

## *g*-ФАКТОРЫ СВЯЗАННЫХ ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

А. П. Мартыненко<sup>a\*</sup>, Р. Н. Фаустов<sup>b\*\*</sup>

<sup>a</sup> Самарский государственный университет  
443011, Самара, Россия

<sup>b</sup> Научный Совет «Кибернетика» Российской академии наук  
117333, Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 февраля 2001 г.

Сформулирован квазипотенциальный метод расчета релятивистских и радиационных поправок к магнитному моменту двухчастичного связанного состояния в случае частиц с произвольным спином. Показано, что выражения для *g*-факторов связанных частиц содержат члены порядка  $O(\alpha^2)$ , зависящие от спина частиц. Получены численные значения *g*-факторов электрона в атоме водорода и дейтерии.

PACS: 31.30.Jv, 12.20.Ds, 32.10.Dk

Изучение электромагнитных свойств водородоподобных атомов и ионов в квантовой электродинамике представляет собой одну из основных задач в теории двухчастичных связанных состояний. Экспериментальная проверка расчета *g*-факторов частиц в связанном состоянии осуществляется уже в течение многих лет [1, 2]. Измеренные значения *g*-факторов электрона в водороде, дейтерии, гелии ( $^4\text{He}^+$ ) находятся в хорошем согласии с теоретическими результатами. В последнее время экспериментальная область исследований водородоподобных ионов была существенно расширена [3, 4]. Эти эксперименты вызывают необходимость новых теоретических расчетов различных вкладов в *g*-факторы связанных частиц [5–7]. Наиболее точно к настоящему времени выполнены измерения *g*-фактора электрона в водородоподобном ионе углерода  $^{12}\text{C}^{5+}$  ( $Z = 6$ ) [3, 4, 7]:

$$g_e^{exp}(^{12}\text{C}^{5+}) = 2.001\,041\,596\,4(8)(6)(40), \quad (1)$$

где в скобках последовательно указаны статистические (8) и систематические (6) ошибки, а также погрешность, связанная с массой электрона (40). Теоретические исследования электромагнитных свойств водородоподобных атомов, выполнен-

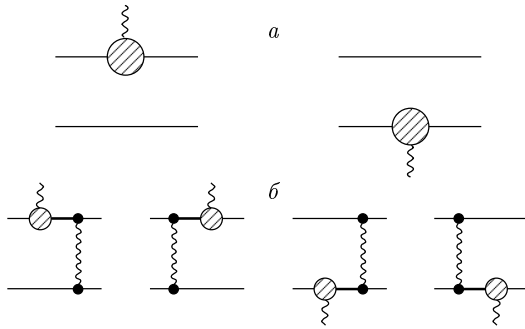
ные в работах [8–14], показали что гиромангнитные множители связанных частиц могут быть представлены в виде ряда:

$$g(\text{H-атом}) = 2 + \Delta g_{rel} + \Delta g_{rad} + \Delta g_{rec} + \dots \quad (2)$$

Релятивистские поправки  $\Delta g_{rel}$ , радиационные поправки  $\Delta g_{rad}$ , поправки на отдачу  $\Delta g_{rec}$  были вычислены с точностью до членов порядка  $\alpha^3(m/M)$  и  $\alpha^2(m/M)^2$  в [8, 9] в рамках квазипотенциального метода для частиц со спином  $1/2$ , образующих связанную систему. Многозначно обозначены другие возможные члены в *g*-факторе. Вместе с тем, эксперименты с дейтерием, водородоподобными ионами, ядра которых имеют различные спины, вызывают необходимость формулировки методов расчета *g*-факторов в этом случае. В работе [15] был предложен способ расчета поправок к гиромангнитным множителям, основанный на уравнении Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ) [16] и сделан вывод об их независимости от величины спина конститuentов. В данной работе сформулирован квазипотенциальный метод расчета магнитного момента связанного состояния двух частиц с произвольным спином и вычислены основные вклады в поправки (2) порядка  $O(\alpha^2)$  и  $O(\alpha^3)$ , которые возникают в приближении однофотонного взаимодействия частиц в связанном состоянии (см. рисунок).

\*E-mail: mart@info.ssu.samara.ru

\*\*E-mail: faustov@theory.npi.msu.su



Обобщенные вершинные функции двух частиц  $\Gamma_\mu$ : диаграмма  $a - \Gamma_\mu^{(0)}$ , диаграмма  $b - \Gamma_\mu^{(1)}$  (жирная линия обозначает отрицательно-частотную часть пропагатора частицы)

Взаимодействие массивных частиц с произвольным спином с электромагнитным полем исследуется в рамках различных подходов уже длительное время [17–27], но пока эта проблема далека от своего окончательного решения. В [18–20] было показано, что в древесном приближении частица с произвольным спином должна иметь гиромангнитный фактор  $g = 2$ . В общем случае для частицы со спином  $S$  матричный элемент электромагнитного тока определяется с помощью  $(2S + 1)$  формфактора (зарядового, магнитного, квадрупольного и т. д.). При исследовании магнитного момента простейших атомных систем можно ограничиться формфакторами наименьшей мультипольности, определяющими распределение электрического заряда и магнитного момента, представляя матричный элемент  $J_\mu$  оператора электромагнитного тока между состояниями с импульсами  $p$  и  $q$  в виде

$$J_\mu = \bar{U}(p) \left\{ \Gamma_\mu F_1^D + \frac{1}{2m} \Sigma_{\mu\nu} k^\nu F_2^P \right\} U(q), \quad (3)$$

где  $k^\nu = (p - q)^\nu$ . Волновая функция  $U(p)$  частицы с произвольным спином, входящая в (3), может быть представлена следующим образом [26, 27]:

$$U = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \\ \beta_1 \beta_2 \dots \beta_q \\ \eta^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q} \\ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \end{pmatrix}, \quad p + q = 2S, \quad (4)$$

где спин-тензоры  $\xi, \eta$  симметричны по верхним и нижним индексам. Для частицы с полуцелым спином имеем

$$p = S + 1/2, \quad q = S - 1/2,$$

а в случае целого спина

$$p = q = S.$$

Преобразование Лоренца для спиноров  $\xi$  и  $\eta$  имеет вид [27, 28]

$$\xi = \exp\left(\frac{\Sigma \cdot \phi}{2}\right) \xi_0, \quad \eta = \exp\left(-\frac{\Sigma \cdot \phi}{2}\right) \xi_0, \quad (5)$$

где  $\xi_0$  — спинор в системе покоя, направление вектора  $\phi$  совпадает со скоростью частицы и  $\text{th } \phi = v$ , а генератор лоренцева преобразования  $\Sigma$  равен

$$\Sigma = \sum_{i=1}^p \sigma_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} \sigma_i. \quad (6)$$

Матрица  $\sigma_i$  действует на  $i$ -й индекс спинора  $\xi_0$  следующим образом:

$$\sigma_i \xi_0 = (\sigma_i)_{\alpha_i \beta_i} (\xi_0)_{\dots \beta_i \dots}. \quad (7)$$

Компоненты антисимметричного тензора  $\Sigma_{\mu\nu}$  в (3) представляют собой генераторы бустов и вращений [27, 28]:

$$\Sigma_{n0} = \begin{pmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & -\Sigma_n \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\Sigma_{mn} = -2i\epsilon_{mnk} \begin{pmatrix} s_k & 0 \\ 0 & s_k \end{pmatrix}, \quad s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2S} \sigma_i.$$

В стандартном представлении, которое вводится по аналогии со спином  $1/2$ , волновая функция свободной частицы (4) с точностью до членов  $(v/c)^2$  имеет вид

$$U(p) = \begin{pmatrix} \left[1 + \frac{(\Sigma \cdot \mathbf{p})^2}{8m^2}\right] \xi_0 \\ \frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{2m} \xi_0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Магнитный момент связанного состояния двух частиц с произвольным спином определяется следующим образом [8, 9]:

$$\mathbf{M} = -\frac{i}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \Delta} \times \langle \mathbf{K}_A | \mathbf{J}(0) | \mathbf{K}_B \rangle \right], \quad (10)$$

$$\Delta = \mathbf{K}_A - \mathbf{K}_B,$$

где матричный элемент оператора электромагнитного тока между связанными состояниями выражается через волновые функции связанной системы  $\Psi_{\mathbf{K}_B}(\mathbf{p})$  и обобщенную вершинную функцию  $\Gamma_\mu$ , представленную на рисунке:

$$\langle \mathbf{K}_A | J_\mu(0) | \mathbf{K}_B \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{K}_A) \times$$

$$\times \Psi_{\mathbf{K}_A}^*(\mathbf{p}) \Gamma_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{q}, E_A, E_B) \times$$

$$\times \Psi_{\mathbf{K}_B}(\mathbf{q}) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{K}_B) \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2}{(2\pi)^3}. \quad (11)$$

Вершинная функция  $\Gamma_\mu$  определяется с помощью пятиточечной функции

$$R_\mu = \langle 0 | \psi_1(t, \mathbf{x}_1) \psi_2(t, \mathbf{x}_2) J_\mu(0) \bar{\psi}_1(\tau, \mathbf{y}_1) \bar{\psi}_2(\tau, \mathbf{y}_2) | 0 \rangle, \quad (12)$$

спроектированной на положительно-частотные состояния:

$$\Gamma_\mu = G^{-1} R_\mu^{(+)} G^{-1}, \quad R_\mu^{(+)} = U_1^* U_2^* R_\mu U_1 U_2, \quad (13)$$

где  $G$  — двухчастичная функция Грина. Поскольку мы изучаем слабо связанную двухчастичную систему, все введенные величины  $\Gamma$ ,  $R$  и  $G^{-1}$  могут быть разложены в ряд по теории возмущений:

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \Gamma^{(1)} + \dots, \quad R = R_0 + R_1 + \dots, \quad (14)$$

$$G^{-1} = G_0^{-1} - V_1 - \dots,$$

$$\Gamma^{(0)} = G_0^{-1} R_0 G_0^{-1}, \quad (15)$$

$$\Gamma^{(1)} = G_0^{-1} R_1 G_0^{-1} - V_1 G_0 \Gamma^{(0)} - \Gamma^{(0)} G_0 V_1, \dots, \quad (16)$$

где  $G_0$  — функция Грина двух не взаимодействующих частиц,  $V_1$  — квазипотенциал однофотонного взаимодействия (см. уравнение (19)).

Закон преобразования волновой функции  $\Psi_{\mathbf{K}_B}(\mathbf{p})$  системы частиц со спинами  $s_1, s_2$  при переходе от системы покоя к движущейся системе с импульсом  $\mathbf{K}_B$ , полученный в работе [29], имеет вид

$$\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{K}_B) \Psi_{\mathbf{K}_B}(\mathbf{p}) = D_1^{S_1}(R_W) D_2^{S_2}(R_W) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\epsilon_1^0 \epsilon_2^0 M}{\epsilon_1 \epsilon_2 E}} \Psi_0(\mathbf{p}^0) \delta(\mathbf{p}_1^0 + \mathbf{p}_2^0), \quad (17)$$

где  $D^S(R)$  — матрицы вращения, а  $R_W$  — вигнеровский поворот, связанный с лоренцевским преобразованием  $\Lambda_{\mathbf{K}_B}$ :

$$(E, \mathbf{K}_B) = \Lambda_{\mathbf{K}_B}(M, 0); \quad (\epsilon, \mathbf{p}) = \Lambda(\epsilon^0, \mathbf{p}^0),$$

$$E = \sqrt{M^2 + \mathbf{K}_B^2}, \quad \epsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Точное выражение для матрицы вращения имеет вид [9]

$$D^S(R_W) = S^{-1}(\mathbf{p}) S(\mathbf{K}_B) S(\mathbf{p}^0), \quad (18)$$

где  $S(\mathbf{p})$  — матрица лоренцевского преобразования спинорной волновой функции (4). Квазипотенциальная волновая функция  $\Psi_0(\mathbf{p}^0)$  в системе покоя свя-

занного состояния удовлетворяет следующему квазипотенциальному уравнению [30]:

$$G_0^{-1} \Psi \equiv \left( \frac{b^2}{2\mu_R} - \frac{\mathbf{p}^{0^2}}{2\mu_R} \right) \Psi_0(\mathbf{p}^0) =$$

$$= \int V(\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0, M) \Psi_0(\mathbf{q}^0) \frac{d\mathbf{q}^0}{(2\pi)^3}, \quad (19)$$

где  $\mu_R$  — релятивистская приведенная масса:

$$\mu_R = \frac{E_1 E_2}{M} = \frac{M^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^3},$$

$$E_{1,2} = \frac{M^2 - m_{2,1}^2 + m_{1,2}^2}{2M},$$

$M = E_1 + E_2$  — масса связанного состояния,

$$b^2(M) = \frac{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4M^2}.$$

В нерелятивистском пределе уравнение (19) переходит в уравнение Шредингера с кулоновским потенциалом. Функции  $D^S$  в (18) можно получить в приближенном виде, используя (5):

$$D^S(R_W) \approx 1 + \frac{\mathbf{p}^{0^2} - (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}^0)(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}^0)}{4m^2} +$$

$$+ \frac{\mathbf{K}_B^2 - (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{K}_B)(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{K}_B)}{4M^2} +$$

$$+ \frac{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{K}_B - (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}^0)(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{K}_B)}{4mM}. \quad (20)$$

Основной вклад в вершинную функцию  $\Gamma_\mu$ , который определяется диаграммой  $a$  на рисунке, может быть представлен следующим образом (в брейтовской системе):

$$\Gamma^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \bar{U}_1(p_1) e_1 \left\{ \Gamma_1 + \frac{i\kappa_1}{m_1} [\mathbf{S}_1 \times \boldsymbol{\Delta}] \right\} \times$$

$$\times U_1(q_1) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + (1 \leftrightarrow 2), \quad (21)$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1,$$

где  $F_{1,2}^D(0) = e_{1,2}$ ,  $F_{1,2}^P(0) = e_{1,2} \kappa_{1,2}$ , а матрица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\Sigma} \\ -\boldsymbol{\Sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

является естественным обобщением  $\gamma$ -матрицы Дирака для спина 1/2 в стандартном представлении.

Для упрощения отдельных слагаемых в (20) удобно использовать следующие коммутационные соотношения [27]:

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = 4i\epsilon_{ijk} s_k, \quad [\Sigma_i, s_j] = i\epsilon_{ijk} \Sigma_k. \quad (23)$$

При построении вершинной функции  $\Gamma^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  с учетом членов  $(v/c)^2$  воспользуемся явным видом волновой функции (9), преобразуя отдельные слагаемые матричного элемента (21) с помощью уравнений движения для спиноров  $U(\mathbf{p})$ . Учитывая  $\delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2)$ , получим

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(\mathbf{p}_1) \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1}{2m_1} U(\mathbf{q}_1) &= \\ &= 2\mathbf{p}^0 - \frac{\epsilon_2}{M} \Delta + \frac{i\mathbf{p}^0 (\mathbf{S}_1 \cdot [\mathbf{p}^0 \times \Delta])}{m_1^2}, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(\mathbf{p}_1) \frac{\epsilon_1(\mathbf{p}_1) - \epsilon_1(\mathbf{q}_1)}{2m_1} \mathbf{A}_1 U_1(\mathbf{q}_1) &= \\ &= -\frac{2\mathbf{p}^0 \cdot \Delta}{m_1^2} i[\mathbf{S}_1 \times \mathbf{p}^0], \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(\mathbf{p}_1) [\mathbf{S}_1 \times \Delta] U_1(\mathbf{q}_1) &= [\mathbf{S}_1 \times \Delta] - \frac{1}{2m_1^2} \times \\ &\times \{ \mathbf{p}^0 (\mathbf{S}_1 \cdot [\mathbf{p}^0 \times \Delta]) + [\mathbf{p}^0 \times \mathbf{S}_1] (\mathbf{p}^0 \cdot \Delta) \}. \quad (26) \end{aligned}$$

Эффекты связанности частиц в вершинной функции  $\Gamma_\mu$  определяются диаграммой ( $\hat{b}$ ) на рисунке. Соответствующее ей выражение с учетом итерационных членов квазипотенциала удобно представить в виде [8, 9]:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= U_1^*(\mathbf{p}_1) U_2^*(\mathbf{p}_2) \frac{\epsilon_1}{2m_1} \times \\ &\times \left\{ \mathbf{A}_1 \Lambda_1^{(-)}(\mathbf{p}'_1) \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \hat{V}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_2) + \right. \\ &\left. + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \hat{V}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) \Lambda_1^{(-)}(\mathbf{q}'_1) \mathbf{A}_1 \right\} \times \\ &\times U_1(\mathbf{q}_1) U_2(\mathbf{q}_2) + (1 \leftrightarrow 2), \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{V}(\mathbf{k}) &= \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \left\{ \left( 1 + \frac{\kappa_1}{2m_1} \Gamma_1 \cdot \mathbf{k} \right) \left( 1 - \frac{\kappa_2}{2m_2} \Gamma_2 \cdot \mathbf{k} \right) - \right. \\ &- \left( \mathbf{A}_1 + \frac{\kappa_1}{m_1} \mathcal{B}_1 i[\mathbf{S}_1 \times \mathbf{k}] \right) \left( \mathbf{A}_2 - \frac{\kappa_2}{m_2} \mathcal{B}_2 i[\mathbf{S}_2 \times \mathbf{k}] \right) \left. \right\} \times \\ &\times \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{k^2}, \quad (28) \end{aligned}$$

где одночастичный проекционный оператор на отрицательно-частотные состояния равен

$$\Lambda^-(\mathbf{p}) \approx \frac{1 - \mathcal{B}}{2} - \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}}{2m},$$

$\kappa_{1,2}$  — аномальные магнитные моменты частиц. Матрицы  $\mathbf{A}_{1,2}, \mathcal{B}_{1,2}$  также являются естественными обобщениями для  $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$  в случае частиц со спином 1/2 (аналогично (22)):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma \\ \Sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (29)$$

С точностью до членов порядка  $(v/c)^2$  вклад в магнитный момент системы дают оба слагаемых потенциала (28). Подставляя (27), (28) и (9) в (11) и вычисля производную по  $\Delta$  в (10), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \Psi_0^*(\mathbf{p}) \frac{\epsilon_1}{2\epsilon_1(\mathbf{p})} \left\{ 2(1 + \kappa_1) \times \right. \\ &\times \mathbf{s}_1 [1 + N_1 + N_2] + (1 + 4\kappa_1) \frac{[\mathbf{p} \times [\mathbf{s}_1 \times \mathbf{p}]]}{2m_1^2} + \\ &+ (1 + \kappa_2) \frac{[\mathbf{p} \times [\mathbf{s}_2 \times \mathbf{p}]]}{m_1 m_2} \frac{\Sigma_1^2}{3} - \frac{\epsilon_2(\mathbf{p})}{M} \times \\ &\times \left[ 1 + N_1 + N_2 + \frac{(M - \epsilon_1 - \epsilon_2) \Sigma_1^2}{m_2} \frac{1}{3} \right] i \left[ \mathbf{p} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] + \\ &+ \frac{1}{2M} \left[ \mathbf{p} \times \left[ \mathbf{p} \times \left( \frac{\mathbf{s}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{s}_2}{m_2} \right) \right] \right] \left. \right\} \times \\ &\times \Psi_0(\mathbf{p}) + (1 \leftrightarrow 2), \quad (30) \end{aligned}$$

где

$$N_i = \frac{\mathbf{p}^2 - (\Sigma_i \cdot \mathbf{p})(\Sigma_i \cdot \mathbf{p})}{2m_i^2}. \quad (31)$$

В случае  $S$ -состояний выражение (30) существенно упрощается:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} g_{1 \text{ bound}} \frac{\epsilon_1}{m_1} \langle \mathbf{s}_1 \rangle + \frac{1}{2} g_{2 \text{ bound}} \frac{\epsilon_2}{m_2} \langle \mathbf{s}_2 \rangle, \quad (32)$$

где  $g$ -факторы связанных частиц равны

$$\begin{aligned} g_{1 \text{ bound}} &= g_1 \left\{ 1 - \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{3m_1^2} \left[ 1 - \frac{3\kappa_1}{2(1 + \kappa_1)} \right] + \right. \\ &+ \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{2m_1^2} \left[ 1 - \frac{\langle \Sigma_1^2 \rangle}{3} + \right. \\ &+ \left. \frac{m_1^2}{m_2^2} \left( 1 - \frac{\langle \Sigma_2^2 \rangle}{3} \right) \right] + \frac{\epsilon_2 \langle \mathbf{p}^2 \rangle \langle \Sigma_2^2 \rangle}{\epsilon_1 3m_2^2} - \\ &- \left. \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{(1 + \kappa_1) 6m_1(m_1 + m_2)} \left( 1 - \frac{\epsilon_2 m_1}{\epsilon_1 m_2} \right) \right\}, \quad (33) \end{aligned}$$

$$g_{2 \text{ bound}} = g_{1 \text{ bound}}(1 \leftrightarrow 2), \quad \frac{1}{2}g_{1,2} = 1 + \kappa_{1,2}.$$

Для водородоподобного иона (индекс 1 соответствует электрону, индекс 2 — ядру) имеем:

$$e_1 = -e, \quad e_2 = Ze, \quad \langle \mathbf{p}^2 \rangle = \frac{m_1^2 m_2^2 (Z\alpha)^2}{(m_1 + m_2)^2},$$

$$\frac{1}{2}g_e = 1 + \kappa_1, \quad \frac{1}{2}g_N = 1 + \kappa_2,$$

$$K_{s_1} = \frac{\langle \Sigma_1^2 \rangle}{3} = 1, \quad K_{s_2} = \frac{\langle \Sigma_2^2 \rangle}{3} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4s_2}{3}, & s_2 \text{— целый спин ядра,} \\ \frac{4s_2 + 1}{3}, & s_2 \text{— полуцелый спин ядра,} \end{cases} \quad (34)$$

так что *g*-факторы электрона и ядра в связанном состоянии имеют вид

$$g_{e \text{ bound}} = g_e \left\{ 1 - \frac{m_2^2 (Z\alpha)^2}{3(m_1 + m_2)^2} \times \right.$$

$$\times \left[ 1 - \frac{3\kappa_1}{2(1 + \kappa_1)} - \frac{3}{2}(1 - K_{s_1}) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} \frac{m_1^2}{m_2^2} \left( 1 - K_{s_2} - \frac{2}{3} ZK_{s_2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m_1}{2(m_1 + m_2)(1 + \kappa_1)} \left( 1 + Z \frac{m_1}{m_2} \right) \right\}, \quad (35)$$

$$g_{N \text{ bound}} = g_N \left\{ 1 - \frac{m_1^2 (Z\alpha)^2}{3(m_1 + m_2)^2} \times \right.$$

$$\times \left[ 1 - \frac{3\kappa_2}{2(1 + \kappa_2)} - \frac{3}{2}(1 - K_{s_2}) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} \frac{m_2^2}{m_1^2} \left( 1 - K_{s_1} - \frac{2}{3Z} K_{s_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m_2}{2(m_1 + m_2)(1 + \kappa_2)} \left( 1 + \frac{m_2}{Zm_1} \right) \right\}, \quad (36)$$

где мы сохранили множители  $K_{s_1}$ ,  $K_{s_2}$  в общем виде, чтобы показать симметрию соотношений (35), (36) при замене  $1 \leftrightarrow 2$ . Выражения (35), (36), полученные из диаграмм *a* и *b* рисунка, содержат поправки порядка  $O(\alpha^2)$  и  $O(\alpha^3)$ , обусловленные эффектами связанности частиц. При этом взаимодействие частиц в связанном состоянии рассматривалось в однофотонном приближении. Поправки порядка  $O(\alpha^3)$  возникают в данном случае из чле-

нов квазипотенциала, пропорциональных аномальным магнитным моментам частиц  $\kappa_1, \kappa_2$ . Соотношения (30), (35), (36) обобщают выражения для магнитного момента водородоподобного атома и гиромангнитных множителей для частиц со спином 1/2, полученные в [8, 9], на случай частиц с произвольным спином. Выражение для магнитного момента (30) содержит слагаемые, соответствующие взаимодействию свободных нерелятивистских точечных заряженных частиц с внешним электромагнитным полем, а также ряд поправок к ним, обусловленных эффектами связанности частиц. Некоторые из этих квадратичных по спиновому оператору  $\Sigma$  поправок (члены  $\sim N_i$ ), которые определяются трансформационными свойствами спиноров  $\xi$  и  $\eta$  (5), можно интерпретировать как релятивистские поправки для частицы со спином *s*. Другие поправки, обусловленные общей структурой матричного элемента тока  $J_\mu$  в (3), относятся к дипольному взаимодействию. Наши вычисления, как это следует из (35), (36), показывают, что члены порядка  $O(\alpha^2)$  в выражениях для  $g_{e \text{ bound}}$  и  $g_{N \text{ bound}}$  зависят от спина второй частицы — ядра, в отличие от работы [15], где такая зависимость отсутствует. С экспериментальной точки зрения важное значение имеют *g*-факторы электрона в атомах водорода, дейтерия, трития, а также их отношения [1]. Экспериментальное значение отношения  $g_{e \text{ H}}/g_{e \text{ D}}$ , полученное в [13] с высокой точностью, равно

$$r^{exp} = \left[ \frac{g_{e \text{ H}}}{g_{e \text{ D}}} \right]^{exp} = 1 + 7.22(3) \cdot 10^{-9}. \quad (37)$$

Аналитическое выражение этого отношения следует из формулы (35):

$$r^{th} = \left[ \frac{g_{e \text{ H}}}{g_{e \text{ D}}} \right]^{th} = 1 + \alpha^2 \left[ \frac{1}{4} \frac{m_1}{m_2} - \frac{25}{72} \frac{m_1^2}{m_2^2} - \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{m_1}{24m_2} - \frac{1}{16} \frac{m_1^2}{m_2^2} \right) \right]. \quad (38)$$

Численное значение (38) равно

$$r^{th} = 1 + 7.237 \cdot 10^{-9},$$

что хорошо согласуется с (37).

Проблема релятивистского описания взаимодействия массивной частицы с произвольным спином с электромагнитным полем изучается уже длительное время [17–25], но пока не получила своего окончательного решения. Как хорошо известно, использование принципа минимального взаимодействия

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi = D_\mu \phi \quad (39)$$

в релятивистских уравнениях для частиц со спином  $s \geq 1$  приводит к трудностям принципиального характера, которые сводятся к следующему [17–27].

1. Система уравнений в частных производных, описывающая спиновую частицу, в результате замены (39) может стать несовместной. Такая ситуация возникает, например, с уравнением Прока для векторной частицы.

2. Введение минимального взаимодействия в уравнение, описывающее свободную частицу с фиксированным спином  $s$ , может привести к уравнению движения объекта со спином  $s$ , так как соответствующая волновая функция имеет лишние компоненты.

3. Уравнение для частицы со спином  $s > 1$ , минимально взаимодействующей с электромагнитным полем, будучи релятивистски инвариантным, тем не менее, описывает распространение волны со скоростью  $v > c$ .

Различные релятивистские волновые уравнения для частицы со спином  $s$  приводят в нерелятивистском пределе к различным уравнениям паулиевского типа. Как отмечалось выше, в работе [15] был предложен способ расчета вкладов различного порядка в магнитный момент слабосвязанной системы с помощью релятивистского полуклассического уравнения движения спина. Построенный в [15] на основе этого уравнения гамильтониан взаимодействия частицы с произвольным спином с внешним электромагнитным полем приводит к таким  $g$ -факторам частиц в связанном состоянии, которые не зависят от их спина. Уравнение БМТ является приближенным: оно линейно по спину частицы, полю  $F_{\mu\nu}$ , координатной зависимостью которого пренебрегают. В случае, когда частица со спином  $s$  находится в связанном состоянии во внешнем однородном магнитном поле, опущенные в приближении уравнения БМТ члены могут дать определенный вклад в  $g$ -факторы связанных частиц. В данной работе при расчете зависящих от спина ядра вкладов в  $g$ -факторы связанных частиц водородоподобного иона мы использовали предложенный в [26, 27] способ описания взаимодействия частицы с произвольным спином с электромагнитным полем. Новые по сравнению с работой [8] вклады в (35), (36), (38) появились в результате замены обычных генераторов бустов  $\alpha$  в случае частиц со спином  $1/2$  на операторы (29). Таким образом, наш подход к описанию взаимодействия частицы с произвольным спином с электромагнитным полем основан на использовании матричного элемента электромагнитного тока (11) и

лоренцевском преобразовании спинорных волновых функций  $\xi$  and  $\eta$  (5). Мы получили дополнительные зависящие от спина члены в выражениях для  $g$ -факторов связанных частиц (см. (33)), которые возникают при учете в операторе взаимодействия частиц нелинейных слагаемых по спиновому оператору  $\Sigma$ . Гамильтониан, полученный в [15], не содержит таких нелинейных членов порядка  $O((v/c)^2)$  для частиц с произвольным спином  $s$ . Вычисленные таким образом слагаемые в выражениях для гиромагнитных множителей частиц представляют собой по существу вклад контактных членов от квадратурного взаимодействия, исследованного в [26, 27]. В случае частиц со спином  $1/2$  эти члены правильно воспроизводят хорошо известный результат, полученный независимо в [8, 10, 11, 22] в рамках различных подходов. Величина поправки в  $r^{th}$ , связанной со спином дейтрона, для которого  $I = 1$ ,  $Z = 1$ ,  $m = 2m_2$  ( $m_2$  — масса протона), составляет

$$\Delta r^{th} = 5\alpha^2 m_1^2 / 72m_2^2 = 0.001 \cdot 10^{-9}$$

и пока находится, как это следует из (37), в пределах экспериментальной погрешности. Поправки в (35), (36), связанные со спином ядра, зависят также от  $Z$  и  $N$  — числа нуклонов в ядре. Несмотря на то что с ростом  $Z$  эти поправки возрастают ( $\propto Z^3$ ), увеличение числа нуклонов  $N$  в ядре приводит к обратному эффекту. Поэтому в случае ионов типа  $^{12}\text{C}^{5+}$  со спином  $I \neq 0$  численное значение этих поправок пока также лежит за пределами экспериментальной точности. Для самого же иона углерода  $^{12}\text{C}^{5+}$  спин  $I = 0$ , поэтому  $K_I = 0$  и соответствующая спиновая поправка также обращается в нуль. В настоящее время выполнены также измерения  $g$ -факторов электрона в ионах кислорода  $^{16}\text{O}^{7+}$  и серы  $^{32}\text{S}^{14+}$  [4], ядра которых также имеют спин  $I = 0$ . На наш взгляд, было бы интересно измерить значения  $g$ -факторов частиц, используя ловушки Пеннинга [3, 4] для таких ионов, у которых с одной стороны спин  $I \neq 0$ , а с другой отношение  $Z^3/N^2$  достигало бы по возможности больших значений. Одним из таких ионов мог бы быть ион  $^{59}\text{Co}^{26+}$ , для которого  $I = 7/2$  и  $Z^3/N^2 \approx 5.65$ , а величина зависящей от спина поправки в (35) составляет  $0.1 \cdot 10^{-9}$ . Как отмечалось в докладе Квинта [4], измерение  $g$ -фактора связанного электрона с точностью, превышающей 1 ppb, можно выполнить уже в ближайшее время.

В заключение авторы выражают благодарность В. М. Шабаеву и В. Квинту за информацию о новых экспериментальных данных по  $g$ -факторам свя-

занных частиц, С. Г. Каршенбойму и И. Б. Хриповичу за полезное обсуждение проблемы магнитного момента связанных состояний. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-02-17771) и программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (грант № 990192).

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. J. Mohr and B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 351 (2000).
2. T. Beier, *Phys. Rep.* **339**, 79 (2000).
3. N. Hermanspahn, H. Haffner, H.-J. Kluge et al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 427 (2000).
4. W. Quint et al., in *Proc. 2<sup>nd</sup> Workshop on Quantum Electrodynamics and Physics of the Vacuum (QED 2000)*, ed. by D. Cantatore, AIP Conference Proc., New York (2001), Vol. 564, p. 13.
5. V. M. Shabaev, *Can. J. Phys.* **76**, 907 (1998).
6. S. G. Karshenboim, *Phys. Lett. A* **266**, 380 (2000).
7. A. Czarnecki, K. Melnikov, A. Yelkhovsky, *Phys. Rev.* **63**, 012509 (2000).
8. R. N. Faustov, *Phys. Lett. B* **33**, 422 (1970).
9. R. N. Faustov, *Nuovo Cimento A* **69**, 37 (1970).
10. H. Grotch, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 39 (1970).
11. H. Grotch and R. A. Hegstrom, *Phys. Rev. A* **4**, 59 (1971).
12. S. A. Blundell, K. T. Cheng, and J. Sapirstein, *Phys. Rev. A* **55**, 1857 (1997).
13. F. G. Walther, W. D. Phillips, and D. Kleppner, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1159 (1972).
14. H. Persson, S. Salomonson, P. Sunnergren, and I. Lindgren, *Phys. Rev. A* **56**, R2498 (1997); T. Beier, I. Lindgren, H. Persson et al., *Phys. Rev. A* **62**, 032510 (2000).
15. M. I. Eides and H. Grotch, *Ann. Phys.* **260**, 191 (1997).
16. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
17. L. P. S. Singh and C. R. Hagen, *Phys. Rev. D* **9**, 898, 910 (1974).
18. S. Weinberg, in: *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, ed. by S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton, Cambridge MA, MIT Press (1970).
19. И. Б. Хрипович, *ЖЭТФ* **96**, 385 (1989).
20. S. Ferrara, M. Poratti, and V. L. Telegdi, *Phys. Rev. D* **46**, 3529 (1992).
21. S. D. Brodsky and J. R. Primack, *Ann. Phys.* **52**, 315 (1970).
22. F. E. Close and H. Osborn, *Phys. Lett. B* **34**, 400 (1971).
23. В. И. Фушич, А. Г. Никитин, *Симметрия уравнений квантовой механики*, Наука, Москва (1990).
24. S. Deser, V. Pascalutsa, and A. Waldron, *Phys. Rev. D* **62**, 105031 (2000).
25. Yu. M. Zinoviev, in *Proc. XVII Seminar on High Energy Physics and Field Theory*, Protvino, 189 (1994).
26. I. B. Khriplovich, A. I. Milstein, and R. A. Sen'kov, *ЖЭТФ* **111**, 1935 (1997).
27. А. А. Померанский, И. Б. Хрипович, *ЖЭТФ* **113**, 1537 (1998).
28. Ю. Б. Румер, А. И. Фет, *Теория групп и квантованные поля*, Наука, Москва (1977).
29. R. N. Faustov, *Ann. Phys.* **78**, 176 (1973).
30. А. Р. Мартыненко and R. N. Faustov, *Theor. Math. Phys.* **64**, 765 (1985).