

# ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ВОДОРОДОПОДОБНОМ РЕЛЯТИВИСТСКОМ АТОМЕ: $g$ -ФАКТОР СВЯЗАННОГО ЭЛЕКТРОНА

*С. Г. Каршенбойм\**

*Государственный научный центр  
«Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева»  
198005, Санкт-Петербург, Россия*

*В. Г. Иванов*

*Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук  
198140, Санкт-Петербург, Россия*

*В. М. Шабает*

*Санкт-Петербургский государственный университет  
198904, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 12 апреля 2001 г.

Рассматривается вклад поляризации вакуума в  $g$ -фактор связанного электрона для основного состояния водородоподобного атома. Окончательное выражение для поправки получено в терминах обобщенных гипергеометрических функций и представляет собой функцию параметра  $Z\alpha$  и отношения массы орбитальной частицы (электрона или мюона) к массе частицы в вакуумной петле. Представлены различные асимптотики полученного выражения как для обычных, так и для мюонных атомов.

PACS: 12.20.Ds, 31.30.Jv, 32.10.Fn

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Существует всего несколько характеристик простых атомов, представляющих теоретический интерес, которые могут быть экспериментально определены с высокой точностью. До последнего времени к ним относились только лэмбовский сдвиг и сверхтонкое расщепление, а также некоторые связанные с ними интервалы тонкой и главной структуры спектра атома. Недавно были получены прецизионные результаты по измерению  $g$ -фактора связанного электрона в водородоподобном ионе углерода  $^{12}\text{C}^{5+}$  [1]. Ряд поправок к  $g$ -фактору связанного электрона известен [2–6] (см. также недавние работы [7, 8] и ссылки в них). Однако состояние теории нельзя признать полностью удовлетворительным. В частности, это связано с тем, что эксперимент [1, 9] позволяет получить результаты для различных ионов, и в насто-

ящее время завершается обработка данных для водородоподобного кислорода [10]. При разных значениях заряда ядра  $Z$  требования к теории также меняются. Так, точность экспериментов, осуществленных около тридцати лет назад для водорода [11], дейтерия [11, 12], трития [13] и иона гелия [14], была достаточно высокой: относительная погрешность составила  $10^{-8}$  для водорода ( $Z = 1$ ) [11, 15] и  $3 \cdot 10^{-7}$  для гелия ( $Z = 2$ ) [14, 16]. Ввиду малости заряда ядра  $Z$ , нетривиальные поправки, связанные с квантовой электродинамикой (КЭД) связанных состояний и имеющие порядок  $\alpha(Z\alpha)^4$  и выше, не играли никакой роли. Однако эксперименты с водородоподобными ионами углерода и кислорода [9] имеют точность в несколько раз выше (погрешность составляет  $2 \cdot 10^{-9}$ ) и, что более важно, при  $Z = 6, 8$  нетривиальные КЭД-поправки порядка  $\alpha(Z\alpha)^4$  оказываются на три порядка больше. Это коренным образом меняет ситуацию, и  $g$ -фактор связанного электрона оказывается в таких ионах весьма чувствитель-

\*E-mail: sgk@vniim.ru, sek@mpq.mpg.de

ным к эффектам квантовой электродинамики связанных состояний. Дальнейшие экспериментальные планы включают такие водородоподобные ионы, как ион кальция ( $Z = 20$ ), и в этом случае измерения  $g$ -фактора связанного электрона столь же чувствительны к КЭД-поправкам старших порядков, как и традиционные эксперименты по определению лэмбовского сдвига в водороде [17].

Для успешного сравнения теории и эксперимента требуется анализ ряда поправок старших порядков и проведение расчетов без разложения по параметру  $Z\alpha$ . Подобные расчеты были проведены в однопетлевом приближении численно [5, 6, 8]. Вместе с тем известно, что различные эффекты, связанные со свободной поляризацией вакуума, допускают аналитическое вычисление для дираковского электрона [18–21]. Настоящая работа посвящена точному (без разложения по параметру  $Z\alpha$ ) аналитическому вычислению вклада поляризации вакуума в  $g$ -фактор связанного электрона (часть предварительных результатов кратко изложена в [22]) и является прямым продолжением наших работ [19, 21]<sup>1)</sup>, в которых получены выражения для вклада вакуумной поляризации в лэмбовский сдвиг и сверхтонкую структуру водородоподобного атома. В данной работе представлен точный по параметру  $Z\alpha$  аналитический результат для индуцированной свободной поляризацией вакуума поправки к  $g$ -фактору связанной частицы в основном состоянии двухчастичной атомной системы. Все расчеты проведены в предположении бесконечно тяжелого точечного ядра. При средних значениях заряда ядра  $Z$ , отвечающих эксперименту [1, 9], конечность размеров ядра при необходимости может быть легко учтена как возмущение [23]. Полученные результаты справедливы как для электронного, так и для мюонного атомов.

В работе также найдены некоторые полезные асимптотики. В частности, поляризационная поправка к  $g$ -фактору электрона в основном состоянии для средних  $Z$  может быть представлена с достаточной точностью в следующем виде:

$$g_{VP} = \frac{\alpha}{\pi} \left[ -\frac{16}{15}(Z\alpha)^4 + \frac{5\pi}{9}(Z\alpha)^5 + (Z\alpha)^6 \left( \frac{16}{15} \ln(2Z\alpha) - \frac{2012}{525} \right) + (Z\alpha)^7 \left( -\frac{5\pi}{9} \ln\left(\frac{Z\alpha}{2}\right) + \frac{125\pi}{216} \right) \right]. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Некоторые опечатки, допущенные в работе [19], собраны нами в Приложении.

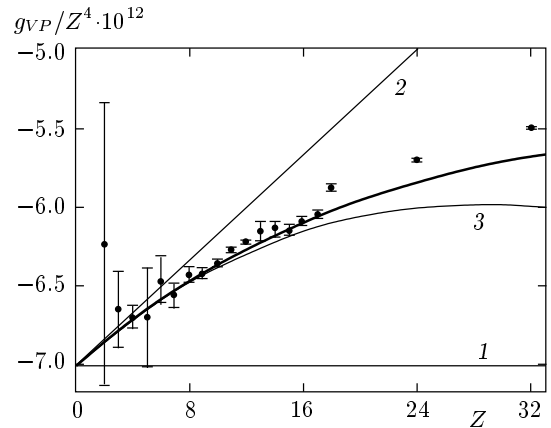


Рис. 1. Сравнение численных данных [6] (точки) для  $g_{VP}(Z)$  и аналитических результатов, полученных в данной работе: жирная линия — полное аналитическое выражение (см. (17)), тонкие линии — асимптотики  $g^{(a)} = -16\alpha(Z\alpha)^4/15\pi$  [23] (1),  $g^{(b)} = g^{(a)} + 5\alpha(Z\alpha)^5/9$  (2),  $g^{(c)} = g^{(b)} + [(16/15) \ln(2Z\alpha) - 2012/525] \alpha(Z\alpha)^6/\pi$  (ср. (1)) (3)

Данное выражение воспроизводит известный вклад порядка  $\alpha(Z\alpha)^4$  [23] и содержит новые члены разложения. Полученные результаты согласуются с численными расчетами для электронного атома [6]. Это иллюстрирует рис. 1, на котором приведены аналитические результаты, полученные ниже, а также результаты численных расчетов из работы [6]. Асимптотика (1), как легко видеть, хорошо согласуется как с полным аналитическим выражением, так и с численными расчетами. Последние содержат дополнительный вклад, связанный с потенциалом Вичманна–Кролла. Этот вклад при малых  $Z$  имеет порядок  $\alpha(Z\alpha)^6$ , что объясняет небольшое различие между нашими данными и численными расчетами, имеющими тот же порядок величины. В силу некоторых физических причин следует ожидать малых численных коэффициентов для указанного вклада, учитываемого фотон-фотонное взаимодействие (так называемое рассеяние света на свете), что и объясняет хорошее согласие асимптотики (1) с результатами аналитических и численных расчетов.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 мы получаем общее выражение для поправки к  $g$ -фактору связанного электрона (мюона) как функцию двух параметров: заряда ядра  $Z$  и отношения масс связанной в атоме частицы (электрона или мюона),  $m$ , и частицы в поляризационной петле (электрона),  $m_e$ . В настоящей работе мы полностью следуем обозначениям [19, 21]. В частности, вместо

двух упомянутых параметров мы пользуемся величинами

$$\epsilon = 1 - \sqrt{1 - (Z\alpha)^2} \approx \frac{(Z\alpha)^2}{2}$$

и

$$\kappa = \frac{Z\alpha m}{m_e},$$

лучше соответствующими физическому смыслу задачи. В разд. 3 мы исследуем различные асимптотики, отвечающие разным предельным значениям параметров  $\epsilon$  и  $\kappa$ . В статье использована релятивистская система единиц:  $\hbar = c = 1$ .

## 2. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ

Уровни энергии электрона во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$  определяются эффективным гамильтонианом

$$\Delta H = -g\mu_B (\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}), \quad (2)$$

где  $\mu_B$  — магнетон Бора электрона (мюона),  $\mathbf{j}$  — полный угловой момент электрона и  $g$  — его  $g$ -фактор, зависящий от электронной конфигурации. В данной работе мы рассматриваем основное состояние в водородоподобном ионе с бесспиновым ядром, так что полный момент иона, полный момент электрона и его спин совпадают.

В основном состоянии водородоподобного атома, даже в отсутствие радиационных эффектов, таких как, например, поляризация вакуума,  $g$ -фактор релятивистского связанного электрона

$$g = 2(1 + a + b) \quad (3)$$

отличается от своей свободной величины

$$g_{Dirac}^{(0)} = 2, \quad (4)$$

определяемой уравнением Дирака. Это связано с тем, что эффективный гамильтониан (2) является нерелятивистским по форме, и поэтому все релятивистские эффекты входят в константу  $g$ , зависящую от состояния. Вообще говоря, гамильтониан (2) имеет и недиагональные матричные элементы, однако для задачи о релятивистских поправках к уровням энергии электрона в слабом внешнем магнитном поле достаточно ограничиться диагональными элементами.

Для основного состояния ведущая поправка для эффектов связанности определяется формулой Брейта [2]:

$$g_{Br} = -\frac{8m}{3} \int_0^\infty f_{1s} g_{1s} r^3 dr = \frac{2(3 - 2\epsilon)}{3} \approx 2 \left( 1 - \frac{2}{3}(Z\alpha)^2 + \dots \right). \quad (5)$$

Учет КЭД-эффектов меняет величину  $g$ -фактора как в случае свободного электрона

$$a = a_1 + a_2 + \dots = \frac{\alpha}{2\pi} - 0.328\dots \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 + \dots, \quad (6)$$

( $a_n$  —  $n$ -петлевой вклад в аномальный магнитный момент электрона [24]), так и в случае связанного электрона [3, 4]

$$b = -\left( \frac{2}{3} + \frac{\alpha}{12\pi} + \frac{m}{2M} + \dots \right) (Z\alpha)^2 + \dots \quad (7)$$

( $M$  — масса ядра). Следует заметить, что все поправки порядка  $(Z\alpha)^2$  носят чисто кинематический характер [3, 4] и являются решением двухчастичной задачи, в которой свободный электрон (мюон) обладает ненулевым аномальным магнитным моментом  $a$ , а масса ядра  $M$  конечна. Нетривиальные КЭД-эффекты, отвечающие квантовой электродинамике связанных состояний, появляются только в порядке  $\alpha(Z\alpha)^4$ , и их достаточно учитывать в пределе внешнего поля  $m/M = 0$ . В частности, одна из таких поправок определяется эффектами поляризации вакуума.

Поправка к  $g$ -фактору связанного электрона, индуцированная свободной поляризацией вакуума, отвечает фейнмановским диаграммам, изображенным на рис. 2. Это диаграммы второго порядка теории возмущений, и для их вычисления необходимо проводить расчеты с кулоновской функцией Грина релятивистского электрона. Однако вместо вычисления перекрестного вклада второго порядка для двух

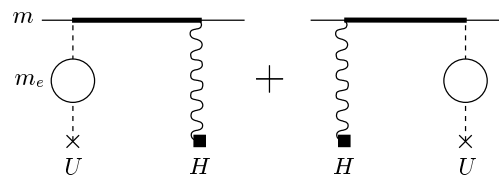


Рис. 2. Вклад поляризации вакуума в  $g$ -фактор связанного электрона. Жирная линия соответствует редуцированной функции Грина частицы в кулоновском поле ядра, внешнему постоянному магнитному полю  $H$  отвечает волнистая линия с квадратом на конце, кулоновское поле (штрихи) возмущено потенциалом Юлинга ( $U$ )

возмущений — внешнего магнитного поля и потенциала Юлинга — можно свести задачу к двум вычислениям первого порядка (ср. с вычислением поправки к сверхтонкому расщеплению в [21]). А именно, вначале решить задачу о возмущении уравнения Дирака внешним постоянным магнитным полем  $\mathbf{H}$  и найти линейную по этому полю поправку к волновым функциям, а затем взять матричный элемент от потенциала Юлинга по возмущенным волновым функциям (ср. (15) в [21]).

**2.1. Волновая функция с учетом внешнего магнитного поля**

Линейная по внешнему магнитному полю поправка к релятивистской кулоновской волновой функции  $s$ -состояния в атоме водорода, которая в отсутствие магнитного поля имеет вид [25]

$$\Psi_{nsm}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{ns}(r) \\ -i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) g_{ns}(r) \end{pmatrix} \Omega_{1/2,0,m}(\mathbf{n}),$$

может быть найдена методом обобщенных вириальных соотношений, который был развит в [26] и использовался нами в [21]. Поправка к волновой функции, индуцированная внешним постоянным магнитным полем  $\mathbf{H}$ , содержит члены с разной угловой зависимостью ( $l = 0$  и  $l = 2$ ). Заметим, что поправка к волновой функции необходима в данной работе лишь для вычисления матричного элемента от центрального потенциала, и поэтому в первом порядке по возмущающему магнитному полю  $\mathbf{H}$  достаточно рассмотреть только  $s$ -компоненту поправки. Эта компонента поправки к волновой функции равна

$$(\delta\Psi_{ns,m})^s = -\frac{e}{3} \begin{pmatrix} X_{ns}(r) \\ -i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) Y_{ns}(r) \end{pmatrix} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}) \Omega_{1/2,0,m}(\mathbf{n}), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} X_{ns} &= -\left[ \frac{2\mathcal{E}_{ns} + 3m}{2m^2} r + \frac{Z\alpha}{m^2} \right] g_{ns} - \frac{3}{2m^2} f_{ns}, \\ Y_{ns} &= \left[ \frac{2\mathcal{E}_{ns} - m}{2m^2} r + \frac{Z\alpha}{m^2} \right] f_{ns} + \frac{1}{2m^2} g_{ns}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ns} &= \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-\epsilon)^2}}} \approx \\ &\approx m \left( 1 - \frac{(Z\alpha)^2}{2n^2} + \left( -\frac{1}{2n^3} + \frac{3}{8n^4} \right) (Z\alpha)^4 \right) \end{aligned} \quad (10)$$

— энергия уровня  $ns$ . В частности, для радиальных компонент основного состояния получаем

$$\begin{aligned} X_{1s} &= -\left[ \frac{5-2\epsilon}{2m} r + \frac{Z\alpha}{m^2} \right] g_{1s} - \frac{3}{2m^2} f_{1s}, \\ Y_{1s} &= \left[ \frac{1-2\epsilon}{2m} r + \frac{Z\alpha}{m^2} \right] f_{1s} + \frac{1}{2m^2} g_{1s}. \end{aligned} \quad (11)$$

**2.2. Матричный элемент для  $g$ -фактора связанного электрона**

Следующий шаг заключается в вычислении матричного элемента от потенциала Юлинга

$$U(r) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2} \left( -\frac{Z\alpha}{r} e^{-\lambda r} \right), \quad (12)$$

где

$$\lambda = \frac{2m_e}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (13)$$

по волновым функциям, возмущенным внешним постоянным магнитным полем. Поправку к  $g$ -фактору для произвольного  $ns$ -состояния можно записать в виде

$$\frac{g_{VP}}{g_{Br}} = \frac{\int_0^\infty (f_{ns} X_{ns} + g_{ns} Y_{ns}) U(r) r^2 dr}{\int_0^\infty f_{ns} g_{ns} r^3 dr}. \quad (14)$$

В частности, при  $n = 1$  можно преобразовать числитель правой части выражения (14) к виду (ср. [19, 21])

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\pi} \frac{2^{1-2\epsilon} (Z\alpha m)^{4-2\epsilon}}{m(1-\epsilon)} \times \\ &\times \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2} \frac{2Z\alpha m + \lambda(3-2\epsilon)}{(\lambda + 2Z\alpha m)^{3-2\epsilon}} = \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \frac{(Z\alpha)^2}{2m} \frac{3-2\epsilon}{\kappa(1-\epsilon)} \int_0^1 dy \frac{\sqrt{1-y^2}}{y^2} \times \\ &\times \left( 1 - \frac{1-y^2}{3} \right) \left( \frac{\kappa y}{1+\kappa y} \right)^{3-2\epsilon} \left( 1 + \frac{\kappa y}{3-2\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

и выразить поправку в терминах базового интеграла, введенного в [18, 19]:

$$\begin{aligned}
 I_{abc} &= \int_0^1 dy \frac{(1-y^2)^{a-1/2}}{y^{b-1}} \left( \frac{\kappa y}{1+\kappa y} \right)^{c-2\epsilon} = \\
 &= \frac{1}{2} \kappa^{c-2\epsilon} B(a+1/2, 1-b/2+c/2-\epsilon) \times \\
 &\times {}_3F_2(c/2-\epsilon, c/2+1/2-\epsilon, 1-b/2+c/2-\epsilon; \\
 &\quad 1/2, a+3/2-b/2+c/2-\epsilon; \kappa^2) - \\
 &- \frac{c-2\epsilon}{2} \kappa^{c+1-2\epsilon} B(a+1/2, 3/2-b/2+c/2-\epsilon) \times \\
 &\times {}_3F_2(c/2+1-\epsilon, c/2+1/2-\epsilon, 3/2-b/2+c/2-\epsilon; \\
 &\quad 3/2, a+2-b/2+c/2-\epsilon; \kappa^2). \quad (16)
 \end{aligned}$$

Окончательный результат для основного уровня имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{g_{VP}}{g_{Br}} &= -\frac{2\alpha(Z\alpha)^2}{\pi(1-\epsilon)\kappa} \times \\
 &\times \left\{ I_{133} - \frac{1}{3} I_{233} + \frac{\kappa}{3-2\epsilon} \left( I_{123} - \frac{1}{3} I_{223} \right) \right\}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

### 3. АСИМПТОТИКИ

Полученный результат содержит два свободных параметра: заряд ядра  $Z$  и отношение массы орбитальной частицы к массе частицы в вакуумной петле. Он применим как для обычных (электронных),

$$\kappa_e = Z\alpha, \quad (18)$$

так и для мюонных,

$$\kappa_\mu = \frac{Z\alpha m_\mu}{m_e} \approx 1.5 Z, \quad (19)$$

атомов. Выражение (17) довольно громоздко, и полезно рассмотреть некоторые его простые асимптотики.

#### 3.1. Поправки к $g$ -фактору при $Z\alpha \ll 1$

Начнем с асимптотики полученного выражения при малых значениях  $Z\alpha$ , отвечающих нерелятивистской кинематике. Раскладывая  $I_{abc}$  по степеням  $\epsilon$  (ср. [19, 21])

$$I_{abc} = I_{abc}^{(0)} - 2\epsilon I_{abc}^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (20)$$

получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{g_{VP}}{g_{Br}} &= -\frac{2\alpha(Z\alpha)^2}{\pi\kappa} \left\{ -\frac{4\pi}{9\kappa^2} - \frac{24-20\kappa^2+5\kappa^4}{27\kappa(\kappa^2-1)} - \right. \\
 &\quad - \frac{8-12\kappa^2+3\kappa^4-2\kappa^6}{9\kappa^2(\kappa^2-1)} \mathcal{A}(\kappa) - \\
 &\quad - 2\epsilon \left[ -\frac{\pi(4-13\kappa^2+9\kappa^4)}{108\kappa^2(\kappa^2-1)} + \frac{12-37\kappa^2+43\kappa^4}{162\kappa(\kappa^2-1)} + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{4-15\kappa^2+15\kappa^4-10\kappa^6}{54\kappa^2(\kappa^2-1)} \mathcal{A}(\kappa) + J(\kappa) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

где введены обозначения (ср. [27, 28])

$$\mathcal{A}(\kappa) = \begin{cases} \frac{\arccos \kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}, & \kappa < 1, \\ \frac{\ln(\kappa + \sqrt{\kappa^2-1})}{\sqrt{\kappa^2-1}}, & \kappa > 1, \end{cases}$$

и (ср. [28])

$$\begin{aligned}
 J(\kappa) &= \frac{\kappa^3}{9} \int_0^1 dy \frac{y \sqrt{1-y^2} (2+y^2)(3+\kappa y)}{(1+\kappa y)^3} \times \\
 &\quad \times \ln \left( \frac{\kappa y}{1+\kappa y} \right).
 \end{aligned}$$

В случае «обычного» (электронного) атома (18) из общего выражения (17) нетрудно получить асимптотическое разложение для малых  $Z\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{g_{VP}}{g_{Br}} &= \frac{\alpha}{\pi} \left[ -\frac{8}{15} (Z\alpha)^4 + \frac{5\pi}{18} (Z\alpha)^5 + (Z\alpha)^6 \times \right. \\
 &\quad \times \left( \frac{8}{15} \ln(2Z\alpha) - \frac{3298}{1575} \right) + \\
 &\quad \left. + (Z\alpha)^7 \left( -\frac{5\pi}{18} \ln \left( \frac{Z\alpha}{2} \right) + \frac{55\pi}{144} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{O}((Z\alpha)^8 \ln(Z\alpha)) \right]. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Первый коэффициент разложения воспроизводит полученный ранее результат [23], старшие члены получены нами впервые. На рис. 1 представлены результаты численных расчетов величины  $g_{VP}(Z)$  для связанного электрона, точное аналитическое выражение и несколько приближенных при  $Z\alpha \ll 1$ . Первая аппроксимация соответствует члену порядка  $(Z\alpha)^4$  [23], вторая и третья содержат следующие члены разложения, соответственно  $(Z\alpha)^5$  и  $(Z\alpha)^6$ .

#### 3.2. $g$ -фактор связанного мюона: $\kappa \gg 1$

В случае мюонных атомов представляет интерес асимптотика полученного выражения при больших

отношениях массы орбитальной частицы к массе электрона. Предельным переходом в точной формуле (17) несложно получить асимптотику для больших  $\kappa$ :

$$\frac{g_{VP}}{g_{Br}} = -\frac{2\alpha(Z\alpha)^2}{\pi(1-\epsilon)} \times \left\{ \frac{2}{3(3-2\epsilon)} \left( \ln(2\kappa) + \psi(1) - \psi(3-2\epsilon) - \frac{5}{6} \right) + \frac{1}{3(1-\epsilon)} + \frac{1-\epsilon}{2\kappa^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \kappa}{\kappa^3}\right) \right\}. \quad (23)$$

Частным случаем формулы (23) является выражение для двойного предела при  $Z\alpha \ll 1$  и  $\kappa \gg 1$ , представляющее практический интерес для не слишком легких мюонных атомов (19):

$$\frac{g_{VP}}{g_{Br}} = -\frac{2\alpha(Z\alpha)^2}{\pi} \left\{ \left( \frac{2}{9} \ln(2\kappa) - \frac{5}{27} + \frac{1}{2\kappa^2} \right) + (Z\alpha)^2 \left( \frac{5}{27} \ln(2\kappa) - \frac{61}{162} + \frac{\pi^2}{27} \right) + (Z\alpha)^4 \left( \frac{53}{324} \ln(2\kappa) + \frac{13\pi^2}{324} - \frac{679}{1944} - \frac{1}{9} \psi''(3) \right) + \mathcal{O}\left((Z\alpha)^6 \ln \kappa\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \kappa}{\kappa^3}\right) \right\}, \quad (24)$$

где  $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$  — логарифмическая производная гамма-функции. Первые два члена данной асимптотики (ведущий вклад и поправку относительного порядка  $(Z\alpha)^2$ ) можно также получить, перейдя к пределу при больших  $\kappa$  в выражении (21).

### 3.3. Логарифмические вклады при $\kappa \gg 1$

Выражения (24) и (23) содержат ряд логарифмических слагаемых, и еще одним способом проверки асимптотик может служить независимое вычисление таких слагаемых. Все логарифмические слагаемые имеют прозрачный физический смысл в пределе  $\ln \kappa \gg 1$  и могут быть легко найдены из ренормгрупповых соображений, что оказывается полезным для проверки полученных асимптотик. В самом деле, для вычисления этих слагаемых достаточно учесть известное выражение для бегущей константы связи

$$Z\alpha(\kappa) \approx Z\alpha \left( 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \kappa \right)$$

в релятивистском  $g$ -факторе (5). В нерелятивистском случае  $Z\alpha \ll 1$  мы получаем для логарифмической части разложения (24)

$$g_{VP}^{(\log)} = -\frac{\alpha}{\pi} (Z\alpha)^2 \times \left( \frac{8}{9} + \frac{4}{9} (Z\alpha)^2 + \frac{4}{3} (Z\alpha)^4 + \dots \right) \ln \kappa, \quad (25)$$

что совпадает с результатом прямого вычисления.

Аналогично для точной по  $Z\alpha$  формулы (23) логарифмическая часть  $g_{VP}$  оказывается равной (ср. [19, 21])

$$g_{VP}^{(\log)} = -\frac{8\alpha(Z\alpha)^2 \ln \kappa}{9\pi(1-\epsilon)} = \frac{\partial g_{Br}}{\partial \ln(Z\alpha)} \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \kappa. \quad (26)$$

Воспроизведение логарифмических членов подтверждает полученные выше асимптотики (23) и (24).

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выше мы получили в общем виде выражение (17), пригодное для обычных (электронных) и мюонных атомов. Полученные нами результаты для  $g$ -фактора связанного электрона находятся в согласии с проведенными ранее аналитическими [23] и численными [6] расчетами. Мы представили компактные асимптотики для  $g$ -фактора связанного электрона (22) и мюона (24) в двухчастичных атомных системах.

В случае мюонного атома полученная нами поправка является ведущей квантовоэлектродинамической поправкой и при не слишком больших значениях заряда ядра (т.е. в случае  $Z\alpha \ll 1$  и  $Z\alpha m/m_e \gg 1$ )  $g$ -фактор мюона описывается выражением

$$g_\mu = 2 \left\{ 1 + \left[ -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{m}{M} - \frac{1+Z}{2} \left( \frac{m}{M} \right)^2 + \frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \frac{m}{M} \right) \right] \times \left( Z\alpha \right)^2 - \frac{1}{12} (Z\alpha)^4 - \frac{2\alpha(Z\alpha)^2}{\pi} \times \left[ \frac{2}{9} \ln \left( \frac{2Z\alpha m}{m_e} \right) - \frac{5}{27} + \frac{m_e^2}{2(Z\alpha m)^2} + \mathcal{O}(m/M) \right] \right\}. \quad (27)$$

Обсудим кратко значение изучения  $g$ -фактора связанного электрона в водородоподобных системах для экспериментальных исследований. Наиболее точно измеренное значение относится к иону углерода ( $^{12}\text{C}^{5+}$ ) [1], а эксперимент с ионом кислорода ( $^{16}\text{O}^{7+}$ ) [10] близится к завершению. Сравнение

Вклады в  $g$ -фактор связанного электрона в водородоподобных ионах углерода ( $^{12}\text{C}^{5+}$ ) и кислорода ( $^{16}\text{O}^{7+}$ )

Вклад	Выражение	Ссылка	$g(^{12}\text{C}^{5+}),$ $10^{-9}$	$g(^{16}\text{O}^{7+}),$ $10^{-9}$
$b_1^{rel}$	$-\frac{1}{3}(Z\alpha)^2 - \frac{1}{12}(Z\alpha)^4 -$ $-\frac{1}{24}(Z\alpha)^6 - \frac{1}{192}(Z\alpha)^8$	[2]	-639322.8	-1136998.5
$b_1^{rec}$	$\left[ \frac{1}{2} \frac{m}{M} - \frac{1+Z}{2} \left( \frac{m}{M} \right)^2 \right] (Z\alpha)^2$	[4]	43.8	58.4
$a_1 b_a$	$\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} (Z\alpha)^2 \left[ \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \frac{m}{M} \right]$	[3]	371.0	659.7
$a_2 b_a$	$-\frac{0.328 \dots}{6} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 (Z\alpha)^2$	[3, 7]	-0.6	-1.0
$b_1^{h.o.}$	$\pm (Z\alpha)^4 \frac{m}{M}$	Оценка [7]	$\pm 0.2$	$\pm 0.4$
$b'_{NS}$	$\frac{4}{3} (Z\alpha)^4 (mR_N)^2$	[23, 7]	0.2	0.8
$b'_{VP}$	$\frac{\alpha}{\pi} \left[ -\frac{8}{15} (Z\alpha)^4 + \frac{5\pi}{18} (Z\alpha)^5 + \right.$ $\left. + (Z\alpha)^6 \left( \frac{8}{15} \ln(2Z\alpha) - \frac{1006}{525} \right) + \right.$ $\left. + (Z\alpha)^7 \left( -\frac{5\pi}{18} \ln \left( \frac{Z\alpha}{2} \right) + \frac{125\pi}{432} \right) \right]$	Данная работа	-4.3	-13.3
$b'_{WK}$	$\left( \frac{38}{45} - \frac{2\pi^2}{27} \right) \frac{\alpha (Z\alpha)^6}{\pi} \pm \dots$	[23]	0.0	0.0
$b'_{SE}$	$\frac{\alpha}{\pi} (Z\alpha)^4 B_{SE}(Z\alpha)$	[29, 8]	55.3(4)	151.5(5)
$b'_{VP2}$	$-\frac{164}{81} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 (Z\alpha)^4$	[23]	-0.0	-0.1
$b'_{SE2}$	$\pm \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 (Z\alpha)^4 B_{SE}(Z\alpha)$	Оценка [7]	$\pm 0.1$	$\pm 0.3$
$b$	Полный вклад	Данная работа	-638857.3(5)	-1136142.5(7)
$a$	Полный вклад	[24]	1159652.2	1159652.2
	$(g(th) - 2)/2$	Данная работа	520794.9(5)	23509.7(7)
	$(g(exp) - 2)/2$		520798(2), [1]	23509 (30), [10]

*Примечание.* В некоторых случаях в цитированных работах погрешность не указана явно. В работах [29, 8] неопределенности, связанные с вычислением поправок к отдаче, однопетлевых и двухпетлевых вкладов, представлены по отдельности, и мы сложили их как независимые погрешности. Величина для вклада  $b'_{WK}$  взята из [23], тогда как погрешность оценивается нами величиной  $\alpha(Z\alpha)^7$  вклада  $b'_{VP}$ , полученного в данной работе. В наших вычислениях мы использовали величину  $\alpha^{-1} = 137.03599976(50)$  [30] и величины ядерных зарядовых радиусов [31].

теории и эксперимента представлено в таблице, где собраны все теоретические выражения для вкладов в  $g$ -фактор. Аномальный магнитный момент свободного электрона  $a$ , входящий в выражение (3), хорошо известен (см., например, обзор [24]). Поправку на эффекты связанности  $b$  можно представить в виде суммы нескольких членов,

$$b = b_1(Z\alpha, m/M) + ab_a(Z\alpha, m/M) + b'(\alpha, Z\alpha, m/M, mR_N), \quad (28)$$

имеющих простой физический смысл: первые два слагаемых отвечают обычным кинематическим поправкам к дираковскому магнитному моменту ( $b_1$ ) [2, 3] и к аномальному магнитному моменту ( $b_a$ ) [4]. Первоначальные вычисления поправок [4] были направлены в первую очередь на водород, дейтерий и ион гелия-3, которые были тогда измерены с высокой точностью [11–14], и поэтому, ввиду малости вклада слагаемого  $ab_a$ , в окончательных выражениях в качестве величины  $a$  подставлялся первый член разложения  $\alpha/2\pi$ , и могло сложиться впечатление, что вклад порядка  $\alpha^2(Z\alpha)^2$  неизвестен, что приводило к существенному завышению теоретической погрешности (см., например, [29]). Однако нетрудно убедиться [7], что все вклады порядка  $(Z\alpha)^2$  имеют чисто кинематическую природу и поправка  $\alpha^2(Z\alpha)^2$  на самом деле содержится в работах [4].

Последнее слагаемое в выражении (28) включает все нетривиальные поправки

$$b' = b'_{NS} + b'_{VP} + b'_{WK} + b'_{SE} + b'_{loop}, \quad (29)$$

такие как поправки на конечные размеры ядра ( $b'_{NS}$ ), однопетлевую свободную поляризацию вакуума ( $b'_{VP}$ ), вклад диаграмм с блоком рассеяния света на свете ( $b'_{WK}$ ) и вклад однопетлевой собственной энергии электрона ( $b'_{SE}$ ), а также вклады различных двухпетлевых диаграмм ( $b'_{loop} = b'_{VP2} + b'_{SE2}$ ). Явные аналитические выражения и численные значения вкладов в  $g$ -факторы водородоподобных ионов углерода и кислорода приведены нами для всех поправок в таблице.

Авторы признательны Г. Верту (G. Werth), В. Квинту (W. Quint) и Т. Байеру (Th. Veier) за полезные обсуждения и сообщение нам о своих результатах до их публикации. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-02-16718), программы «Фундаментальная метрология» и программы «Университеты России. Фундаментальные исследования» (проект № 3930).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Некоторые опечатки работы [19]

Базовые интегралы, необходимые для вычисления матричных элементов от потенциала Юлинга, были рассмотрены нами в работе [19], в которой было допущено несколько опечаток. В частности, рекуррентная формула (43) должна иметь вид

$$R(n, n\epsilon_n, \kappa_n) = \frac{\kappa_n^{2n(1-\epsilon_n)}}{(2n-1-2n\epsilon_n)(2n-2-2n\epsilon_n)} \times \frac{\partial^2}{\partial \kappa_n^2} \frac{R(n-1, n\epsilon_n, \kappa_n)}{\kappa_n^{2(n-1)(1-n\epsilon_n)}}, \quad (П.1)$$

а общее выражение для лэмбовского сдвига произвольного циркулярного состояния в терминах результата для основного состояния (44) имеет вид

$$R(n, n\epsilon_n, \kappa_n) = \kappa_n^{2n(1-\epsilon_n)} \frac{\Gamma(2-2n\epsilon_n)}{\Gamma(2n-2n\epsilon_n)} \times \frac{\partial^{(2n-2)}}{\partial \kappa_n^{(2n-2)}} \frac{R(1, n\epsilon_n, \kappa_n)}{\kappa_n^{2(1-n\epsilon_n)}}. \quad (П.2)$$

В работе [19] величина  $\epsilon_n$  оказалась пропущена в показателях степени  $\kappa_n$  обоих выражений. Эти равенства не использовались в дальнейшем, и поэтому опечатки не повлияли на последующие вычисления. Однако в выражениях для асимптотик разных вкладов в  $R$  ([19], формулы (36)–(38)) была допущена неточность в членах порядка  $1/\kappa^2$ , что привело к неправильному выражению для этого члена также в случае  $R(n)$  (формула (46)). В частности, была неправильно приведена асимптотика для неполной бета-функции (знаменатель в последнем члене выражения для  $B_{1-\delta}(c-2\epsilon, 0)$  должен быть равен  $4\kappa^2$ ). Исправленное выражение (46) имеет в общем случае вид

$$R(n, n\epsilon_n, \kappa_n) = \left[ \frac{2}{3} \ln(2\kappa_n) + \frac{2}{3} \left( \psi(1) - \psi(2n(1-\epsilon_n)) \right) - \frac{5}{9} \right] + \frac{\pi}{2} \frac{n(1-\epsilon_n)}{\kappa_n} + \left[ -\frac{n(1-\epsilon_n)}{2} - n^2(1-\epsilon_n)^2 \right] \frac{1}{\kappa_n^2} + \mathcal{O}(1/\kappa_n^3). \quad (П.3)$$

Исправленное выражение (38) получается из (П.3) при  $n = 1$ . Мы благодарны Сото (Joan Soto) за привлечение нашего внимания к этой опечатке.



## ЛИТЕРАТУРА

1. H. Häffner et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 5308 (2000).
2. G. Breit, Nature **122**, 649 (1928).
3. H. Grotch, Phys. Rev. Lett. **24**, 39 (1970).
4. R. N. Faustov, Nuovo Cim. A **69**, 37 (1970); Phys. Lett. B **33**, 422 (1970); H. Grotch, Phys. Rev. A **2**, 1605 (1970); H. Grotch and R. A. Hegstrom, Phys. Rev. A **4**, 59 (1971); M. I. Eides and H. Grotch, Ann. Phys. **260**, 191 (1997).
5. S. A. Blundell, K. T. Cheng, and J. Sapirstein, Phys. Rev. A **55**, 1875 (1997).
6. H. Persson, S. Salomonson, P. Sunergren and I. Lindgren, Phys. Rev. A **56**, R2499 (1977).
7. S. G. Karshenboim, in *Hydrogen Atom: Precision Physics of Simple Atomic System*, ed. by S. G. Karshenboim et al., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2001), p. 651; E-print archives hep-ph/0008227.
8. Th. Beier et al., in *Hydrogen Atom: Precision Physics of Simple Atomic System*, ed. S. G. Karshenboim et al., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2001), p. 605.
9. G. Werth et al., in *Hydrogen Atom: Precision Physics of Simple Atomic System*, ed. S. G. Karshenboim et al., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2001), p. 204.
10. J. Verdu et al., submitted to ECAMP, Berlin (2001), <http://www.ecamp7.de/ECAMP7subads.htm>.
11. W. M. Hughes and H. G. Robinson, Phys. Rev. Lett. **23**, 1209 (1969).
12. D. J. Larson, P. A. Valberg, and N. F. Ramsey, Phys. Rev. Lett. **23**, 1369 (1969); F. G. Walther, W. D. Phillips, and D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **28**, 1159 (1972).
13. D. J. Larson and N. F. Ramsey, Phys. Rev. A **9**, 1543 (1974).
14. C. E. Johnson and H. G. Robinson, Phys. Rev. Lett. **45**, 250 (1980).
15. J. S. Tideman and H. G. Robinson, Phys. Rev. Lett. **39**, 602 (1977).
16. G. M. Keiser, H. G. Robinson, and C. E. Johnson, Phys. Rev. Lett. **35**, 1223 (1975); Phys. Rev. A **16**, 822 (1977).
17. S. G. Karshenboim, in *Atomic Physics 17, XVII Int. Conf. ICAP* (2000), ed. by E. Arimondo et al., AIP (2001), p. 238.
18. S. G. Karshenboim, Can. J. Phys. **76**, 169 (1998).
19. С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **116**, 1575 (1999).
20. S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, and V. M. Shabaev, Can. J. Phys. **76**, 503 (1998).
21. С. Г. Каршенбойм, В. Г. Иванов, В. М. Шабаев, ЖЭТФ **117**, 67 (2000).
22. S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, and V. M. Shabaev, submitted to Can. J. Phys. (2001).
23. S. G. Karshenboim, Phys. Lett. A **266**, 380 (2000).
24. T. Kinoshita, in *Hydrogen Atom: Precision Physics of Simple Atomic System*, ed. by S. G. Karshenboim et al., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2001), p. 157.
25. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
26. V. M. Shabaev, J. Phys. B **24**, 4479 (1991).
27. Г. Е. Пустовалов, ЖЭТФ **32**, 1519 (1957); Д. Д. Иваненко, Г. Е. Пустовалов, УФН **61**, 27 (1957).
28. S. G. Karshenboim, U. Jentschura, V. G. Ivanov, and G. Soff, Euro. J. Phys. D **2**, 209 (1998).
29. T. Beier et al., Hyp. Int. **127**, 339 (2000).
30. P. J. Mohr and B. N. Taylor, Rev. Mod. Phys. **72**, 351 (2000).
31. G. Fricke et al., At. Data Nucl. Data Tables **60**, 177 (1995).