

# МНОГОФОТОННАЯ ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ В ПОЛЕ УЛЬТРАКОРОТКОГО ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА

*В. С. Попов*

*Государственный научный центр  
«Институт теоретической и экспериментальной физики»  
117259, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 февраля 2001 г.

Получены замкнутые аналитические выражения для вероятности многофотонной ионизации атомов и ионов под действием переменного электрического поля  $\mathcal{E}(t)$ , применимые для произвольных значений параметра Келдыша  $\gamma$ . Изучаются зависимости вероятности ионизации и импульсного спектра фотоэлектронов от формы ультракороткого лазерного импульса. Подробно рассмотрены примеры импульсных полей различного вида, в том числе модулированный световой импульс с гауссовой или лоренцевой огибающей. Рассмотрен интерференционный эффект в энергетическом спектре фотоэлектронов при ионизации атома периодическим полем общего вида. Обсуждается область применимости адиабатического приближения в теории многофотонной ионизации. В расчетах используется метод «мнимого времени», позволяющий эффективно вычислять вероятность туннелирования частиц через колеблющиеся барьеры.

PACS: 31.15.Gy, 32.80.Fb, 03.65.Sq

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование физических явлений в экстремальных условиях, в том числе в области сильных внешних полей, всегда представляет значительный интерес. Как известно, в поле сильной световой волны не выполняется закон Эйнштейна для красной границы фотоэффекта и становится возможной многофотонная ионизация атомов и молекул.

Получение все более интенсивных электромагнитных полей связано с укорочением лазерного импульса, длительность которого становится уже сравнимой с оптическим периодом (см., например, [1–3] и цитированную там литературу), а спектр содержит много высших гармоник. Вследствие сильной нелинейности процесса многофотонной ионизации [4–8] его нельзя свести к сумме вкладов от отдельных гармоник. При этом вероятность ионизации и импульсный спектр вылетающих фотоэлектронов существенно зависят от формы импульсного поля, особенно в том случае, когда частота внешнего поля  $\omega$  превышает частоту туннелирования  $\omega_t$ . Выяснение этой зависимости становится необходимым для анализа экспериментальных данных и является предметом представленной работы (см. в этой связи

также [9, 10]).

С этой целью рассмотрим задачу об ионизации атомного уровня в переменном электрическом поле (пространственно-однородном и с линейной поляризацией)

$$\mathcal{E}(t') = F \varphi(t), \quad t = \omega t', \quad (1)$$

произвольным образом зависящем от времени  $t'$ . Здесь  $F$  — амплитудное значение поля,  $\omega$  — его характерная частота,  $t$  — безразмерное время; относительно функции  $\varphi$ , задающей форму импульса, предполагается, что  $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$  при  $-\infty < t < \infty$  (т. е.  $t = 0$  — момент максимума поля, когда электрон выходит из-под барьера [6]) и  $\varphi(-t) = \varphi(t)$ ; заметим, что последнее условие налагается только для удобства вычислений.

Для расчетов мы используем квазиклассический метод «мнимого времени» (ММВ) [6, 7, 11], дающий наглядное описание процесса туннелирования частиц через любые гладкие, в том числе и быстро колеблющиеся, барьеры. При этом в рассмотрение вводятся подбарьерные траектории, формально удовлетворяющие классическим уравнениям движения (но с мнимым «временем!»). Главный (экспоненциальный) фактор в вероятности ионизации опреде-

ляется так называемой экстремальной подбарьерной траекторией, на которой мнимая часть функции действия,  $\text{Im} S$ , достигает минимума (и которая определяет, согласно Фейнману [12, 13], наиболее вероятный путь туннелирования частицы). Далее, для нахождения импульсного спектра вылетающих электронов нужно рассмотреть пучок «классических» траекторий, близких к экстремальной, и вычислить на них квадратичную поправку к  $\text{Im} S$ , пропорциональную  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{max})^2$  (см. подробнее в работах [7, 11]; изложение ММВ содержится также в монографии [14]).

В дальнейшем предполагается выполнение условий

$$K_0 = \frac{I}{\hbar\omega} \gg 1, \quad \epsilon = \frac{e\hbar F}{(2I)^{3/2}m^{1/2}} = \frac{F}{\kappa^3 F_a} \ll 1, \quad (2)$$

$$\text{Im} S \gg \hbar,$$

обеспечивающих применимость квазиклассики к многофотонным процессам. Здесь  $K_0$  — параметр многоквантовости,  $\epsilon$  — приведенное электрическое поле,  $I = \kappa^2 m e^4 / 2\hbar^2$  — потенциал ионизации атомного уровня,  $\kappa$  — (безразмерный) импульс, характерный для связанного состояния<sup>1)</sup>. Процесс туннелирования существенно зависит от значения параметра Келдыша  $\gamma$  [4],

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_t} = \frac{\omega\sqrt{2mI}}{eF}, \quad (2')$$

где  $\omega_t$  — частота туннелирования в статическом поле  $F$  (далее в статье используются атомные единицы  $\hbar = m = e = 1$ ,  $m$  — масса электрона,  $F_a = m^2 e^5 / \hbar^4 = 5.14 \cdot 10^9$  В/см).

Целью данной работы является исследование вероятности ионизации атомного уровня и импульсного спектра фотоэлектронов в зависимости от формы импульсного поля (1) и от параметра Келдыша<sup>2)</sup>. В следующем разделе приведены основные

<sup>1)</sup> Для основного уровня атома водорода  $\kappa = 1$ . Для основных состояний нейтральных атомов параметр  $\kappa$  меняется в пределах от 0.535 для Cs ( $I = 3.89$  эВ) до 1.344 для He ( $I = 24.59$  эВ), см. [15] и табл. 1 в [11]. В случае слабо связанных состояний он может быть заметно меньше единицы. Так, например,  $I = 0.754$  эВ и  $\kappa = 0.235$  для отрицательного иона водорода и  $I = 0.077$  эВ,  $\kappa = 0.075$  для иона He<sup>-</sup>. В этих случаях значения приведенного поля  $\epsilon$  и вероятности ионизации существенно возрастают (при фиксированной величине электрического поля  $F$ ).

<sup>2)</sup> В случае монохроматического лазерного излучения импульсные, энергетические и угловые распределения фотоэлектронов при многофотонной ионизации рассматривались уже в ранних работах [6–8], а недавно были подробно исследованы [16–18] во всем интервале изменения параметра  $\gamma$ , включая общий случай эллиптической поляризации излучения.

уравнения, определяющие эту зависимость (в квазиклассическом приближении). Сформулирован алгоритм, позволяющий по заданной форме внешнего поля  $\varphi(t)$  вычислить вспомогательную функцию  $\chi(z)$ , после чего задача сводится к квадратурам. В разд. 3 рассмотрены модельные примеры полей  $\varphi(t)$ , для которых все вычисления проводятся аналитически. В разд. 4 даны результаты численных расчетов, в том числе для модулированной (по амплитуде) электромагнитной волны с гауссовой или лоренцевой огибающей. Эффект туннельной интерференции в энергетическом спектре фотоэлектронов рассмотрен в разд. 5, область применимости адиабатического приближения в теории многофотонной ионизации — в разд. 6. Заключительный разд. 7 содержит краткое обсуждение полученных результатов. В Приложения вынесены детали вычислений, в том числе получение приближения (17) в области больших  $\gamma$ , некоторые вспомогательные формулы и асимптотики.

Излагаемые ниже результаты частично анонсированы [9, 10]. Следует отметить, что теория многофотонной ионизации под действием ультракоротких лазерных импульсов рассматривается также в статье Келдыша [3], где, в частности, аналитически и численно исследованы (иным методом) случаи солитоноподобного, гауссова и лоренцева импульсов. Для сравнения наших результатов с работой [3] полезно иметь в виду, что в [3] используются обозначения:  $\Omega = 1/K_0$ ,  $\mathcal{E} = 2\epsilon$ ,  $\lambda = 1/\gamma$  и  $f'(x) = \varphi(x)$ , причем  $x = \omega t' \equiv t$ .

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В случае поля (1) из физических соображений очевидно, что экстремальная траектория одномерна и направлена вдоль поля. Решая классические уравнения движения и вычисляя  $\text{Im} S$ , находим вероятность многофотонной ионизации (с точностью до предэкспоненты):

$$w_i(\mathbf{p}) \equiv \frac{dW_i}{d\mathbf{p}} \propto \exp \left\{ -\frac{2}{3\epsilon} g(\gamma) - \frac{\kappa}{F} \left[ b_1(\gamma)(p_{\parallel} - p_{max})^2 + b_2(\gamma)p_{\perp}^2 \right] \right\}, \quad (3)$$

где  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  — продольный (по полю) и поперечный импульсы вылетающего фотоэлектрона,  $p_{max}$  — его

наиболее вероятный импульс<sup>3)</sup>,

$$\begin{aligned}
 g(\gamma) &= \frac{3}{2} \int_0^1 \chi(\gamma z)(1-z^2)dz, \\
 b_1(\gamma) &= -\gamma \frac{db_2}{d\gamma}, \\
 b_2(\gamma) &= \int_0^1 \chi(\gamma z)dz = \gamma^{-1} \tau(\gamma), \\
 p_{max} &= \frac{F}{\omega} \int_0^\infty \varphi(t)dt
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

( $p_\perp$  является интегралом движения, а  $F/\omega$  — характерный импульс колебательного движения электрона в поле волны). Сюда входит функция  $\chi(z)$ , зависящая от формы импульса (1), после нахождения которой задача сводится к квадратурам. Эта функция может быть задана параметрически:

$$\chi = \frac{1}{\tilde{\varphi}(\tau)}, \quad z = h(\tau) = \int_0^\tau \tilde{\varphi}(t)dt, \tag{5}$$

где  $\tilde{\varphi}(t) \equiv \varphi(it)$ . Последнее уравнение определяет также (в неявном виде) обратную функцию  $\tau = h^{-1}(z)$ , причем<sup>4)</sup>

$$\chi(z) = \tau'(z), \tag{6}$$

а «начальный момент» подбарьерного движения электрона есть

$$t'_0 = i\omega^{-1}\tau(\gamma), \quad \tau(\gamma) = h^{-1}(\gamma). \tag{6'}$$

Вывод уравнений (3)–(6) здесь опущен. Он основан на ММВ и является обобщением вычислений, приведенных в [7] для частного (но важного для приложений) случая монохроматического лазерного поля. В данной работе мы продемонстрируем применение этих формул к импульсным полям различного вида и обсудим влияние укорочения лазерного импульса на полную вероятность ионизации и

<sup>3)</sup> Полагая в (3)  $p_{max} = 0$ , получаем импульсный спектр электронов в момент выхода из-под барьера ( $t = 0$ ). Пересчет его на распределение вылетающих фотоэлектронов ( $t \rightarrow +\infty$ ) по конечным кинетическим энергиям представляет собой отдельную задачу, которой занимались многие авторы (см., например [19–23]). Здесь мы отметим лишь, что выражение (4) для  $p_{max}$  относится только к случаю ультракоротких (с длительностью  $T \lesssim 1$  пс) лазерных импульсов.

<sup>4)</sup> В (5)  $\tau$  — параметр, после исключения которого получаем зависимость  $\chi$  от  $z$  в явном виде. Отметим, что функция  $h(\tau)$  только множителем  $i\omega/cF$  отличается от вектор-потенциала  $A(t')$ , продолженного в комплексную плоскость.

на спектр фотоэлектронов. Отметим, что в работах [7, 11] можно найти примеры вычисления (с помощью ММВ) предэкспоненциального множителя, в том числе в случае постоянных во времени электрического и магнитного полей произвольной величины и направления [11].

В туннельном пределе,  $\gamma \ll 1$  (низкочастотное лазерное поле), ионизация происходит в моменты времени, близкие к  $t = 0$ . Полагая при  $t \rightarrow 0$

$$\varphi(t) = 1 - \frac{a_2}{2!}t^2 + \frac{a_4}{4!}t^4 - \frac{a_6}{6!}t^6 + \dots, \quad a_2 > 0, \tag{7}$$

находим из (5), что (см. также (A.3) и (A.4) в Приложении А)

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\chi_n}{(2n)!} z^{2n}, \tag{7'}$$

$$\chi_0 = 1, \quad \chi_1 = a_2, \quad \chi_2 = 10a_2^2 - a_4,$$

после чего с помощью (4) получаем разложения, позволяющие легко вычислять адиабатические поправки:

$$g(\gamma) = 1 + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n g_n \gamma^{2n}, \tag{8}$$

$$g_n = \frac{3}{(2n+1)!(2n+3)} \chi_n,$$

$$b_1(\gamma) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\chi_{n+1}}{(2n+1)!(2n+3)} \gamma^{2n+2}, \tag{8'}$$

$$b_2(\gamma) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\chi_n}{(2n+1)!} \gamma^{2n}$$

Две последние формулы можно записать также в виде

$$b_1 = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} n(2n+3) g_n \gamma^{2n}, \tag{8''}$$

$$b_2 = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n (2n+3) g_n \gamma^{2n},$$

где  $g_n$  — коэффициенты ряда (8) для функции  $g(\gamma)$ . В первом приближении по  $\gamma^2$  зависимость вероятности многофотонной ионизации (3) от формы импульса является универсальной:

$$\begin{aligned}
 w_i(\mathbf{p}) \propto \exp \left\{ - \left[ \frac{2\kappa^3}{3F} \left( 1 - \frac{1}{10} \tilde{\gamma}^2 \right) + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\kappa}{F} \left( \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^2 (p_\parallel - p_{max})^2 + p_\perp^2 \right) \right] \right\}, \tag{9}
 \end{aligned}$$

$$\gamma \ll 1,$$

где  $\tilde{\gamma} = \sqrt{a_2} \gamma$  и  $a_2 = -\varphi''(0)$  — кривизна импульса вблизи его вершины. При этом  $\Delta p_{\perp} \sim \sqrt{\epsilon} \kappa \ll \kappa$ ,  $\Delta p_{\parallel} \sim \gamma^{-1} \Delta p_{\perp} \sim \sqrt{\epsilon} F/\omega \ll p_0$ , а  $p_0 \sim F/\omega$  — характерный импульс колебательного движения электрона в поле волны (при  $t > 0$ ). В данном случае продольный импульс электрона намного превышает поперечный, что объясняется возможностью его разгона вдоль медленно меняющегося электрического поля  $\mathcal{E}(t)$ .

В другом пределе (быстропеременные поля) удобно переписать (3) в ином виде:

$$w_i(\mathbf{p}) \propto \exp \left\{ - \left[ \frac{\kappa^2}{\omega} f(\gamma) + \frac{1}{\omega} (c_1 p_{\parallel}^2 + c_2 p_{\perp}^2) \right] \right\}, \quad (10)$$

$$\gamma \gg 1,$$

где  $\kappa^2/\omega = 2K_0 \gg 1$ ,

$$f(\gamma) = \frac{2}{3} \gamma g(\gamma) = \int_0^{\gamma} \chi(u) \left( 1 - \frac{u^2}{\gamma^2} \right) du, \quad (10')$$

и  $c_{1,2}(\gamma) = \gamma b_{1,2}(\gamma)$ . В физических задачах функция  $f(\gamma)$  при  $\gamma \rightarrow \infty$  либо выходит на постоянный предел (если  $\varphi(t)$  имеет в комплексной плоскости особенность  $t = i \tau_s$  на конечном расстоянии от вещественной оси времени), либо возрастает логарифмически (см. табл. 1 в [9], а также разложения (A.5)–(A.10)).

### 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В рассмотренных ниже случаях уравнения (4)–(6) допускают аналитическое решение. Эти модельные примеры определяют основные качественные характеристики изучаемого нами процесса, а также могут представлять и самостоятельный интерес.

1) Монохроматическому лазерному свету отвечает  $\varphi(t) = \cos t$ . В этом случае  $\chi(z) = (1 + z^2)^{-1/2}$ , интегралы в (4) являются табличными и дают

$$f(\gamma) = \left( 1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \text{Arsh } \gamma - \frac{\sqrt{1 + \gamma^2}}{2\gamma}, \quad (11)$$

$$c_1 = \text{Arsh } \gamma - \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}},$$

$$c_2 = \tau_0(\gamma) = \text{Arsh } \gamma, \quad p_{max} = 0,$$

что совпадает с результатами, полученными ранее [4–6].

2) Для  $\varphi(t) = 1/\text{ch}^2 t$  (солитоноподобный импульс) имеем  $\chi(z) = (1 + z^2)^{-1}$ , откуда

$$f(\gamma) = (1 + \gamma^{-2}) \arctg \gamma - \frac{1}{\gamma}, \quad (12)$$

$$c_1 = \arctg \gamma - \frac{\gamma}{1 + \gamma^2}, \quad c_2 = \arctg \gamma, \quad p_{max} = F/\omega.$$

3) В случае гауссовского импульса,  $\varphi(t) = \exp(-t^2/2\sigma^2)$ , функция  $\chi(z)$  определяется из уравнения

$$\frac{1}{\chi} w(\sqrt{-\ln \chi}) = \frac{z}{\sqrt{2\sigma}}, \quad 0 < \chi \leq 1, \quad (13)$$

где  $w(z)$  — так называемый интеграл Досона [24] (см. также Приложение Б). При  $\sigma = 1$  получаем

$$\chi(z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{7}{24} z^4 + \dots, & z \rightarrow 0, \\ \left( z \sqrt{2 \ln z} \right)^{-1} [1 + O(1/\ln z)], & z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (13')$$

и в итоге приходим к разложениям (A.10).

4) Для импульсного поля

$$\varphi(t) = (1 + t^2)^{-\alpha}, \quad \alpha \geq 1, \quad (14)$$

уравнения (5) принимают вид

$$\chi = (1 - \tau^2)^{\alpha}, \quad z = \tau F(\alpha, 1/2; 3/2; \tau^2), \quad (5')$$

$$0 \leq \tau < 1,$$

где  $\tau$  — параметр и  $F(\dots) \equiv {}_2F_1(\dots)$  — гипергеометрическая функция Гаусса. Отсюда

$$\chi(z) = 1 - \alpha z^2 + \frac{1}{6} (7\alpha^2 - 3\alpha) z^4 + \dots, \quad z \rightarrow 0, \quad (15)$$

$$\chi(z) \approx [2(\alpha - 1)z]^{-\alpha/(\alpha-1)}, \quad z \rightarrow \infty (\alpha > 1). \quad (15')$$

При  $\gamma \rightarrow \infty$  начальная точка подбарьерной траектории,  $t_0 = i\tau_0(\gamma)$ , приближается к особенности  $t_s = i$  поля (14):

$$\tau_0(\gamma) = \begin{cases} 1 - 2e^{-2\gamma} + \dots, & \alpha = 1, \\ 1 - k \gamma^{-1/(\alpha-1)} + \dots, & \alpha > 1, \end{cases} \quad (16)$$

где  $k = [2^{\alpha}(\alpha - 1)]^{-1/(\alpha-1)}$ , см. подробнее в Приложении В. Этот пример типичен для тех случаев, когда ближайшая особая точка  $t_s = i\tau_s$  функции поля  $\varphi(t)$  лежит на конечном расстоянии от вещественной оси и является полюсом ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ) либо точкой ветвления степенного типа. При этом (10) принимает асимптотический вид:

$$w_i(\mathbf{p}) \propto \exp \left\{ - \frac{\tau_s}{\omega} [\kappa^2 + (p_{\parallel} - p_{max})^2 + p_{\perp}^2] \right\}, \quad (17)$$

$$\gamma \gg 1,$$

$$p_{max} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha - 1/2) \kappa}{2\Gamma(\alpha)} \frac{\kappa}{\gamma} \ll \kappa, \quad (17')$$

что отличается от вероятности ионизации монохроматическим излучением и существенно превышает ее. Здесь

$$W_i = \int w_i(\mathbf{p})d\mathbf{p} \propto \exp(-2K_0\tau_s),$$

в то время как для монохроматического поля

$$W_i \propto \exp(-2K_0 \ln 2\gamma).$$

При этом импульсное распределение фотоэлектронов приближается к изотропному гауссовскому распределению с центром в точке  $\mathbf{p}_{max}$  импульсного пространства:

$$\Delta p_{\parallel} = \Delta p_{\perp} \sim \sqrt{\omega/\tau_s} \sim \kappa(K_0\tau_s)^{-1/2} \ll \kappa.$$

5) При целых и полуцелых значениях  $\alpha$  гипергеометрическая функция в (5') сводится к элементарным функциям, см. формулы (B.1), (B.2) в Приложении В. Случай  $\alpha = 3/2$  особенно прост в аналитическом отношении: здесь  $z = \tau(1 - \tau^2)^{-1/2}$ ,  $\chi(z) = (1 + z^2)^{-3/2}$ , и далее имеем<sup>5)</sup>

$$f(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \left( \sqrt{1 + \gamma^2} - \frac{\text{arcsch } \gamma}{\gamma} \right), \quad (18)$$

$$c_1 = c_2^3, \quad c_2 = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}}.$$

Этот пример обладает своеобразной «дуальностью»: для него  $\varphi(t) \equiv \chi(t)$ , что выполняется также для импульса вида  $\varphi(t) = 1/\text{ch } t$ .

Случай  $\alpha = 1$ , т. е.  $\varphi(t) = 1/(1 + t^2)$ , отвечает лоренцевой форме импульса. При этом

$$f(\gamma) = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{2\gamma} \frac{xdx}{e^x + 1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3}\gamma - \frac{2}{15}\gamma^3 + \frac{4}{105}\gamma^5 - \dots, & \gamma \ll 1, \\ 1 - \frac{\pi^2}{12\gamma^2} + 2\gamma^{-1} \exp(-2\gamma), & \gamma \gg 1, \end{cases} \quad (19)$$

$$c_1(\gamma) = \text{th } \gamma - \frac{\gamma}{\text{ch}^2 \gamma}, \quad c_2(\gamma) = \text{th } \gamma,$$

$$p_{max} = \frac{\pi F}{2\omega} = \frac{\pi \kappa}{2\gamma}.$$

<sup>5)</sup> Отметим, что отдельные слагаемые в выражениях для  $f(\gamma)$  и  $g(\gamma)$  при  $\gamma \rightarrow 0$  обращаются в бесконечность (в сумме они взаимно компенсируются). Поэтому для получения разложений в адиабатической области  $\gamma \ll 1$  более удобно использовать (8), нежели точные формулы типа (11), (12) или (18).

При произвольных  $\alpha$ , выполняя в (5) подстановку  $\tau = \sqrt{u/(1 + u)}$ , приходим к уравнению

$$z = \sqrt{u}F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \alpha; \frac{3}{2}; -u\right), \quad (20)$$

$$u = \chi^{-1/\alpha} - 1, \quad 0 < u < \infty,$$

определяющему в явном виде обратную функцию  $z = z(\chi)$ . Дальнейшие вычисления по формулам (4) не представляют труда. При  $\alpha = 3/2$  и 1 отсюда легко следуют выражения (18) и (19), а при  $\alpha = 2$  (полюс второго порядка у  $\varphi(t)$ ) получаем

$$z = \frac{1}{2} \left( \sqrt{u(1+u)} + \text{arcsch } \sqrt{u} \right), \quad u = \chi^{-1/2} - 1. \quad (21)$$

6) Обобщением «солитонного» импульса (12) является

$$\varphi(t) = (\text{ch } t)^{-\alpha}, \quad \alpha \geq 1. \quad (22)$$

Переходя в (5) от параметра  $\tau$  к  $\xi = \text{tg } \tau$ , получаем

$$\chi = (1 + \xi^2)^{-\alpha/2},$$

$$z = \int_0^{\xi} (1 + x^2)^{(\alpha-2)/2} dx = \quad (22')$$

$$= \xi F\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\xi^2\right),$$

$0 < \xi < \infty$ . При  $\alpha = 1$ , учитывая, что  $F(1/2, 1/2; 3/2; -\xi^2) = \text{arcsch } \xi/\xi$ , находим отсюда  $\chi(z) = 1/\text{ch } z$ . Для четных  $\alpha = 2, 4, \dots$  выражение для  $z(\xi)$  сводится к полиному: так,  $z = \xi$  и  $\xi + (1/3)\xi^3$  при  $\alpha = 2$  и 4.

7) Предыдущие примеры, за исключением примера 1, относятся к числу однополярных импульсов. Хотя любое однородное поле есть решение уравнений Максвелла:  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}(t - x/c)$ , и потому является (в принципе) физически реализуемым, однако для полей, обычно встречающихся в лазерной физике, интеграл  $J = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t)dt$  либо равен нулю, либо численно мал (см. в этой связи работы [25, 26]). В качестве примера рассмотрим

$$\varphi_{\alpha}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{t}{(1 + t^2)^{\alpha}} \right] = \frac{1 - (2\alpha - 1)t^2}{(1 + t^2)^{\alpha+1}}, \quad (23)$$

$$\alpha > 1/2,$$

$$\varphi_{\alpha}(t) = 1 - 3\alpha t^2 + \frac{5}{2}\alpha(\alpha + 1)t^4 + \dots, \quad t \rightarrow 0,$$

$$\varphi_{\alpha}(t) \approx -(2\alpha - 1)t^{-2\alpha} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

В этом случае уравнения (5) принимают вид

$$\chi = \frac{(1 - \tau^2)^{\alpha+1}}{1 + (2\alpha - 1)\tau^2}, \quad z = \frac{\tau}{(1 - \tau^2)^\alpha}. \quad (5'')$$

Если  $\alpha = 1/2$ , то пример (23) совпадает с (18); при  $\alpha = 1$  имеем

$$\begin{aligned} \tau(\gamma) &= \frac{2\gamma}{1 + \sqrt{1 + 4\gamma^2}}, \\ \chi(z) &= \frac{2}{1 + 4z^2 + \sqrt{1 + 4z^2}}, \\ f(\gamma) &= \sqrt{1 + \frac{1}{4\gamma^2}} - \frac{1}{\gamma} + \frac{\operatorname{arcsch} 2\gamma}{4\gamma^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

а при произвольном  $\alpha$  система уравнений (5'') легко решается численно.

Что касается монохроматического поля  $\varphi(t) = \cos t$ , то для него также  $J = 0$ . В данном случае этот интеграл получает однозначный смысл, если учесть, что лазерное поле, приближенно однородное в области фокуса, адиабатически выключается на бесконечности:

$$\begin{aligned} J &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\alpha t)^2}{2}\right] \cos \omega t \, dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha^{-1} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому с экспоненциальной точностью  $J \approx 0$  при  $\alpha \ll \omega$ .

8) В пределе  $\alpha \rightarrow \infty$  примеры 4 и 7 эквивалентны (после масштабирования  $t \rightarrow t/\sqrt{\alpha}$ ) следующим импульсам:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp(-t^2), \\ (1 - 2t^2) \exp(-t^2) &= \frac{d}{dt} [t \exp(-t^2)]. \end{aligned} \quad (25)$$

В этой связи отметим, что при изменении временного масштаба, когда  $\varphi(t) \rightarrow \varphi(\lambda t)$ , выполняются соотношения скейлинга:

$$\begin{aligned} g(\gamma) &\rightarrow g(\lambda\gamma), \quad f(\gamma) \rightarrow \lambda^{-1}f(\lambda\gamma), \\ c_{1,2}(\gamma) &\rightarrow \lambda^{-1}c_{1,2}(\lambda\gamma), \end{aligned} \quad (26)$$

а также  $\chi(z) \rightarrow \chi(\lambda z)$ .

9) Для оценки роли высших гармоник в спектре лазерного импульса положим

$$\varphi(t) = \frac{(1 - \rho)^2 \cos t}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos 2t}, \quad \rho_0 < \rho < 1, \quad (27)$$

где  $\rho$  — параметр ангармоничности<sup>6)</sup>,  $\rho_0 = -(\sqrt{2} - 1)^2 = -0.1715$ , причем  $\varphi(t + \pi) = -\varphi(t)$ . В этом случае

$$\tau(\gamma) = \operatorname{arcsch}\{p^{-1} \operatorname{th}(p\gamma)\}, \quad (28)$$

$$\tau_s = \operatorname{arcsch}(p^{-1}) = -\frac{1}{2} \ln p, \quad p = \frac{2\sqrt{\rho}}{1 - \rho}. \quad (28')$$

Функция (27) имеет полюс при  $\cos 2t = (\rho + \rho^{-1})/2$ , или  $t = i\tau_s$  (при  $\rho \rightarrow 0$  эта точка уходит на бесконечность, и  $\varphi(t) = \cos t$  — целая функция). С ростом параметра  $\rho$  импульс становится все более острым, превращаясь при  $\rho \rightarrow 1$  в последовательность  $\delta$ -образных пиков чередующейся полярности:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\approx \begin{cases} [1 - \rho(1 + 4 \sin^2 t) + O(\rho^2)] \cos t, & \rho \ll 1, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left\{-\frac{1}{2} a_2 (t - n\pi)^2\right\}, & \rho \rightarrow 1, \end{cases} \\ &\approx \begin{cases} [1 - \rho(1 + 4 \sin^2 t) + O(\rho^2)] \cos t, & \rho \ll 1, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left\{-\frac{1}{2} a_2 (t - n\pi)^2\right\}, & \rho \rightarrow 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

где  $a_2 = (1 + 6\rho + \rho^2)/(1 - \rho)^2$ , причем  $a_2 = 0$  при  $\rho = \rho_0$ . После простых, хотя и довольно громоздких, вычислений получаем

$$\chi(z) = \left\{ \operatorname{ch}(pz) \sqrt{1 + (1 + p^{-2}) \operatorname{sh}^2(pz)} \right\}^{-1}, \quad (30)$$

так что

$$\begin{cases} \chi(z) = 1 - (p^2 + 1/2) z^2 + \dots, & z \rightarrow 0, \\ \chi(z) \propto \exp(-2pz), & z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (30')$$

Отметим, что при  $\rho < \rho_0$  импульс (27) становится двугорбым, и  $t = 0$  является для него уже не точкой максимума  $\varphi(t)$ , а точкой минимума.

10) Наконец, рассмотрим следующий анзац для функции  $\chi$ :

$$\chi(z) = (1 + z^2)^{-\mu}. \quad (31)$$

Вычисляя входящие в (4) интегралы [26, 27], находим

$$\begin{aligned} g(\gamma) &= F\left(\frac{1}{2}, \mu; \frac{5}{2}; -\gamma^2\right) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{1 + \gamma^2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2} - \mu; \frac{5}{2}; \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2}\right), \\ b_1(\gamma) &= \frac{2}{3} \mu \gamma^2 F\left(\frac{3}{2}, \mu + 1; \frac{5}{2}; -\gamma^2\right), \\ b_2(\gamma) &= F\left(\frac{1}{2}, \mu; \frac{3}{2}; -\gamma^2\right). \end{aligned} \quad (32)$$

<sup>6)</sup> Интенсивности соседних нечетных гармоник в спектре этого импульса относятся как  $\rho^2$ .

Можно показать (см. (Б.6)), что соответствующая (31) форма импульса при  $t \rightarrow 0$  характеризуется разложением

$$\varphi(t) = 1 - \mu t^2 + \frac{1}{6}(7\mu^2 - 3\mu)t^4 + \dots, \quad (33)$$

а при  $t \rightarrow \infty$  —

$$\varphi(t) \approx \begin{cases} 4 \exp(-2t), & \mu = 1, \\ [2(\mu - 1)t]^{-\mu/(\mu-1)}, & \mu > 1. \end{cases} \quad (33')$$

В частности, при  $\mu = 1/2, 1$  и  $3/2$  имеем  $\varphi(t) = \cos t, 1/\text{ch}^2 t$  и  $(1 + t^2)^{-3/2}$  (рассмотренные выше примеры), а при  $\mu = 5/2$  функция  $g(\gamma)$  имеет удивительно простой вид:

$$g(\gamma) = (1 + \gamma^2)^{-1/2}, \quad \tau(\gamma) = \left( \gamma + \frac{2}{3}\gamma^3 \right) (1 + \gamma^2)^{-3/2}. \quad (34)$$

Коэффициенты  $g_n$  из (8) в данном случае равны

$$g_n = \frac{3\Gamma(n + \mu)}{(2n + 1)(2n + 3)\Gamma(\mu)n!}. \quad (35)$$

Поскольку  $g_n \propto n^{\mu-3}$  при  $n \rightarrow \infty$ , ряды (8), (8') и (8'') сходятся при  $|\gamma| < 1$ . При  $\mu = 1/2$  получаем адиабатическое разложение для функции Келдыша (11):

$$f(\gamma) = \frac{2}{3} \left( \gamma - \frac{1}{10}\gamma^3 + \frac{9}{280}\gamma^5 - \frac{5}{336}\gamma^7 + \dots \right), \quad (36)$$

$$f_n = \frac{2}{3}g_n = \frac{(2n - 1)!!}{(2n + 1)(2n + 3)2^{n-1}n!},$$

первые члены которого были найдены ранее [4–6].

С другой стороны, при  $\gamma \rightarrow \infty$  все функции (32) убывают пропорционально  $1/\gamma$ :

$$g(\gamma) \approx c\gamma^{-1}, \quad b_1(\gamma) \approx b_2(\gamma) \approx \frac{2}{3}c\gamma^{-1}, \quad (37)$$

$$c = \frac{3\sqrt{\pi}\Gamma(\mu - 1/2)}{4\Gamma(\mu)},$$

что согласуется с поведением кривых на рис. 1.

Рассмотренные примеры демонстрируют эффективность ММВ. Аналитическое решение возможно также при  $\varphi(t) = (\text{ch}^2 t + \beta^2 \text{sh}^2 t)^{-1}$  и  $[\text{ch}^2(\beta t) + (\text{sh}(\beta t)/\beta)^2]^{-1}$  ( $\beta$  — параметр,  $0 \leq \beta < \infty$ ), при  $\varphi(t) = \text{cn}(t, q)$ , где  $\text{cn}$  — эллиптический косинус, и др. (см. таблицу). При любой форме импульса, в том числе взятой непосредственно из экспериментальных данных, численный расчет функции  $\chi(z)$  по приведенным выше уравнениям не представляет трудностей, после чего задача сводится к квадратурам.

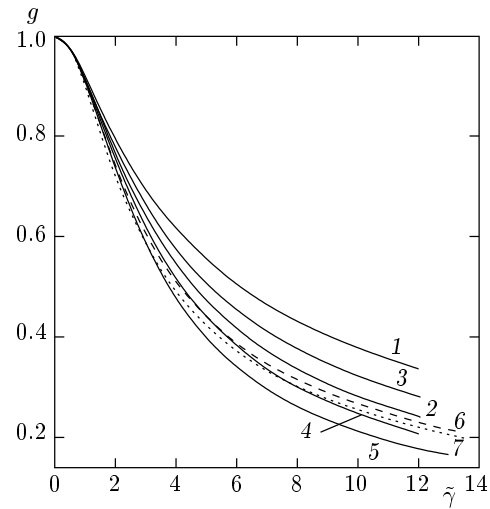


Рис. 1. Функция  $g(\gamma)$  для полей вида (1). Номера кривых 1–7 объяснены в (38). По оси абсцисс отложена масштабированная переменная  $\tilde{\gamma} = \sqrt{a_2}\gamma$

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Обсудим теперь результаты численных расчетов. Функции  $g(\gamma)$  для нескольких импульсных полей приведены на рис. 1, на котором для сравнения показана эта функция также и для монохроматического поля (кривая 1). Поясним обозначения. Номера кривых на рис. 1 соответствуют:

- 1)  $\varphi = \cos t;$     2)  $\varphi = 1/\text{ch}^2 t;$
- 3)  $\varphi = \exp(-t^2);$     4)  $\varphi = (1 + t^2)^{-3/2};$
- 5)  $\varphi = (1 + t^2)^{-1};$     6)  $\varphi = (1 + t^4) \exp(-t^2);$
- 7)  $\varphi = (1 + c_* t^4) \exp(-t^2).$

При этом проведено масштабирование оси времени, с тем чтобы все импульсы имели одну и ту же кривизну в вершине ( $\varphi''(0) = -1$ ), что соответствует переходу от параметра  $\gamma$  к  $\tilde{\gamma} = \sqrt{a_2}\gamma$ , где  $a_2$  — коэффициент в разложении (7). Это удобно для сравнения различных по форме импульсов: при этом в адиабатической области вероятность ионизации не зависит от вида  $\varphi(t)$ , см. (9); такая зависимость появляется, лишь начиная с членов порядка  $\gamma^4$ . Функции  $f(\gamma)$  показаны на рис. 2. Из рис. 1 и 2 видно, что при переходе от  $\varphi(t) = \cos t$  к импульсным полям различного вида, сосредоточенным на конечном интервале времени, значения функций  $g(\gamma)$  и  $f(\gamma)$  уменьшаются, особенно в области  $\gamma > 1$  (быстропеременные поля), что в силу условий (2) приводит к резкому возрастанию вероятности ионизации (поскольку  $\epsilon \ll 1$ , а

$\varphi(t)$	$\chi(z)$	$\tilde{g}_4 \cdot 100$
$\cos t$	$(1+z^2)^{-1/2}$	3.21
$\cos^2 t$	—	2.86
$1/\operatorname{ch}^2 t$	$(1+z^2)^{-1}$	2.14
$(\operatorname{ch}^2 t + \beta^2 \operatorname{sh}^2 t)^{-1}$	$[\operatorname{ch}^2 \beta z + (\operatorname{sh} \beta z / \beta)^2]^{-1}$	$1.43(1 + \delta/2)$
$[\operatorname{ch}^2 \beta t + (\operatorname{sh} \beta t / \beta)^2]^{-1}$	$(\operatorname{ch}^2 z + \beta^2 \operatorname{sh}^2 z)^{-1}$	$2.14(1 - \delta/3)$
$1/I_0(t)$	—	1.96
$1/\operatorname{ch} t$	$1/\operatorname{ch} z$	1.79
$(1+t^2)^{-1}$	$1/\operatorname{ch}^2 z$	1.43
$(1+t^2)^{-3/2}$	$(1+z^2)^{-3/2}$	1.79
$(1+t^2)^{-2}$	см. (21)	1.96
$\exp(-t^2)$	см. (13)	2.50
$(1-t^2)/(1+t^2)^2$	$2/(1+4z^2 + \sqrt{1+4z^2})$	2.38
$(1-2t^2)e^{-t^2}$	—	2.98
$\operatorname{cn}(t, q), 0 \leq q \leq 1$	$[1 + (\operatorname{sh} qz/q)^2]^{-1/2}$	$0.357(9 - 4q^2)$
см. (33)	$(1+z^2)^{-\mu}$	$1.07(1 + \mu^{-1})$

Примечание. Здесь  $\delta = 1/(1 + \beta^2)$ ,  $I_0(t)$  — модифицированная функция Бесселя, а  $\operatorname{cn}$  — эллиптический косинус [24].

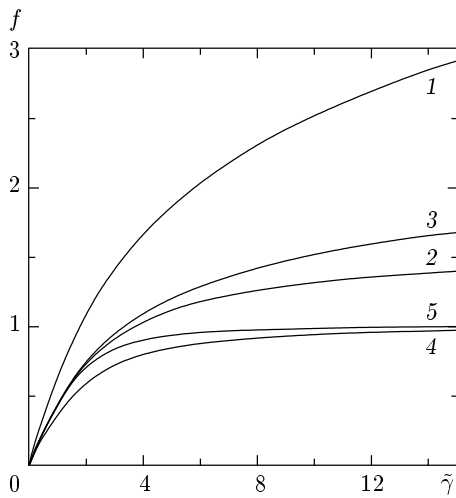


Рис. 2. Функция  $f(\gamma)$  из уравнения (10). Номера кривых указаны в (38)

$K_0 \gg 1$ , см. формулы (3) и (10)). Часть кривых на рис. 1 относится к импульсам вида

$$\varphi(t) = (1 + ct^4) \exp(-t^2), \quad a_2 = 2. \quad (39)$$

При  $c = 0$  получаем гауссовский импульс (кривая 3); штриховые кривые 6 и 7 на рис. 1 соответствуют значениям  $c = 1$  и  $c = c_* \approx 1.544$ , которые являют-

ся выделенными (см. Приложение Б). Во всех рассмотренных нами случаях функция  $g(\gamma)$  монотонно уменьшается с ростом параметра Келдыша  $\gamma$ .

Из рис. 2 видно, что поведение функции  $f(\gamma)$  при больших  $\gamma$  непосредственно связано с аналитическими свойствами функции поля  $\varphi(t)$  в комплексной плоскости. А именно, кривые 1 и 3, отвечающие целым аналитическим функциям  $\varphi(t) = \cos t$  и  $\exp(-t^2)$ , возрастают как  $\ln \gamma$  и  $\sqrt{\ln \gamma}$ , в то время как в остальных случаях они выходят на постоянный предел:  $f(\gamma) \rightarrow \tau_s$ , где  $t_s = i\tau_s$  — положение ближайшей к вещественной оси особенности функции  $\varphi(t)$ :  $\tau_s = \pi/2$  для кривой 2 и  $\tau_s = 1$  для кривых 4 и 5. При этом выход на эту асимптотику (соответствующую формуле (17) для импульсного спектра) может происходить достаточно быстро.

Зависимость от  $\tilde{\gamma}$  коэффициента импульсного спектра  $c_1$  показана на рис. 3а, а для коэффициента  $b_1$  — на рис. 3б. Кривые для  $c_2(\gamma)$  аналогичны рис. 3, за исключением области малых  $\gamma$ , в которой  $c_1 \propto \gamma^3$ , а  $c_2 = \gamma + O(\gamma^3)$ .

Для импульсов (14) и (23) были выполнены расчеты при  $\alpha = 1, 1.5, 2, 3$  и  $\infty$  (при этом  $\alpha = \infty$  соответствует предельному переходу к (25)). В обоих случаях с ростом показателя  $\alpha$  значения  $g(\tilde{\gamma})$  монотонно возрастают, а вероятность ионизации уменьшается (рис. 4). Это можно объяснить тем, что при



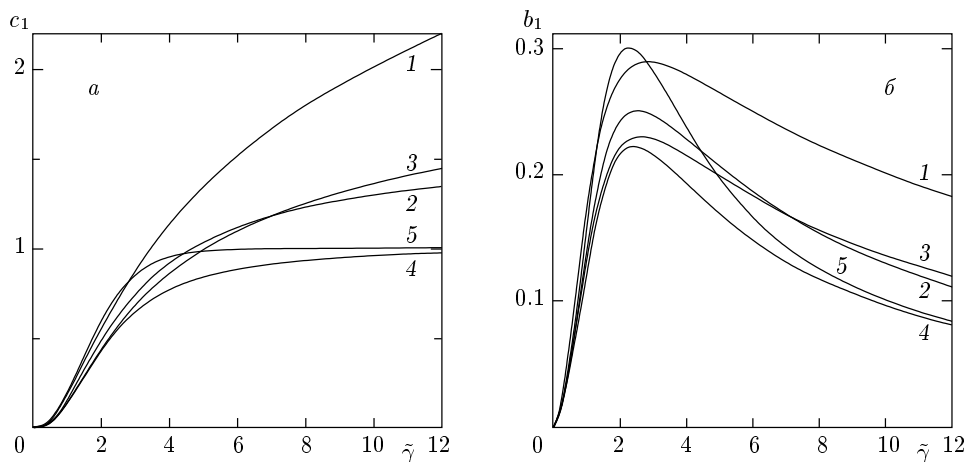


Рис. 3. а) Коэффициент  $c_1(\gamma)$  для тех же импульсов, что и на предыдущем рисунке. Отметим, что  $c_1(\infty) = \pi/2$  для кривой 2 и  $c_1(\infty) = 1$  для кривых 4 и 5. б) Коэффициент  $b_1(\gamma)$  в (3) для различных импульсов

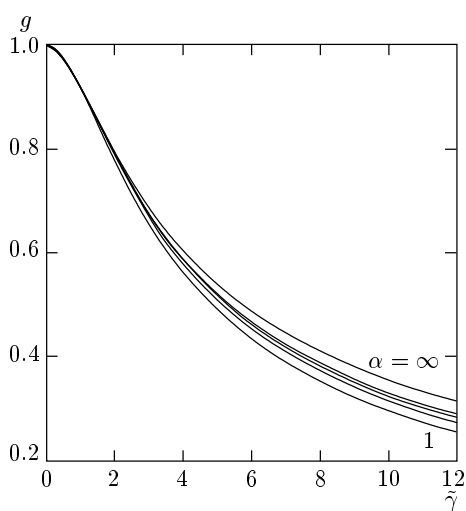


Рис. 4. Функция  $g(\gamma)$  для импульсов вида (23) с  $J = 0$ . Кривые отвечают значениям  $\alpha = 1, 3/2, 2, 5/2$  и  $\infty$  (снизу вверх),  $\tilde{\gamma} = \sqrt{6\alpha}\gamma$

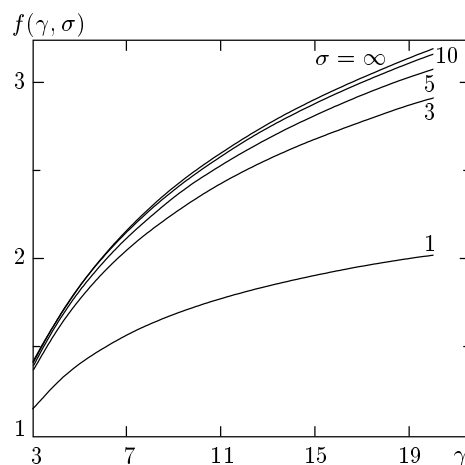


Рис. 5. Функция  $f(\gamma, \sigma)$  из (10) в случае импульсного поля (40). Кривые (снизу вверх) соответствуют следующим значениям параметра  $\sigma$ , определяющего ширину импульса:  $\sigma = 1, 3, 5, 10$  и  $\infty$

этом уменьшается вес высоких гармоник поля  $\varphi(t)$  с частотами  $\omega \gg 1/\tau_s$ :

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega t}{[1 + (t/\tau_s)^2]^\alpha} dt \propto (\omega \tau_s)^{-\alpha} \exp(-\omega \tau_s).$$

Сравнение рис. 1 и 4 показывает, что для процесса многофотонной ионизации нет качественного различия между однополярными импульсами типа (14) и импульсами с интегралом  $J = 0$ .

Следующие рисунки относятся к случаю модули-

рованного электромагнитного импульса

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \cos t, \tag{40}$$

что уже близко к реальному эксперименту. Здесь при малых  $\gamma$

$$g(\gamma) = 1 - \frac{1}{10\sigma^2} (1 + \sigma^2) \gamma^2 + \frac{1}{280\sigma^4} (9\sigma^4 + 14\sigma^2 + 7) \gamma^4 + \dots \tag{41}$$

С уменьшением  $\sigma$  импульс укорачивается: его амплитуда уменьшается за один период лазерно-

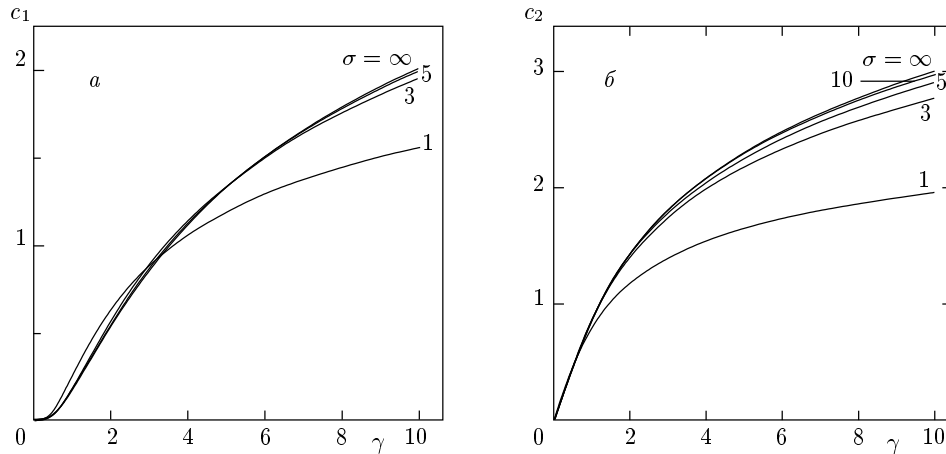


Рис. 6. Коэффициенты  $c_1$  (а) и  $c_2$  (б) импульсного спектра (10) в зависимости от  $\gamma$ . У кривых указаны значения параметра  $\sigma$ , входящего в (40)

го поля на фактор  $\delta \approx \exp(-2\pi^2/\sigma^2)$ , причем  $J \propto \exp(-\sigma^2/2) \rightarrow 0$  при  $\sigma \gg 1$ . Значения функций  $g(\gamma)$  и  $f(\gamma)$  при этом также уменьшаются (см. рис. 5), что приводит к резкому возрастанию вероятности ионизации. Физически это объясняется тем, что увеличивается относительный вес высоких гармоник  $\omega_n$  в спектре импульса, которые при  $\omega_n > I$  могут ионизовать атом уже в первом порядке теории возмущений (в то время как для монохроматического света высшие гармоники вообще отсутствуют и остается только многофотонный механизм ионизации [4]). Как видно из рис. 5, для поля (40) это становится заметным при  $\sigma \sim 5-10$ . Считая (несколько условно) длительностью лазерного импульса то время, в течение которого его амплитуда превышает фиксированную величину  $\varepsilon$ , имеем при  $\sigma \gg 1$

$$N \approx 0.1\sigma^2 \ln \frac{1}{\varepsilon},$$

т.е.  $N \sim 0.2\sigma^2$  для  $\varepsilon = 0.1$ . Поэтому укорочение светового импульса начинает заметно сказываться на вероятности ионизации, когда импульс охватывает  $N \sim 5-10$  периодов лазерного поля. Что же касается формы импульсного спектра, то из рис. 6а следует, что зависимость коэффициента  $c_1(\gamma, \sigma)$  от параметра  $\sigma$  можно пренебречь, если  $\sigma \geq 3$ , и вообще она менее существенна, чем для функции  $f$ , т.е. для скорости ионизации атома. То же справедливо и в отношении коэффициента  $c_2(\gamma, \sigma)$ , см. рис. 6б.

Аналогичные результаты были получены в слу-

чае огибающей лоренцевой формы, т.е. для<sup>7)</sup>

$$\varphi(t) = [1 + (2t/\sigma)^2]^{-1} \cos t. \quad (42)$$

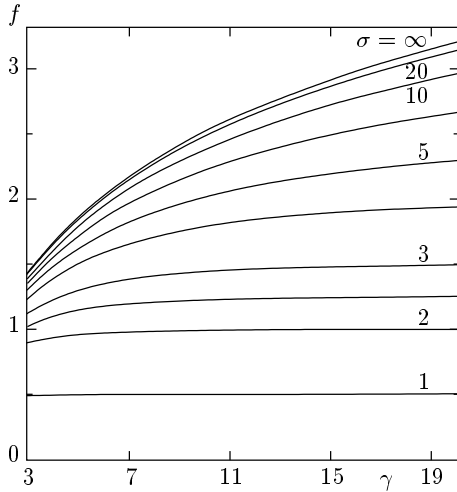
Как и для (40), с уменьшением  $\sigma$  (т.е. при укорочении импульса) значения  $f(\gamma, \sigma)$  при фиксированном  $\gamma$  уменьшаются (рис. 7). Имеется, однако, качественное различие между импульсами (40) и (42) в области больших  $\gamma$ , связанное с аналитическими свойствами функции  $\varphi(t)$ . А именно, значения  $f(\gamma, \sigma)$  на рис. 5 возрастают (логарифмически) вместе с  $\gamma$ , а для (42) они выходят на постоянный предел<sup>8)</sup>:  $f(\gamma, \sigma) \rightarrow \tau_s = \sigma/2$  при  $\gamma \rightarrow \infty$ , так же как и в случае (14). Это объясняется тем, что (40) — целая функция  $t$ , в то время как (42) имеет полюс в точке  $t_s = i\sigma/2$ .

Наконец, функции  $g(\gamma)$  для периодического поля (27), рассчитанные по уравнениям (4) и (30), показаны на рис. 8, который демонстрирует довольно резкую зависимость от параметра ангармоничности  $\rho$ , причем уменьшение  $g(\gamma)$  заметно уже в области малых  $\gamma$ . При значениях  $\rho$ , близких к единице, вероятность ионизации сильно возрастает даже при  $\gamma \lesssim 1$ .

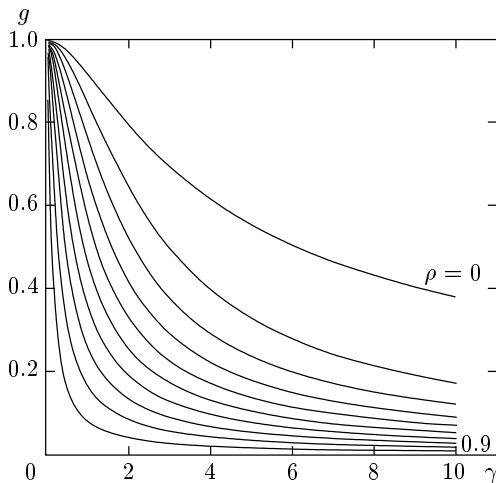
Уравнения (4)–(6) позволяют рассчитать все величины, входящие в квазиклассические формулы (3), (10) для  $w_i(\mathbf{p})$ , в случае произвольного импульса  $\mathcal{E}(t)$  и при любом значении  $\gamma$ , что открывает возможность детального сравнения теории многофотонной

<sup>7)</sup> Здесь  $\sigma$  совпадает с шириной огибающей на половине ее высоты. В случае поля (40) эта величина составляет  $2.35\sigma$ .

<sup>8)</sup> С ростом  $\sigma$  область установления этой асимптотики отодвигается в сторону все больших значений  $\gamma$ , и при  $\sigma = \infty$  имеем  $f(\gamma) = \ln 2\gamma - 1/2 + \dots$



**Рис. 7.** Функция  $f(\gamma, \sigma)$  для импульса с лоренцевой огибающей (42). Кривым (снизу вверх) отвечают значения  $\sigma = 1, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6.67, 10, 20$  и  $\infty$  (монохроматический свет)



**Рис. 8.** Случай периодического поля (27). Значения параметра  $\rho = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8$  и  $0.9$  для кривых сверху вниз

ионизации с экспериментом в области сильных полей и ультракоротких импульсов.

**5. О ТУННЕЛЬНОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ СПЕКТРЕ**

Существует интерференционный эффект в энергетическом спектре фотоэлектронов, который (в случае линейной поляризации лазерного излучения) был отмечен в [6] и недавно исследован эксперимен-

тально [28, 29] (в этих работах он был назван «туннельной интерференцией»). В случае периодического поля (1), для которого  $\varphi(t + T/2) = -\varphi(t)$ , уравнение для перевальных точек в комплексной плоскости  $t$  (или для начального момента в ММВ),

$$\mathbf{p}^2(t_k) = \left( p_{\parallel} + \frac{F}{\omega} \int_0^{t_k} \varphi(t) dt \right)^2 + p_{\perp}^2 = -\kappa^2, \quad (43)$$

имеет решения

$$t_k \equiv \omega t'_k = k\pi + i\tau \left( \gamma \sqrt{1 + q_{\perp}^2} + i\gamma q_{\parallel} \right). \quad (44)$$

Здесь  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{p}/\kappa$ ,  $\mathbf{p}$  — импульс электрона на выходе из-под барьера,  $\tau(z)$  — функция, введенная в (5), (6), и принято  $T = 2\pi$ . При  $p \ll \kappa$  и для  $k = 0$  имеем

$$\tau(\gamma, \mathbf{p}) = -it_0 = \tau_0 + \frac{1}{2}\tau_1 q_{\perp}^2 + \tau_2 q_{\parallel}^2 + i \left( \tau_1 - \tau_2 q_{\perp}^2 - \tau_3 q_{\parallel}^2 \right) q_{\parallel} + O(q^4), \quad (45)$$

где  $\tau_0 = \tau(\gamma)$  — «начальный момент» подбарьерного движения электрона и

$$\tau_n(\gamma) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \gamma^n \frac{d^n \tau(\gamma)}{d\gamma^n}, \quad n \geq 1. \quad (45')$$

Амплитуда  $A_k$  перехода электрона из связанного состояния в состояние непрерывного спектра определяется функцией действия  $S$ , вычисленной вдоль пути от точки  $t_k$  до вещественной оси времени (после чего  $\text{Im } S(t)$  уже не меняется). Как видно из (45), при  $p_{\parallel} \neq 0$  начальная точка  $t_0$  смещается с мнимой оси времени и аналогично сдвигаются также и другие седловые точки  $t_k$ . При этом между амплитудами  $A_k$  и  $A_{k+1}$ , отвечающими точкам  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , расположенным в пределах одного периода лазерного излучения (например,  $A_0$  и  $A_1$ ), возникает вещественный сдвиг фазы  $\phi$ , который и приводит к интерференции. С помощью ММВ [7] получаем

$$A_k(t) = \exp [iS_k(t)] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{t_k}^t [\kappa^2 + \mathbf{p}^2(t')] dt' \right\}, \quad (46)$$

$$A_{2k} = \exp \left( -2\pi i k \frac{\varepsilon}{\omega} \right) A_0, \quad (47)$$

$$A_{2k+1} = \exp \left[ -i \left( \frac{\pi \varepsilon}{\omega} + \phi \right) \right] A_{2k}.$$

Здесь разность фаз между  $A_0$  и  $A_{2k}$  набегаёт при изменении  $t$  вдоль вещественной оси времени за  $k$  периодов ( $\varepsilon$  — квазиэнергия системы в периодическом поле), а фаза  $\phi$  возникает при интегрировании (по мнимому времени) линейного по  $p_{\parallel}$  члена  $2p_{\parallel}F\omega^{-1}h(\tau')$ , входящего в  $\mathbf{p}^2(t')$  в (46). Точнее говоря, соседние амплитуды  $A_{2k}$  и  $A_{2k+1}$  получают фазовые множители  $\exp(\pm i\phi/2)$ . Когерентное сложение амплитуд  $A_k$  приводит к тому, что вероятность перехода становится пропорциональной времени<sup>9)</sup> и возникает  $\delta$ -функция, выражающая закон сохранения энергии при  $n$ -фотонном поглощении. Суммируя вклады от  $2N$  точек перевала (за  $N$  периодов поля), переходим при  $N \rightarrow \infty$  к вероятности ионизации в единицу времени (см. (Б.7) и работы [30–33]):

$$w = \frac{\omega}{\pi} \sum_{n>\nu} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [1 + (-1)^n \cos \phi] w_i(\mathbf{p}) \times \delta\left(\frac{p^2}{2} - (n - \nu)\omega\right) \quad (48)$$

(линейный режим  $W_i \propto t$ , справедливый на временах  $\omega^{-1} \ll t \ll 1/\omega$ ). При этом  $w_i(\mathbf{p}) = |A_0|^2$  относится к одиночному импульсу и дается формулой (3).

В случае ионизации атомного  $s$ -уровня импульсный спектр при  $n$ -фотонном поглощении принимает вид

$$w(\mathbf{p}_n) \rightarrow w(\mathbf{p}_n) [1 + (-1)^n \cos \phi(\mathbf{p}_n)] / 2, \quad (49)$$

где  $p_n = \sqrt{2\omega(n - \nu)}$ ,  $\nu$  — порог фотоионизации (В.9), вероятность многофотонной ионизации  $w(\mathbf{p})$  определена в (3) или (10), фаза осцилляций равна

$$\phi(\mathbf{p}_n) = \frac{\kappa^2 p_{\parallel}}{F} [A(\gamma) + O(p^2/\kappa^2)], \quad (50)$$

$$A = 2\gamma^{-2} \int_0^{\tau_0(\gamma)} h(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{4} a_2 \gamma^2 + \dots \quad (\gamma \rightarrow 0), \quad (51)$$

а функция  $h(\tau)$  определена в (5). В частности, для монохроматического лазерного света  $h(\tau) = \text{sh } \tau$  и  $\tau_0 = \text{arcsch } \gamma$ , откуда [6]

$$A(\gamma) = 2\gamma^{-2} (\text{ch } \tau_0 - 1) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \gamma^2}} \quad (52)$$

<sup>9)</sup> Для одиночного импульса вида  $1/\text{ch}^2 t$  или  $\exp(-t^2)$  можно определить только полную вероятность ионизации за все время действия импульса.

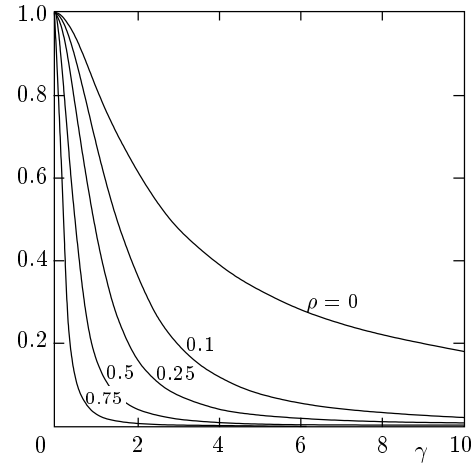


Рис. 9. Зависимость функции  $A(\gamma)$ , определяющей фазу осцилляций, от параметра Келдыша для периодического поля (27). Кривым (сверху вниз) отвечают значения параметра ангармоничности  $\rho = 0, 0.1, 0.25, 0.5$  и  $0.75$

(см. кривую для  $\rho = 0$  на рис. 9). Характерная величина фазы осцилляций составляет  $\phi \sim \kappa^2 p_{\parallel} / F \sim 1/\gamma\sqrt{\varepsilon}$  при малых  $\gamma$  и  $\phi \sim \kappa p / \omega \sim \sqrt{K_0 / \ln 2\gamma}$  при  $\gamma \gg 1$ , поэтому даже в последнем случае число осцилляций достаточно велико (поскольку  $K_0 \gg 1$ ).

С помощью (51) нетрудно показать, что для периодической последовательности импульсов вида  $\varphi(t) = 1/\text{ch}^2 t$  и  $(1 + t^2)^{-3/2}$  соответственно имеем

$$A(\gamma) = \frac{\ln(1 + \gamma^2)}{\gamma^2} \quad \text{и} \quad \frac{2}{1 + \gamma^2 + \sqrt{1 + \gamma^2}} \quad (53)$$

(в этих случаях при  $\gamma \gtrsim \sqrt{K_0}$  фаза  $\phi$  становится порядка единицы). Наконец, для периодического поля (27)  $h(\tau) = p^{-1} \text{arcth}(p \text{sh } \tau)$  и

$$A(\gamma) = \frac{2}{p\gamma^2} \int_0^{\text{th } p\gamma} \frac{\text{arcth } x}{\sqrt{x^2 + p^2}} dx, \quad p = \frac{2\sqrt{\rho}}{1 - \rho} \quad (54)$$

(при  $\rho = 0$  мы возвращаемся к (52)). Как видно из рис. 9, с ростом ангармоничности излучения фаза осцилляций быстро уменьшается даже при сравнительно небольших  $\gamma < 1$ .

Энергетический спектр получается при интегрировании выражений (3), (49) по углам вылета фотоэлектрона, в результате чего амплитуда осциллирующего слагаемого существенно уменьшается, см. формулы (Б.14), (Б.15). Это находится в качественном согласии с рис. 1 из работы [28], см. правую верхнюю часть указанного рисунка, относящуюся к случаю линейной поляризации излучения. Отметим,

что при  $\varphi = \cos t$  был также вычислен [16] и кубический по импульсу член в разложении фазы осцилляций  $\phi$  (при всех  $\gamma$ ).

Интерференционный эффект в импульсном спектре фотоэлектронов, возникающий при сложении амплитуд  $A_k$ , впервые, по-видимому, рассматривался (в теории многофотонной ионизации атомов) в работе [6], см. там формулу (53), а также разд. 8 в [16]. В иной физической ситуации (и при другом законе дисперсии  $\varepsilon(\mathbf{p})$ ) аналогичные явления встречаются в теории электрического пробоя полупроводников [32], в теории рождения пар заряженных бозонов и фермионов из вакуума под действием переменного электрического поля [30, 31], а также в задаче о резонансном возбуждении атомных уровней в сильном электромагнитном поле (в двухуровневом приближении [33]). В последнее время процесс образования  $e^+e^-$ -пар из вакуума в сильном электрическом поле, рассматривавшийся ранее в чисто теоретическом аспекте [30, 31, 34–38], вновь привлекает к себе внимание в связи с разрабатываемыми проектами создания рентгеновских лазеров на свободных электронах на основе электрон-позитронного коллайдера TESLA, а также в SLAC [39].

### 6. ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Разобранные выше примеры импульсных полей позволяют рассмотреть вопрос об области применимости адиабатического ( $\gamma \ll 1$ ) приближения в теории многофотонной ионизации. После масштабирования  $t \rightarrow \sqrt{a_2}t$  (см. разд. 4) получаем

$$g(\gamma) = 1 - \frac{1}{10}\tilde{\gamma}^2 + \tilde{g}_4\tilde{\gamma}^4 + \dots, \quad (55)$$

$$\tilde{g}_4 = \frac{10a_2^2 - a_4}{280a_2^2}, \quad \tilde{\gamma} = \sqrt{a_2}\gamma,$$

где  $a_2$  и  $a_4$  — коэффициенты в (7), и аналогичные разложения для коэффициентов  $b_1(\gamma)$  и  $b_2(\gamma)$  импульсного спектра.

Зависимость от конкретного вида импульса  $\varphi(t)$  начинает проявляться здесь в членах порядка  $\gamma^4$ . Коэффициенты  $\tilde{g}_4$  (в отличие от  $g_4$ ) зависят только от формы импульса, но не от его длительности, и во всех рассмотренных нами случаях численно малы, см. таблицу. Так, для (14) и (23) имеем соответственно

$$\tilde{g}_4 = \frac{1}{280}(7 - 3\alpha^{-1}) \quad \text{и} \quad \frac{1}{168}(5 - \alpha^{-1}), \quad (56)$$

в случае поля (40) этот коэффициент меняется от 0.025 до 0.032 при  $0 < \sigma < \infty$ , а для (42) — от 0.014 до 0.032. Это указывает на то, что область применимости адиабатического приближения (заведомо справедливого при  $\gamma \ll 1$ ), как правило, «затягивается» вплоть до значений  $\gamma \gtrsim 1$ , так что при  $\gamma \sim 1$  ситуация ближе к туннельной, чем к многофотонной. Это подтверждается и результатами численных расчетов, представленными на рис. 1 и 4, на которых кривые для различных импульсов весьма близки друг к другу в области  $\gamma \leq 2-3$ .

Отметим еще, что асимптотика коэффициентов  $g_n$  (и радиус сходимости адиабатических разложений (8), (8') и (8'')) определяются ближайшей особенностью функции  $\chi(z)$ . Если

$$\chi(z) \approx A(z^2 + a^2)^{-\mu}, \quad z \rightarrow \pm ia, \quad (57)$$

то с учетом разложения

$$(1 - z)^{-\mu} = \sum_n \frac{\Gamma(n + \mu)}{n! \Gamma(\mu)} z^n,$$

имеем<sup>10)</sup> при  $n \rightarrow \infty$

$$g_n \approx \frac{3A}{4\Gamma(\mu)} n^{\mu-3} a^{-2(n+\mu)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (58)$$

Для монохроматического излучения  $\chi(z) = (1 + z^2)^{1/2}$ , т. е.  $A = a = 1$ ,  $\mu = 1/2$ , и асимптотика (58) согласуется с разложением точных коэффициентов (36):

$$f_n = \frac{2}{3}g_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{-5/2} \left[ 1 - \frac{17}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]. \quad (59)$$

Аналогично, для импульса (14) параметры в (58) равны

$$\mu = \alpha, \quad a = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{2\Gamma(\alpha)}. \quad (60)$$

В обоих случаях ближайшими к нулю особенностями функции  $g(\gamma)$  являются степенные точки ветвления. Так, для функции Келдыша (11) имеем

$$g(\gamma) = \frac{3}{2\gamma} f(\gamma) = c_0 + c_1(1 + \gamma^2) + (1 + \gamma^2)^{3/2} + \dots, \quad \gamma \rightarrow \pm i$$

( $c_0$  и  $c_1$  — некоторые константы), что в точности соответствует (59).

<sup>10)</sup> За исключением  $\mu = 0, -1, -2, \dots$ , когда  $\chi(z)$  имеет особенность логарифмического типа. Соответствующие формулы можно найти в [40, 41].

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сделаем несколько заключительных замечаний.

а) Уравнения движения классической частицы в однородном поле (1) могут быть проинтегрированы аналитически. Это позволяет получить (в квазиклассическом приближении) для вероятности ионизации атомного уровня,  $W_i$ , и импульсного спектра фотоэлектронов,  $w_i(\mathbf{p})$ , формулы (3)–(5), в которые внешнее электрическое поле  $\mathcal{E}(t')$  входит через функцию  $\chi$ , для нахождения которой сформулирован простой алгоритм. После этого вероятность ионизации можно вычислить для произвольного импульса, удовлетворяющего условиям применимости квазиклассики, а во многих случаях — получить решение в аналитическом виде.

б) Исследована зависимость функций, определяющих  $w_i(\mathbf{p})$ , от формы лазерного импульса. Показано, что коэффициенты  $c_{1,2}(\gamma)$  импульсного спектра практически не зависят от длительности ультракороткого импульса (40), если он охватывает не менее трех оптических периодов.

в) Рассмотрен эффект туннельной интерференции в периодическом лазерном поле, приводящий к быстрым осцилляциям в энергетическом спектре фотоэлектронов.

г) Полученные выше формулы относятся к ионизации систем, связанных короткодействующими силами (ионы  $\text{H}^-$ ,  $\text{He}^-$  и т. д.). Как показано в [9, 42], учет кулоновского взаимодействия между вылетающим электроном и атомным ядром может быть проведен в рамках квазиклассической теории возмущений по кулоновскому потенциалу, что приводит к появлению (большого по величине) предэкспоненциального множителя в выражении для скорости ионизации атомного уровня. Поскольку форма импульсных спектров определяется в основном факторами, стоящими в экспоненте, то результаты данной работы могут применяться не только для описания процесса ионизации отрицательных ионов типа  $\text{H}^-$ , но и в случае нейтральных атомов (во всяком случае, в области  $\gamma \lesssim 1$ ).

д) Выше нами было наложено условие  $\varphi(-t) = \varphi(t)$ , которое фактически означает, что  $\varphi(t)$  — вещественная аналитическая функция  $t^2$ , ближайшая особенность которой на полусоси  $-\infty < t^2 < 0$  находится на конечном расстоянии от  $t = 0$  (или вообще не имеет особенностей в конечной части  $t$ -плоскости, как в случае  $\varphi = \cos t \equiv \text{ch} \sqrt{-t^2}$  или  $\exp(-t^2)$ ). Этому условию удовлетворяют все рассмотренные выше функции, а также  $\varphi(t) = [(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)]^{-1}$ ,  $\text{sn}(t, q)$  и множество других.

Если данное условие не выполняется, то не удастся полностью изгнать мнимости из уравнений подбарьерного движения, и формулы усложняются. Однако расчет вероятности ионизации  $W_i$  можно провести методом перевала, определяя седловые точки функции действия в комплексной плоскости. Таким путем в [3] были рассмотрены импульсные поля  $\varphi(t) = 3^{3/2} \text{sh} t / 2 \text{ch}^3 t$  и  $t \exp[(1 - t^2)/2]$  (solitonlike one-cycle pulse и Gaussian one-cycle pulse, согласно [3]), для которых  $\varphi(-t) = -\varphi(t)$  и  $J = 0$ ; числовые множители подобраны здесь так, чтобы в точках экстремума  $|\varphi(t_m)| = 1$ . В этих случаях предсказываются также осцилляции в спектре фотоэлектронов, обязанные интерференции двух симметричных относительно мнимой оси  $t$  (и с равными значениями  $\text{Im} S$ ) точек перевала — ситуация, аналогичная рассмотренной в разд. 5 для периодического поля. Отметим, что для полей вида  $\varphi(t) = 1/\text{ch}^2 t$  и  $1/(1 + t^2)$  полученные в работах [3] и [9, 10] экспоненциальные факторы в вероятности  $W_i$  полностью совпадают в пределах точности самого квазиклассического приближения.

Автор хотел бы выразить искреннюю благодарность Л. В. Келдышу за полезное обсуждение на начальной стадии данной работы, информацию о статье [3] и обсуждение полученных результатов, Л. Б. Окуню за указание на работу [39], С. П. Гореславскому, В. Д. Муру и С. В. Попруженко за обсуждения различных вопросов в ходе работы и указание на статьи [25–29], С. Г. Позднякову за проведение численных расчетов, а также В. А. Гани и М. Н. Маркиной за помощь при оформлении рукописи.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 01-02-16850).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Разложения при малых и больших  $\gamma$ 

Подставляя (7) в (5), имеем

$$h(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{(2n+1)!} \tau^{2n+1} = z, \quad a_0 = 1. \quad (\text{A.1})$$

Отсюда, используя формулы для обращения степенного ряда [27, 43], получаем разложение  $\tau$  по степе-

ням  $z$ , коэффициенты которого выражаются через  $a_{2k}$ . С другой стороны,

$$\tau(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\chi_n}{(2n+1)!} z^{2n+1}. \quad (\text{A.2})$$

Сравнение этих выражений дает формулы (7'). Два следующих коэффициента равны

$$\begin{aligned} \chi_3 &= a_6 - 56a_4a_2 + 280a_2^3, \\ \chi_4 &= -a_8 + 120a_6a_2 + 126a_4^2 - 4620a_4a_2^2 + 15400a_2^4 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

(пользуясь данными в [43] формулами, можно написать в явном виде также коэффициенты  $\chi_5$  и  $\chi_6$  для произвольного поля  $\varphi(t)$ , однако эти выражения являются уже весьма громоздкими).

Итак, при  $z \rightarrow 0$  имеем разложение

$$\begin{aligned} \chi(z) &= 1 - \frac{1}{2}a_2z^2 + \frac{5}{12}(a_2^2 - 0.1a_4)z^4 - \\ &- \frac{7}{18}\left(a_2^3 - \frac{1}{5}a_2a_4 + \frac{1}{280}a_6\right)z^6 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

подстановка которого в (4) дает разложения  $g(\gamma)$  и коэффициентов  $b_{1,2}(\gamma)$  импульсного спектра в адиабатической области.

Приведем еще сводку асимптотик ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) для функций  $f, c_1$  и  $c_2$  в тех случаях, когда они могут быть получены разложением точных формул типа (11) или (12).

Для  $\varphi(t) = \cos t$ , очевидно,  $\tau_s = \infty$  и

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \ln 2\gamma - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2\gamma}{2\gamma^2} + \dots, \\ c_1 &= \ln 2\gamma - 1 + \frac{3}{4\gamma^2}, \quad c_2 = \ln 2\gamma + \frac{1}{4\gamma^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

(здесь опущены члены, пропорциональные  $\gamma^{-4}$ ), для  $\varphi(t) = 1/\text{ch}^2 t$  («солитон») имеем  $\tau_s = \pi/2$ ,

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \frac{\pi}{2} - 2\gamma^{-1} + \frac{\pi}{2\gamma^2} - \frac{2}{3\gamma^3} + \dots, \\ c_1 &= \frac{\pi}{2} - 2\gamma^{-1} + O(\gamma^{-3}), \\ c_2 &= \frac{\pi}{2} - \gamma^{-1} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

для  $\varphi(t) = 1/\text{ch} t$

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{8\gamma^2} + 4\gamma^{-1}e^{-\gamma} + \dots, \\ c_1 \approx c_2 &= \frac{\pi}{2} + O(e^{-\gamma}), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

для  $\varphi(t) = (1+t^2)^{-3/2}$

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= 1 - (\ln 2\gamma - 1/2)\gamma^{-2} + O(\gamma^{-4}), \\ c_1 &= 1 - \frac{3}{2\gamma^2} + \dots, \quad c_2 = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

для лоренцевского импульса,  $\varphi(t) = (1+t^2)^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= 1 - \frac{\pi^2}{12\gamma^2} + 2\gamma^{-1}e^{-2\gamma} + \dots, \\ c_1 \approx c_2 &= 1 + O(e^{-2\gamma}) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

и, наконец, для гауссиана  $\varphi(t) = \exp(-t^2/2)$  получаем

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \sqrt{2 \ln \gamma} + \frac{\ln \ln \gamma}{\sqrt{2 \ln \gamma}} + \dots = \\ &= \sqrt{2 \ln(\gamma \ln \gamma)} + \dots, \\ c_1(\gamma) \approx c_2(\gamma) &\approx \sqrt{2 \ln \gamma}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Итак, для полей типа (14), (23)

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \tau(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} f(\gamma) = \tau_s, \quad (\text{A.11})$$

где  $t_s = it_s$  — ближайшая к вещественной оси особая точка функции поля  $\varphi(t)$ , причем выход на этот предел тем более медленный, чем больше показатель  $\alpha$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Некоторые вспомогательные формулы

а) Функция  $w(x)$ , или интеграл Досона, определяется как [24, 44]

$$\begin{aligned} w(x) &= \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \operatorname{erf}(ix) \exp(-x^2), \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

имеет разложения

$$\begin{aligned} w(x) &= \\ &= \begin{cases} x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \dots, & x \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2}x^{-1} + \frac{1}{4}x^{-3} + \frac{3}{8}x^{-5} + \dots, & x \rightarrow \infty \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

и достигает максимума, равного 0.54104 при  $x_m = 0.9241 \dots$ . Отметим соотношение

$$\begin{aligned} w^{(n)}(x) &= (-1)^n [H_n(x)w(x) - p_{n-1}(x)], \\ n &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

где  $p_{n-1}(x)$  — полином степени  $n-1$ :  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2x$ ,  $p_3 = 4x^2 - 2x - 2$  и т. д., а  $H_n(x)$  — полином Эрмита.

б) Рассмотрим функцию (39). При  $0 \leq c \leq 1$  она монотонно убывает при  $t > 0$ , при  $c > 1$  у нее появляются минимумы ( $\pm t_1$ ) и максимумы ( $\pm t_2$ ), причем  $t_1^2 = 1 - \sqrt{1 - c^{-1}}$ ,  $t_2^2 = 1 + \sqrt{1 - c^{-1}}$ . С ростом константы  $c$  высота максимумов увеличивается, и  $\varphi(\pm t_2) = \varphi(0) = 1$  при  $c = c_* = 1.5441 \dots$ . Если  $c > c_*$ , то наибольшее значение электрического поля достигается уже не в нуле, а при  $t = \pm t_2$ . Штриховые кривые на рис. 1 соответствуют  $c = 1$  и  $c_*$ , а кривая 3 — значению  $c = 0$  (гауссиан). Учитывая, что

$$h(\tau) = \int_0^\tau e^{t^2} (1 + ct^4) dt = \left( 1 + c \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \int_0^\tau e^{\beta t^2} dt \Big|_{\beta=1},$$

$$\int_0^\tau \exp(\beta t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{\beta}} w(\sqrt{\beta} \tau) \exp(\beta \tau^2) \quad (\text{Б.4})$$

и применяя (Б.3), получаем в итоге

$$h(\tau) = \left[ \left( 1 + \frac{3}{4}c \right) w(\tau) + c \left( \tau^2 - \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{4} \right) \right] \times \exp(\tau^2), \quad (\text{Б.5})$$

что определяет функции  $\chi(z)$  и  $g(\gamma)$  для импульса вида (39).

в) Форма ультракороткого импульса  $\varphi(t)$ , отвечающего анзацу (31), может быть задана в параметрическом виде:

$$\varphi = (1 + \xi^2)^{-\mu}, \quad t = \int_0^\xi (1 + x^2)^{\mu-3/2} dx, \quad (\text{Б.6})$$

$$0 < \xi < \infty,$$

откуда легко следуют разложения (33) и (33'), а при  $\mu = 1/2, 1$  и  $3/2$  — и явные выражения для  $\varphi(t)$ , приведенные выше в разд. 3.

г) При выводе формулы (48) используется соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \left| \sum_{k=0}^{2N-1} A_k \right|^2 = |A_0|^2 \times$$

$$\times \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \left| \sum_{k=0}^{2N-1} \exp \{ -i[k\alpha + (-1)^k \beta] \} \right|^2 =$$

$$= \omega |A_0|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [1 + (-1)^n \cos 2\beta] \delta(\alpha - n\pi) \quad (\text{Б.7})$$

и то, что  $|A_k| = |A_0|$  при всех  $k$  в силу условия  $\varphi(t+T/2) = -\varphi(t)$ . В нашем случае  $\beta = \phi/2$ , см. (50), и

$$2\alpha = \frac{1}{2} \int_0^T [\kappa^2 + \mathbf{P}^2(t')] dt' = \frac{\pi}{\omega} (p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 + 2\omega\nu), \quad (\text{Б.8})$$

$$\alpha - n\pi = \frac{\pi}{\omega} \left[ \frac{1}{2} p^2 - (n-\nu)\omega \right] = \frac{\pi}{2\omega} (p^2 - p_n^2),$$

где  $\nu$  — порог фотоионизации; например,

$$\nu = K_0 \left( 1 + \frac{1}{2\gamma^2} \sum_{k \geq 1} \frac{f_k^2}{k^2} \right), \quad (\text{Б.9})$$

если  $\varphi(t) = \sum_k f_k \cos kt$ . Превышение  $\nu$  над параметром многоквантовости  $K_0$  связано с энергией колебательного движения вылетающего электрона в поле волны.

д) При интегрировании (49) по углам вылета фотоэлектронов встречаются интегралы двух типов:

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \exp\{-(a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta)\} \sin \theta d\theta =$$

$$= e^{-b} \frac{w(\sqrt{a-b})}{\sqrt{a-b}}, \quad (\text{Б.10})$$

где  $a = c_2 p_n^2 / \omega$ ,  $b = c_1 p_n^2 / \omega$ ,  $a > b$  (см. (10), (11)) и  $w(x)$  — функция Досона (Б.1), а также ее обобщение

$$w(x, \lambda) =$$

$$= e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \cos 2\lambda t dt = \text{Re} [e^{2i\lambda x} w(x+i\lambda)] \quad (\text{Б.11})$$

(здесь  $x, \lambda$  — вещественные,  $\lambda = A(\gamma)\kappa^2 p_n / 2F$ ). Подстановка  $t = x\sqrt{1-s}$  дает интегральное представление

$$w(x, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{2} x \int_0^1 e^{-sx^2} \cos(2\lambda x \sqrt{1-s}) (1-s)^{-1/2} ds, \quad (\text{Б.12})$$

откуда

$$w(x, \lambda) = x - \frac{2}{3} (1 + \lambda^2) x^3 + O(x^5), \quad x \rightarrow 0, \quad (\text{Б.13})$$

$$w = \frac{1}{2x} \left[ \cos 2\lambda x + \frac{\lambda}{x} \sin 2\lambda x + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - 2\lambda^2}{2x^2} \cos 2\lambda x + \dots \right], \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{Б.14})$$



а в случае  $\rho \equiv \sqrt{x^2 + \lambda^2} \rightarrow \infty$

$$w(x, \lambda) = \frac{x \cos 2\lambda x + \lambda \sin 2\lambda x}{2(x^2 + \lambda^2)} + O(\rho^{-3}). \quad (\text{B.15})$$

Таким образом, эта функция быстро осциллирует и убывает при  $\lambda x \gg 1$ , что объясняет значительное уменьшение амплитуды осцилляций в энергетическом спектре электронов [28] по сравнению с формулой (49), в которой эта амплитуда достигает 100%.

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**

**Асимптотика функции  $f(\gamma)$  при  $\gamma \rightarrow \infty$**

Используя [24, 27], получаем

$$F\left(\alpha, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \tau^2\right) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \tau / \tau, & \alpha = 1, \\ (1 - \tau^2)^{-1/2}, & \alpha = 3/2, \\ [\operatorname{arctg} \tau + \tau / (1 - \tau^2)] / 2\tau, & \alpha = 2, \\ \left(1 - \frac{2}{3}\tau^2\right) (1 - \tau^2)^{-3/2}, & \alpha = 5/2 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

и далее по рекуррентному соотношению

$$F\left(\alpha + 1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \tau^2\right) = \frac{1}{2\alpha} \times \left[ (1 - \tau^2)^{-\alpha} + (2\alpha - 1)F\left(\alpha, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \tau^2\right) \right]. \quad (\text{B.2})$$

При произвольном  $\alpha > 1$  и  $x \rightarrow 1$

$$F\left(\alpha, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x\right) = [2(\alpha - 1)(1 - x)^{\alpha-1}]^{-1} + \dots,$$

поэтому из уравнения  $h(\tau_0) = \gamma$  непосредственно вытекает (16) для начального «момента времени»  $\tau_0(\gamma)$ .

Функция  $\chi(z)$  имеет асимптотику (15') при  $z \rightarrow \infty$ . Если в (14) показатель  $\alpha < 3/2$ , то  $\alpha/(\alpha - 1) > 3$  и

$$f(\gamma) = \tau_s - a\gamma^{-2} + \dots, \quad a = \int_0^\infty \chi(z)z^2 dz, \quad (\text{B.3})$$

$\gamma \rightarrow \infty$

(например,  $\tau_s = 1$  и  $a = \pi^2/12$  в случае  $\alpha = 1$ ), а также

$$\begin{aligned} c_1(\gamma) &= \tau_s - \alpha c_\infty \gamma^{-\nu} + \dots, \\ c_2(\gamma) &= \tau_s - (\alpha - 1)c_\infty \gamma^{-\nu} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

где  $\chi(z) \approx c_\infty z^{-\alpha/(\alpha-1)}$  и  $\nu = 1/(\alpha - 1) > 2$ . Отсюда следует асимптотическая формула (17).

Если  $\alpha = 3/2$ , то  $\chi(z) \propto z^{-3}$  и интеграл (B.3) логарифмически расходится на верхнем пределе. Естественно, что здесь появляется поправка, пропорциональная  $\ln \gamma/\gamma^2$  (см. (A.8)). Наконец, при  $\alpha > 3/2$

$$\begin{aligned} \tau(\gamma) &= \tau_s - k\gamma^{-\nu} + \dots, \\ f(\gamma) &= \tau_s - k_1\gamma^{-\nu} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

причем

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{\alpha - 1} < 2, \\ k &= \frac{2\alpha - 2}{2\alpha - 3} [2^\alpha(\alpha - 1)]^{-1/(\alpha-1)}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$E_1 = \frac{2(\alpha - 1)}{2\alpha - 3} k.$$

Тем самым мы определили асимптотику  $f(\gamma)$  при  $\gamma \rightarrow \infty$  для импульса (14) и установили ее связь с ближайшей особенностью функции  $\varphi(t)$ , задающей форму импульса, в комплексной  $t$ -плоскости. Переход от (14) к общему случаю степенной особенности,

$$\varphi(t) \approx (1 + t^2/\tau_s^2)^{-\alpha}, \quad t \rightarrow i\tau_s, \quad (\text{B.7})$$

осуществляется с помощью соотношений скейлинга (26).

В противоположном случае,  $\gamma \rightarrow 0$ , высшие порядки адиабатических разложений (8) и их радиус сходимости зависят от ближайшей к нулю особенности функции  $\chi(z)$ . Таким образом, аналитические свойства функций  $\chi$  и  $\varphi$  проявляются в области соответственно малых и больших значений  $\gamma$ .

**ЛИТЕРАТУРА**

1. N. Bloembergen, Rev. Mod. Phys. **71**, S283 (1999).
2. T. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. **72**, 545 (2000).
3. L. Keldysh, *Multiphoton ionization by a very short pulse* (in press).
4. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
5. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **50**, 255 (1966).
6. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966); **51**, 309 (1966).
7. В. С. Попов, В. П. Кузнецов, А. М. Переломов, ЖЭТФ **53**, 331 (1967).
8. А. И. Никишов, Труды ФИАН **111**, 152 (1979).

9. V. S. Popov, *Laser Phys.* **10**, 1033 (2000).
10. В. С. Попов, препринт ИТЭФ № 39-00, Москва (2000); Письма в ЖЭТФ **73**, 3 (2001).
11. В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, ЖЭТФ **113**, 1579 (1998).
12. R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948).
13. R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York (1965); перевод: Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва (1968).
14. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971), с. 225.
15. А. А. Радциг, Б. М. Смирнов, *Параметры атомов и атомных ионов*, Энергоатомиздат, Москва (1986).
16. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **70**, 493 (1999); ЖЭТФ **118**, 56 (2000).
17. V. S. Popov, Preprint ИТЭФ № 17-00, Moscow (2000).
18. В. Д. Мур, С. В. Попруженко, В. С. Попов, ЖЭТФ **119**, 893 (2001).
19. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ **34**, 242 (1958).
20. С. П. Гореславский, Н. Б. Нарожный, В. П. Яковлев, Письма в ЖЭТФ **46**, 173 (1987).
21. S. P. Goreslavsky, N. B. Narozhny, and V. P. Yakovlev, *J. Opt. Soc. Amer. B* **6**, 1572 (1989).
22. R. R. Freeman, P. H. Bucksbaum, and T. J. McIlrath, *IEEE J. Quant. Electronics* **24**, 1461 (1988).
23. J. H. Eberly, J. Javanainen, and K. Rzazewsky, *Phys. Rep.* **204**, 331 (1991).
24. *Handbook of mathematical functions*, ed. by M. Abramowitz and I. Stegun, Dover, New York (1965); перевод: М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
25. Е. Г. Бессонов, ЖЭТФ **80**, 852 (1981).
26. R. Grobe and M. V. Fedorov, *Laser Phys.* **3**, 265 (1993).
27. Н. В. Dwight, *Tables of integrals and other mathematical data*, Dover, New York (1947).
28. G. G. Paulus, F. Zacher, H. Walther et al., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 484 (1998).
29. W. Becker, M. Kleber, A. Lohr et al., *Laser Phys.* **8**, 56 (1998).
30. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **13**, 261 (1971); **18**, 435 (1973); ЯФ **19**, 1140 (1974).
31. M. S. Marinov and V. S. Popov, *Fortschr. Phys.* **25**, 373 (1977).
32. Ю. А. Бычков, А. М. Дыхне, ЖЭТФ **58**, 1735 (1970).
33. Д. Ф. Зарецкий, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **66**, 537 (1974).
34. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
35. E. Brezin and C. Itzykson, *Phys. Rev. D* **2**, 1191 (1970).
36. Н. Б. Нарожный, А. И. Никишов, ЯФ **11**, 1072 (1970); ЖЭТФ **65**, 862 (1973).
37. В. С. Попов, ЖЭТФ **61**, 1334 (1971).
38. В. М. Мостепаненко, В. М. Фролов, ЯФ **19**, 885 (1974).
39. A. Ringwald, Preprint DESY 01-024, E-print archives, hep-ph/0103185 (2001).
40. Е. Титчмарш, *Теория функций*, Гостехиздат, Москва (1951).
41. В. С. Попов, ЖЭТФ **47**, 2229 (1964).
42. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **52**, 514 (1967).
43. С. Е. van Orstrand, *Phil. Mag.* **19**, 366 (1910).
44. К. А. Карпов, *Таблицы функции  $w(z)$  в комплексной плоскости*, изд. АН СССР, Москва (1954).