Methods in Mathematical Physics*, Kluwer, Amsterdam (1996), p. 263.

8. J. Leon and A. V. Mikhailov, *Phys. Lett. A* **53**, 33 (1999); M. Voitì, J.-G. Caputo, J. Leon, and F. Rempinelli, *Inverse Problems* **16**, 303 (2000).
9. О. М. Киселев, *ТМФ* **98**, 29 (1994).
10. И. Р. Габитов, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *ТМФ* **63**, 11 (1985).
11. A. S. Fokas and C. R. Menyuk, *J. Nonlinear Sci.* **9**, 1 (1999).
12. D. J. Kaup and C. R. Menyuk, *Phys. Rev. A* **42**, 1712 (1990).
13. C. R. Menyuk, *Phys. Rev. A* **47**, 2235 (1993).
14. H. Steudel and D. J. Kaup, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 6219 (1999).
15. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **115**, 1168 (1999).
16. A. V. Kitaev and A. H. Vartanian, *Inverse Problems* **13**, 1311 (1997).
17. Э. М. Беленов, И. А. Полуэктов, *ЖЭТФ* **56**, 1407 (1969).
18. И. А. Полуэктов, Ю. М. Попов и В. С. Ройтберг, *Письма в ЖЭТФ* **18**, 638 (1973).
19. H. Steudel, *Physica D* **6**, 155 (1983).
20. Д. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, *Резонансное взаимодействие света с веществом*, Наука, Москва (1977).
21. В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ* **45**, 279 (1987).
22. А. А. Zabolotskii, *Phys. Lett. A* **124**, 500 (1987).
23. N. Tzoar and M. Jain, *Phys. Rev. Lett. A* **23**, 1266 (1981).
24. K. J. Blow, N. J. Doran, and E. Commins, *Opt. Commun.* **48**, 770 (1983).
25. D. Marcuse, *Appl. Opt.* **19**, 1653 (1980).
26. M. Klauder, E. W. Laedke, K. H. Spatschek, and S. K. Turitsyn, *Phys. Rev.* **47**, R3844 (1983).
27. Е. В. Докторов, И. Н. Прокопеня, *ЖЭТФ* **100**, 1129 (1991).
28. В. С. Герджиков, М. И. Иванов, П. П. Кулиш, *ТМФ* **44**, 342 (1980).
29. J.-H. Lee, *Trans. Amer. Math. Soc.* **314**, 107 (1989).
30. X. Zhou, *Comm. Pure Appl. Math.* **42**, 895 (1989); X. Zhou, *SIAM J. Math. Anal.* **20**, 966 (1989).
31. X. Zhou, *J. Diff. Eqn.* **115**, 277 (1995).
32. M. J. Ablowitz, A. Ramani, and H. Segur, *J. Math. Phys.* **21**, 1006 (1978).
33. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. II, Наука, Москва (1974).