

НОРМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ ФОНОН-ФОНОННОГО РАССЕЯНИЯ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ КРИСТАЛЛОВ ГЕРМАНИЯ С ИЗОТОПИЧЕСКИМ БЕСПОРЯДКОМ

И. Г. Кулеев, И. И. Кулеев*

*Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук
620219, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 4 апреля 2001 г.

Рассмотрено влияние нормальных процессов фонон-фононного рассеяния на теплопроводность кристаллов германия с различной степенью изотопического беспорядка. Учтено перераспределение импульса фононов в нормальных процессах рассеяния как внутри каждой колебательной ветви (механизм Саймонса), так и между различными колебательными ветвями фононов (механизм Херринга). Проанализированы вклады дрейфового движения продольных и поперечных фононов в теплопроводность. Показано, что перераспределение импульса между продольными и поперечными фононами в механизме релаксации Херринга приводит к существенному подавлению дрейфового движения продольных фононов в изотопически чистых кристаллах германия и, соответственно, их вклада в теплопроводность. Результаты расчетов теплопроводности для механизма релаксации Херринга хорошо согласуются с экспериментальными данными для кристаллов германия с различной степенью изотопического беспорядка.

PACS: 77.84.-s

1. ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие современных полупроводниковых технологий и микроэлектроники требует поиска материалов с новыми физическими свойствами. В связи с этим особую актуальность приобрели исследования в области изотопической инженерии [1] и изучение физических свойств изотопически обогащенных кристаллов германия, кремния и алмаза [2–9], которые широко используются в современной микроэлектронике. Экспериментальные исследования теплопроводности и термоэдс [2–4], проведенные на кристаллах германия с различной степенью изотопического беспорядка, показали, что максимальные значения теплопроводности в изотопически чистых образцах, содержащих 99.99% изотопа ^{70}Ge , на порядок выше, а абсолютные значения термоэдс более чем в два раза превышали значения, полученные для кристаллов с природным изотопическим составом.

В работах [2, 10] проведен детальный анализ полученных экспериментальных данных в рамках

обобщенной модели Каллавея [11]. Авторы работы [2] выделили вклады поперечных и продольных фононов в теплопроводность и определили параметры, характеризующие различные механизмы рассеяния фононов в кристаллах германия с изотопическим беспорядком. Обобщенная модель Каллавея использовалась также при расчете теплопроводности изотопически обогащенных кристаллов кремния и алмаза [5, 6, 8–10]. Эта модель, как мы покажем ниже, соответствует предположению, что релаксация импульса фононов происходит только внутри каждой из ветвей фононного спектра. Авторы работы [2] столкнулись с той же трудностью, что и Каллавей [11], при обработке экспериментальных данных [12] без разделения вкладов продольных и поперечных фононов. Проблема заключалась в том, что рассчитанные значения теплопроводности германия в области максимума как в модели Каллавея [11], так и в ее обобщенном варианте [2] значительно превышали экспериментально измеренные. По этой причине Холланд [13] отказался от модели Каллавея [11]. Он показал, что при расчете теплопроводности кристаллов германия и крем-

*E-mail: kuleev@imp.uran.ru

ния необходимо выделять вклады продольных и поперечных фононов, поскольку поперечные фононы имеют сильную дисперсию и дебаевские температуры для обеих колебательных ветвей существенно различаются. Однако он включил частоты релаксации нормальных процессов (N -процессов) фонон-фононного рассеяния в резистивные частоты релаксации. Ему удалось вполне удовлетворительно описать температурные зависимости теплопроводности германия и кремния с натуральным изотопическим составом в широком температурном интервале, при этом число подгоночных параметров теории увеличилось в два раза. Тем не менее теория Холланда [13] в определенном смысле является шагом назад по сравнению с теорией Каллавея [11], поскольку она не учитывает особой роли нормальных процессов фонон-фононного рассеяния. Хорошо известно [11, 14, 15], что в N -процессах импульс фононов, участвующих в столкновениях, сохраняется и эти процессы рассеяния не дают непосредственного вклада в релаксацию импульса и, соответственно, в теплосоппротивление. Однако N -процессы формируют неравновесную функцию фононов и обеспечивают релаксацию фононной системы к локально-равновесному распределению со средней скоростью дрейфа. Перераспределяя энергию и импульс между различными фононными модами, они препятствуют сильному отклонению от равновесного распределения каждой фононной моды. При этом изменяется относительная роль различных резистивных процессов релаксации импульса фононов (рассеяния на дефектах и границах образца, процессов фонон-фононного переброса). Таким образом, этот механизм играет существенную роль в релаксации полного импульса фононной системы и оказывает значительное влияние на величины теплопроводности в изотопически чистых образцах германия при низких температурах, когда процессы фонон-фононного переброса в значительной степени выморожены.

Однако в этом случае необходим более аккуратный анализ роли N -процессов рассеяния фононов, принадлежащих различным колебательным ветвям, чем это сделано в работах [2–10]. Отметим, что двухпараметрическое приближение Холланда [13] является справедливым в случае, когда для каждой из ветвей фононного спектра λ частоты релаксации фононов в N -процессах ($\nu_{phN}^\lambda(q)$) гораздо меньше резистивных частот релаксации фононов ($\nu_{phR}^\lambda(q)$), обусловленных рассеянием фононов на фононах в процессах переброса, на дефектах и границах образца. В противоположном предельном случае, который,

согласно данным работы [2], реализуется для продольных фононов в исследованных образцах германия, необходимо учитывать дрейф фононной системы, связанный с N -процессами фонон-фононного рассеяния. При их учете неравновесность фононной подсистемы описывается шестью параметрами: четырьмя частотами релаксации, $\nu_{phR}^\lambda(q)$ и $\nu_{phN}^\lambda(q)$, и средней скоростью дрейфа u_λ . Описание неравновесности фононной системы в расширенном базисе позволяет более корректно рассмотреть процессы релаксации импульса фононов и теплопроводность в изотопически чистых образцах германия.

Целью данной работы является изучение влияния дрейфового движения фононов, обусловленного N -процессами рассеяния фононов, на теплопроводность кристаллов германия с изотопическим беспорядком. Основное внимание будет уделено анализу различных моделей и приближений, которые могут быть использованы при рассмотрении релаксации и перераспределения импульса продольных и поперечных фононов за счет N -процессов как внутри каждой колебательной ветви (механизм Саймонса [16]), так и между различными колебательными ветвями фононов (механизм Херринга [17]). Влияние нормальных процессов рассеяния фононов на взаимное увлечение электронов и фононов в металлах и в вырожденных полупроводниках рассмотрено в работах [18, 19]. В настоящей работе, в отличие от [18, 19], более детально будет проанализирован механизм релаксации Херринга, приводящий к перераспределению импульса фононов между различными колебательными ветвями. Этот механизм играет основную роль в N -процессах релаксации в кристаллах германия, и его значение существенно возрастает при уменьшении изотопического беспорядка.

Мы покажем, что проблема, поставленная Холландом [13], и те проблемы, которые возникли при обработке экспериментальных данных [2, 12], снимаются, если корректно учесть N -процессы релаксации Херринга. В этом случае перераспределение импульса между продольными и поперечными фононами в нормальных процессах приводит к значительному подавлению дрейфового движения продольных фононов в изотопически чистых образцах Ge (99.99 %) главным образом за счет процессов рассеяния поперечных фононов. Этот механизм перекачки импульса обеспечивает существенное уменьшение вклада продольных фононов в теплопроводность. В результате максимальные значения полной теплопроводности изотопически чистых образцов Ge (99.99 %) уменьшаются примерно в 1.5 раза по сравнению с величинами, полученными в [2] в

рамках обобщенной модели Каллавея. Таким образом, отпадает необходимость введения дополнительного механизма рассеяния фононов на дислокациях [2] и еще одного подгоночного параметра теории.

2. ВЛИЯНИЕ N -ПРОЦЕССОВ ФОНОН-ФОНОННОГО РАССЕЯНИЯ НА РЕЛАКСАЦИЮ ИМПУЛЬСА В НЕРАВНОВЕСНОЙ ФОНОННОЙ СИСТЕМЕ

Кинетическое уравнение для неравновесной фононной функции распределения фононов $N^\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ с учетом N -процессов рассеяния имеет вид [18]

$$\mathbf{v}_q^\lambda \nabla_{\mathbf{r}} N_{\mathbf{q}}^\lambda = - (N_{\mathbf{q}}^\lambda - N_{q\lambda}^0) \nu_{ph}^{(1)\lambda} - (N_{\mathbf{q}}^\lambda - N(\mathbf{q}, \mathbf{u}_\lambda)) \nu_{phN}^\lambda + I_{phe} (N_{\mathbf{q}}^\lambda, f_0(\varepsilon_k)). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}_q^\lambda = s_\lambda \mathbf{q}/q$ — групповая скорость акустических фононов с поляризацией λ , \mathbf{u}_λ — скорость дрейфа фононов, $f_0(\varepsilon_k)$ — функция распределения Ферми, $\nu_{phN}^\lambda(q)$ — частота релаксации фононов в N -процессах рассеяния, частота $\nu_{ph}^{(1)\lambda}(q) = \nu_{phU}^\lambda(q) + \nu_{phi}^\lambda(q) + \nu_{phB}^\lambda(q)$ включает все неэлектронные резистивные частоты релаксации фононов, обусловленные рассеянием фононов на фононах в процессах переброса, дефектах и границах образца. I_{phe} — интеграл столкновений фононов с электронами [19]. В уравнении (1) учтено, что N -процессы рассеяния фононов приводят фононную подсистему к локально-равновесному распределению Планка со средней дрейфовой скоростью \mathbf{u}_λ , которая может быть разной для фононов с различной поляризацией λ [14, 15]:

$$N(\mathbf{q}, \mathbf{u}_\lambda) = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_{q\lambda} - \hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_\lambda}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} \approx N_{q\lambda}^0 + \frac{\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_\lambda}{k_B T} N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1), \quad (2)$$

где $N_{q\lambda}^0$ — функция Планка.

Схема, иллюстрирующая перераспределение и релаксацию импульса, полученного фононной системой от градиента температуры, приведена на рис. 1. Механизмы электрон-фононной релаксации, характеризуемые частотами ν_{eph} и ν_{phe} , приводят к перераспределению импульса внутри электрон-фононной системы, причем электроны взаимодействуют только с длинноволновыми фононами. Перенормировку фононной теплопроводности за счет взаимного увлечения электронов и фононов мы здесь не рассматриваем. Величина

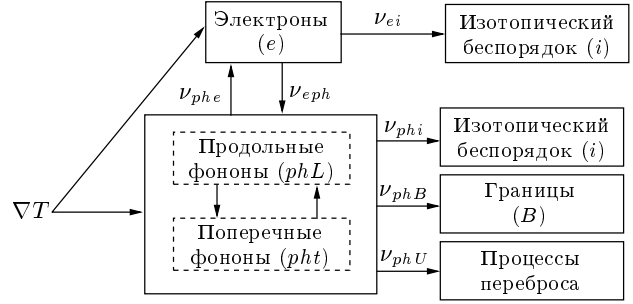


Рис. 1. Схема, иллюстрирующая релаксацию импульса электрон-фононной системы при учете нормальных процессов рассеяния фононов для механизма Херринга

этого эффекта мала, поскольку теплопроводность находится из условия равенства нулю полного тока через образец, а в этом случае средняя скорость упорядоченного движения электронов в любом физически малом объеме образца равна нулю. Поэтому передача импульса упорядоченного движения электронов в фононную подсистему мала, и влиянием неравновесности фононов на фононы через подсистему электронов проводимости можно пренебречь [18, 19]. Рассеяние фононов на изотопическом беспорядке, ν_{phi} , на границах, ν_{phB} , и фонон-фононное рассеяние в процессах переброса, ν_{phU} , приводят к релаксации импульса фононной системы. N -процессы перераспределяют импульс между различными фононными модами и приводят к дрейфу фононов со средней скоростью \mathbf{u}_λ . Дрейфовая скорость фононов определяется всеми термически возбужденными фононами, и основной вклад в нее, как и в теплопроводность, вносят тепловые фононы.

Представим функцию распределения фононов в стандартном виде [14, 15, 18]:

$$N_{\mathbf{q}}^\lambda = N_{q\lambda}^0 + g_\lambda(\mathbf{q}), \quad (3)$$

где $g_\lambda(\mathbf{q})$ — неравновесная добавка к функции распределения. Подставим выражения (2) и (3) в (1) и, аналогично [18], получим выражение для фононной функции распределения $g_\lambda(\mathbf{q})$:

$$g_\lambda(\mathbf{q}) = - \frac{N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1)}{\nu_{ph}^\lambda(q)} \frac{\hbar\omega_{q\lambda}}{k_B T^2} (\mathbf{v}_q^\lambda \nabla T) + \frac{\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_\lambda}{k_B T} N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1) \frac{\nu_{phN}^\lambda(q)}{\nu_{ph}^\lambda(q)}. \quad (4)$$

Здесь $\nu_{ph}^\lambda(q) = \nu_{phN}^\lambda(q) + \nu_{phR}^\lambda(q)$ — полная частота

релаксации фононов с волновым вектором \mathbf{q} и поляризацией λ ,

$$\nu_{phR}^\lambda(q) = \nu_{phi}^\lambda(q) + \nu_{phL}^\lambda(q) + \nu_{phe}^\lambda(q) + \nu_{phU}^\lambda(q)$$

— резистивная частота релаксации фононов. Первый член в выражении (4) определяется диффузионным движением фононов под действием градиента температуры. Второй член учитывает дрейфовое движение фононов и связан с нормальными процессами фонон-фононного рассеяния. Таким образом, в данной работе релаксация системы фононов описывается не двумя параметрами $\nu_{ph}^\lambda(q)$ — полными частотами релаксации фононов [13], а шестью: четырьмя частотами релаксации, $\nu_{phN}^\lambda(q)$ и $\nu_{phR}^\lambda(q)$, и средней скоростью дрейфа фононов \mathbf{u}_λ , которая может быть различной для фононов различных поляризаций. Для нахождения \mathbf{u}_λ система кинетических уравнений (1) должна быть дополнена уравнением баланса импульса фононов, которое получается умножением уравнения (1) на вектор импульса фононов $\hbar\mathbf{q}$ и суммированием по всем векторам \mathbf{q} . При этом учтем, что в нормальных процессах фонон-фононного рассеяния полный импульс фононной подсистемы не меняется:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, \lambda} \hbar\mathbf{q}\nu_{phN}^\lambda(q) (N_{\mathbf{q}}^\lambda - N(\mathbf{q}, \mathbf{u}_\lambda)) &= \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}, \lambda} \hbar\mathbf{q}\nu_{phN}^\lambda(q) \times \\ &\times \left[g_\lambda(\mathbf{q}) - \frac{\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_\lambda}{k_B T} N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Известны два механизма нормальных трехфононных процессов рассеяния: механизмы Херринга [17] и Саймонса [16]. Частота релаксации поперечных фононов в механизме Херринга определяется трехфононными процессами рассеяния ($t + L \leftrightarrow L$), в которых участвуют один поперечный и два продольных фонона:

$$\nu_{phN}^t \approx B_t T^4 \omega_t. \quad (6a)$$

Частота релаксации продольных фононов в модели анизотропного континуума [15, 17] определяется трехфононными процессами распада продольного фонона на два поперечных, принадлежащих различным ветвям, либо слиянием двух поперечных с возникновением продольного фонона ($L \leftrightarrow t_1 + t_2$):

$$\nu_{phN}^L \approx B_L T^3 \omega_L^2. \quad (6b)$$

Итак, в механизме N -процессов Херринга участвуют фононы различных поляризаций. Этот механизм ре-

лаксации обеспечивает перераспределение дрейфового импульса между продольными и поперечными фононами. Таким образом, трехфононные процессы Херринга в неравновесной фононной системе стремятся установить локально-равновесное распределение со средней дрейфовой скоростью, одинаковой для фононов обеих поляризаций, $u_L = u_t = u_H$.

В механизме релаксации Саймонса [16] участвуют фононы одной поляризации. Для этого механизма рассеяния ($\nu_{phN}^\lambda \approx B_\lambda T^4 \omega_\lambda$) закон сохранения импульса в N -процессах выполняется для каждой из ветвей фононного спектра, и скорости дрейфа продольных и поперечных фононов будут различными. Резистивные частоты релаксации также различны для продольных и поперечных фононов. Поэтому ниже мы рассмотрим два варианта релаксации импульса фононов в N -процессах: 1) когда N -процессы перераспределяют импульс только внутри каждой колебательной ветви; 2) когда доминирует перераспределение импульса между различными колебательными ветвями. Покажем, что непосредственное обобщение формулы Каллавея для решеточной теплопроводности [11, 14, 15] на случай разделения вкладов фононов различных поляризаций [2–10] соответствует механизму релаксации Саймонса и не является корректным, когда в N -процессах доминирует механизм Херринга.

Из выражений (4) и уравнения баланса импульса фононов (5) выразим скорость дрейфа фононов \mathbf{u}_λ для механизмов релаксации Херринга [17] \mathbf{u}_H и Саймонса [16] \mathbf{u}_S следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_H &= \frac{s_L^2 (\Psi_N^L + 2S_*^3 \Psi_N^t)}{k_B T (\Psi_{NR}^L + 2S_*^5 \Psi_{NR}^t)} (-k_B \nabla T), \\ \mathbf{u}_S &= \frac{s_\lambda^2 \Psi_N^\lambda}{k_B T \Psi_{NR}^\lambda} (-k_B \nabla T), \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_* &= \frac{s_L}{s_t}, \quad z_q^\lambda = \frac{\hbar\omega_{q\lambda}}{k_B T} = \frac{q}{q_{T\lambda}}, \\ q_{T\lambda} &= \frac{k_B T}{\hbar s_\lambda}, \quad z_{2k}^\lambda = \frac{2k}{q_{T\lambda}} \end{aligned} \quad (8)$$

(для германия, согласно [2], $s_L = 5.21 \cdot 10^5$ см/с, $s_t = 3.16 \cdot 10^5$ см/с, $S_* = 1.65$), а остальные функции определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Psi_N^\lambda &= \left\langle \frac{\nu_{phN}^\lambda(q)}{\nu_{ph}^\lambda(q)} \right\rangle_{z_{d\lambda}} \equiv \\ &\equiv \int_0^{z_{d\lambda}} dz_q^\lambda (z_q^\lambda)^4 \frac{\nu_{phN}^\lambda(q)}{\nu_{ph}^\lambda(q)} N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1), \quad (9) \\ \Psi_{NR}^\lambda &= \left\langle \frac{\nu_{phR}^\lambda(q) \nu_{phN}^\lambda(q)}{\nu_{ph}^\lambda(q)} \right\rangle_{z_{d\lambda}}, \end{aligned}$$

где $z_{d\lambda} = \hbar\omega_{d\lambda}/k_B T$ ($\omega_{d\lambda}$ — дебаевская частота фононов с поляризацией λ). Подставляя (7) в выражение (4) для фононной функции распределения $g_\lambda(\mathbf{q})$, получаем

$$\begin{aligned} g_\lambda(\mathbf{q}) &= -\frac{N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1)}{\tilde{\nu}_{ph}^\lambda(q)} \frac{\hbar\omega_{q\lambda}}{k_B T^2} (\mathbf{v}_q^\lambda \cdot \nabla T), \quad (10) \\ \tilde{\nu}_{ph}^\lambda(q) &= \frac{\nu_{ph}^\lambda(q)}{1 + \nu_{phN}^\lambda(q) \beta_{(S,H)}}, \end{aligned}$$

где

$$\beta_S = \frac{\Psi_N^\lambda}{\Psi_{NR}^\lambda}, \quad \beta_H = \frac{\Psi_N^L + 2S_*^3 \Psi_N^t}{\Psi_{NR}^L + 2S_*^5 \Psi_{NR}^t} \left(\frac{s_L}{s_\lambda} \right)^2 \quad (11)$$

соответственно для механизмов Саймонса и Херринга, $\tilde{\nu}_{ph}^\lambda(q)$ — эффективная частота релаксации импульса фононов, перенормированная нормальными процессами фонон-фононного рассеяния. Известно [11, 14, 15], что решеточная теплопроводность при учете N -процессов определяется эффективной частотой релаксации импульса фононов. Мы показали, что эта перенормировка может быть различной для внутриветвевых и межветвевых вариантов перераспределения импульса фононов в N -процессах. Решение (10) переходит в результат Каллавея [11] только для механизма Саймонса [16]. Очевидно, что при выполнении неравенства $\nu_{phN}^\lambda(q) \ll \nu_{phR}^\lambda(q)$ имеем $\tilde{\nu}_{ph}^\lambda(q) \approx \nu_{phR}^\lambda(q)$ и вкладом дрейфа фононов в функцию распределения $g_\lambda(\mathbf{q})$ можно пренебречь. В этом предельном случае приближение Холланда [13] является оправданным. В противоположном предельном случае, $\nu_{phN}^\lambda(q) \gg \nu_{phR}^\lambda(q)$, необходимо учитывать влияние дрейфа фононов на обмен импульса в неравновесной фононной системе. Таким образом, в условиях, когда N -процессы играют существенную роль в перераспределении импульса фононов, необходимо описание фононной подсистемы в расширенном базисе.

3. РЕШЕТОЧНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Выражение для решеточной теплопроводности с разделением вкладов от различных ветвей фононного спектра имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa(T) &= \sum_\lambda \frac{k_B s_\lambda^2 q T^3}{6\pi^2} \times \\ &\times \int_0^{z_{d\lambda}} dz_q^\lambda \frac{(z_q^\lambda)^4}{\tilde{\nu}_{ph}^\lambda(q)} N_{q\lambda}^0 (N_{q\lambda}^0 + 1). \quad (12) \end{aligned}$$

Учет N -процессов, как и в теории Каллавея [11, 14, 15], сводится к перенормировке частоты релаксации импульса фононов, входящей в решеточную теплопроводность. Однако эта перенормировка носит различный характер, если N -процессы перераспределяют импульс фононов внутри каждой колебательной ветви (механизм Саймонса [16]) либо перераспределение импульса идет преимущественно между различными колебательными ветвями (механизм Херринга [17]).

Для механизма релаксации Херринга ($\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_L = \mathbf{u}_{ph}$) имеем

$$\begin{aligned} \kappa_L(T) &= \frac{k_B}{6\pi^2 s_L} \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^3 \int_0^{z_{dL}} dz \frac{z^4 e^z}{(e^z - 1)^2 \nu_{ph}^L(q)} \times \\ &\times \left(1 + \nu_{phN}^L \frac{\Psi_N^L + 2S_*^3 \Psi_N^t}{\Psi_{NR}^L + 2S_*^5 \Psi_{NR}^t} \right), \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_t(T) &= \frac{k_B}{3\pi^2 s_t} \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^3 \int_0^{z_{dt}} dz \frac{z^4 e^z}{(e^z - 1)^2 \nu_{ph}^t(q)} \times \\ &\times \left(1 + S_*^2 \nu_{phN}^t \frac{\Psi_N^L + 2S_*^3 \Psi_N^t}{\Psi_{NR}^L + 2S_*^5 \Psi_{NR}^t} \right). \quad (14) \end{aligned}$$

Из (13), (14) видно, что вклад поперечных фононов в дрейфовые слагаемые значительно усиливается за счет множителя S_* , величина которого составляет 1.65 для германия. Если в N -процессах импульс продольных и поперечных фононов релаксирует только в пределах каждой колебательной ветви (механизм Саймонса), то

$$\begin{aligned} \kappa(T) &= \sum_\lambda \frac{k_B}{6\pi^2 s_\lambda} \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^3 \int_0^{z_{d\lambda}} dz \frac{z^4 e^z}{(e^z - 1)^2 \nu_{ph}^\lambda(q)} \times \\ &\times \left(1 + \nu_{phN}^\lambda(q) \frac{\Psi_N^\lambda}{\Psi_{NR}^\lambda} \right). \quad (15) \end{aligned}$$

Выражение (15) соответствует обобщенной модели Каллавея [11], которая широко использовалась

при расчете теплопроводности изотопически обогащенных кристаллов германия, кремния и алмаза [2, 5, 6, 8–10].

В займановском пределе [20], $\nu_{phN}^\lambda(q) \gg \nu_{phR}^\lambda(q)$, $\nu_{ph}^\lambda(q) \approx \nu_{phN}^\lambda(q)$, полная теплопроводность может быть выражена через эффективную частоту релаксации фононов ν^* :

$$\kappa_{H,S}(T) = \frac{1}{3} \frac{C_V s_L^2}{\nu_{H,S}^*}, \quad (16)$$

где C_V — изохорическая теплоемкость,

$$C_V = \frac{k_B}{2\pi^2} q_{TL}^3 \left(J_L^{(4)} + 2S_*^3 J_t^{(4)} \right), \quad (17)$$

$$J_\lambda^{(4)} = \int_0^{z_{d\lambda}} \frac{dz z^4 e^z}{(e^z - 1)^2}.$$

Для механизмов Херринга и Саймонса эффективные частоты релаксации фононов имеют различный вид:

$$\nu_H^* = \frac{\langle \nu_{phR}^L \rangle + 2S_*^5 \langle \nu_{phR}^t \rangle}{J_L^{(4)} + 2S_*^3 J_t^{(4)}}, \quad (18)$$

$$\nu_S^* = C_V \left[\sum_\lambda \left(\frac{s_\lambda}{s_L} \right)^2 \frac{C_{V\lambda} J_\lambda^{(4)}}{\langle \nu_{phR}^\lambda \rangle} \right]^{-1}.$$

Выражение (15) для решеточной теплопроводности в виде аддитивной суммы вкладов от фононов различных поляризаций может быть получено непосредственным обобщением формулы Каллавея [11]. Оно справедливо, когда N -процессы перераспределяют импульс фононов только внутри каждой колебательной ветви (механизм Саймонса). Однако доминирующим механизмом N -процессов в кристаллах германия с изотопическим беспорядком является механизм Херринга, который приводит к перераспределению импульса между различными колебательными ветвями. Поэтому для расчета решеточной теплопроводности кристаллов германия с различной степенью изотопического беспорядка будем пользоваться формулами (13), (14) и уточним результаты анализа, проведенного в работах [2, 10] в рамках обобщенной модели Каллавея.

Для значений подгоночных параметров, полученных в [2], частота релаксации поперечных фононов в N -процессах на три порядка меньше, чем продольных:

$$\nu_{phN}^t [c^{-1}] \approx 2.6 \cdot 10^3 \left(\frac{T}{10} \right)^5 z_t, \quad (19)$$

$$\nu_{phN}^L [c^{-1}] \approx 3.4 \cdot 10^6 \left(\frac{T}{10} \right)^5 z_L^2.$$

При рассеянии на изотопическом беспорядке частота релаксации поперечных фононов почти в пять раз больше ($S_*^3 \approx 4.5$), чем продольных:

$$\nu_{phi}^t [c^{-1}] \approx 1.67 \cdot 10^8 g \left(\frac{T}{10} \right)^4 z_t^4, \quad (20)$$

$$\nu_{phi}^L [c^{-1}] \approx \frac{1.67 \cdot 10^8 g}{S_*^3} \left(\frac{T}{10} \right)^4 z_L^4,$$

где $g = 0.816 \cdot 10^{-7}$ для ^{70}Ge (99.99%), $g = 7.57 \cdot 10^{-5}$ для ^{70}Ge (96.3%) и $g = 5.87 \cdot 10^{-4}$ для ^{nat}Ge (натуральный состав). При рассеянии на границах образца

$$\nu_{phB}^\lambda [c^{-1}] = \frac{s_\lambda}{L_C} \left\{ \frac{1-P}{1+P} + \frac{L_C}{l} \right\} = C_{B\lambda} \cdot 10^6, \quad (21)$$

$$C_{BL} = C_{Bt} S_*,$$

где L_C — длина Казимира, l — длина образца, P — вероятность зеркального отражения фононов. Величина ν_{phB}^L в исследованных кристаллах германия [2–4] составляла $(1-2) \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$. Для скорости релаксации фононов в процессах переброса использовались параметры, полученные в работе [2]:

$$\nu_{phU}^\lambda = A_\lambda \left(\frac{T}{10} \right)^3 \exp \left(-\frac{C_\lambda}{T} \right) z_\lambda^2,$$

где $A_L = 1.72 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$, $A_t = 8.6 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$, $C_L = 180 \text{ K}$, $C_t = 55 \text{ K}$.

Нетрудно убедиться, что во всей температурной области для поперечных фононов выполняется неравенство $\nu_{phN}^t(q) \ll \nu_{phR}^t(q)$, и вклад поперечных фононов в теплопроводность главным образом определяется диффузионным движением. Однако для продольных фононов отношение

$$\frac{\nu_{phN}^L}{\nu_{phR}^L} = 3.4 \left(\frac{T}{10} \right)^5 z_L^2 \times$$

$$\times \left[C_{BL} + 167 S_*^{-3} g \left(\frac{T}{10} \right)^4 z_L^4 + \right.$$

$$\left. + 1.72 \left(\frac{T}{10} \right)^3 \exp \left(-\frac{180}{T} \right) z_L^2 \right]^{-1} \quad (22)$$

при $T > 10 \text{ K}$ больше единицы, а в интервале температур $20 \text{ K} < T < 100 \text{ K}$ значительно больше единицы. Поэтому дрейфовое движение фононов в изотопически обогащенных кристаллах германия в значительной мере определяет вклад продольных фо-

нонов в теплопроводность, которую с учетом приведенных выше неравенств можно представить в виде

$$\kappa_L(T) = \frac{1}{3} \frac{C_{VL} s_L^2}{\langle \nu_{phR} \rangle_L}, \quad (23)$$

$$\langle \nu_{phR} \rangle_L = \frac{\langle \nu_{phR}^L \rangle + 2S_*^5 \langle \nu_{phN}^t \rangle}{J_L^{(4)}}.$$

Из выражения (23) видно, что в эффективную частоту релаксации продольных фононов для механизма релаксации Херринга (в отличие от обобщенной модели Каллавея [2]) вносят вклад не только резистивные процессы рассеяния продольных фононов, но и нормальные процессы рассеяния поперечных фононов. Далее мы покажем, что это приводит к существенному подавлению дрейфового движения продольных фононов и, соответственно, их вклада в теплопроводность для механизма релаксации Херринга в изотопически чистых кристаллах германия.

Ниже приведены результаты расчета теплопроводности $\kappa(T)$ образцов германия с различной степенью изотопического содержания для двух вариантов релаксации импульса фононов в N -процессах согласно формулам (13), (14), (15). Все параметры теории взяты из работы [2]. Подгонка результатов осуществлялась вариацией одного параметра, C_{BL} , характеризующего рассеяние продольных фононов на границах образцов (для поперечных фононов $C_{BL} = C_{BL}/S_*$), для того чтобы добиться наилучшего совпадения результатов расчета $\kappa(T)$ и экспериментальных данных как в области максимума $\kappa(T)$, так и при более низких температурах.

На рис. 2 приведены рассчитанные зависимости теплопроводности полированного кристалла германия с содержанием 99.99% изотопа ^{70}Ge [2] и вкладов поперечных и продольных фононов для двух вариантов релаксации импульса: механизма Херринга и обобщенной модели Каллавея (механизма Саймонса). Значения всех параметров теории взяты из [2], $C_{BL} = 1.6$, $P = 0.15$. Для обобщенной модели Каллавея («модели 1» [2]) κ_{max}^L больше κ_{max}^t в 1.3 раза и максимальные значения полной теплопроводности преимущественно определяются продольными фононами. Этот результат согласуется с расчетами [10]. При тех же значениях параметров для механизма Херринга κ_{max}^L уменьшается примерно в 3.4 раза и становится в 2.8 раза меньше, чем κ_{max}^t , при этом κ_{max}^t практически не изменяется. Поэтому для механизма Херринга в области максимума вклад поперечных фононов доминирует, составляя порядка 80% от полной теплопроводности. Таким образом, два варианта релаксации импульса фоно-

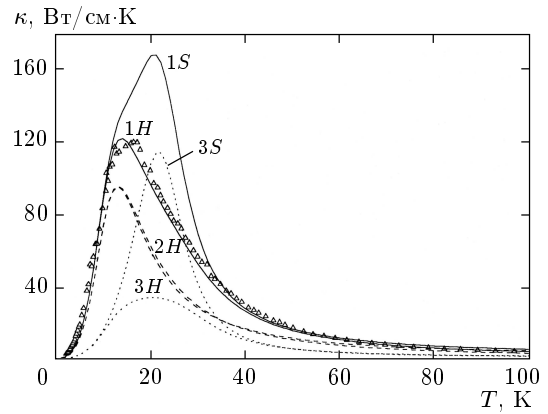


Рис. 2. Зависимости полной теплопроводности (1), а также вкладов поперечных (2) и продольных (3) фононов от температуры полированного кристалла германия ($C_{BL} = 1.6$, $P = 0.15$) с содержанием 99.99% изотопа ^{70}Ge [2] для механизма релаксации Херринга (H) и обобщенной модели Каллавея (S)

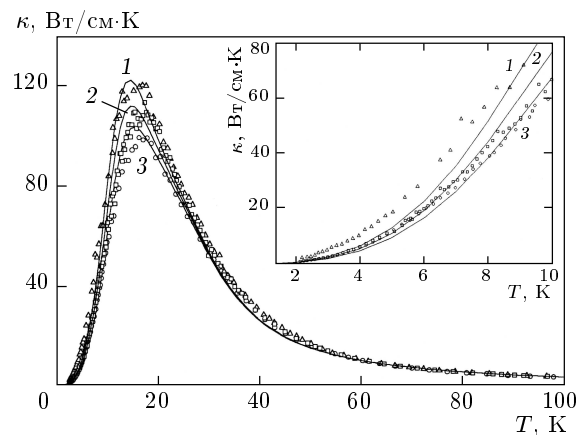


Рис. 3. Зависимости полной теплопроводности для высокообогащенных кристаллов Ge (99.99%) с различной степенью поверхностной обработки: 1 — $C_{BL} = 1.6$, $P = 0.15$; 2 — $C_{BL} = 1.9$, $P = 0.07$; 3 — $C_{BL} = 2.33$, $P = 0$. Символы — экспериментальные данные [2, 3], сплошные линии — результаты расчета для механизма Херринга

нов в N -процессах приводят к качественно различным результатам. Как видно из рис. 3, рассчитанные значения $\kappa(T)$ для образцов германия с содержанием 99.99% изотопа Ge^{70} и с различной степенью поверхностной обработки в области максимума и при более высоких температурах хорошо согласуются с экспериментальными данными. Однако при температурах $T < 10$ K рассчитанные значения теплопро-

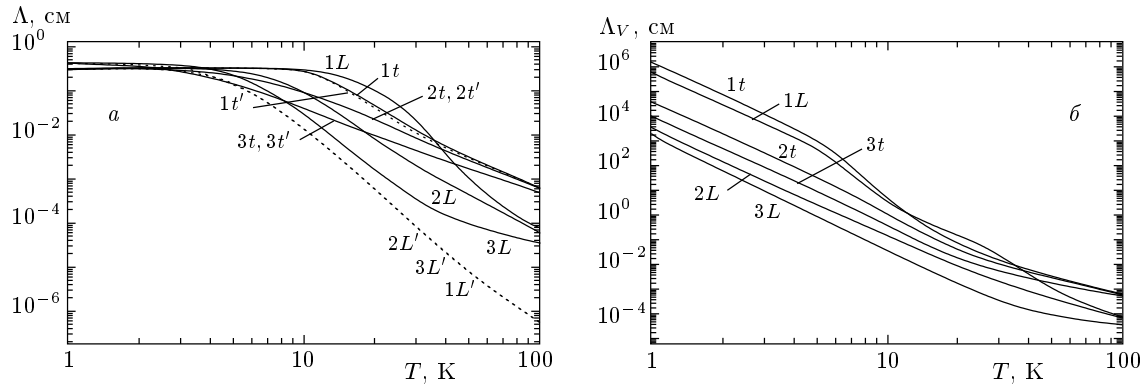


Рис. 4. Температурные зависимости эффективной длины свободного пробега (сплошные линии) продольных (L) и поперечных (t) фононов и диффузионной длины свободного пробега (штриховые линии) (a), а также объемной длины свободного пробега для фононов различной поляризации (b) для образцов германия с различным содержанием изотопа ^{70}Ge : 1 — 99.99%; 2 — 96.5%; 3 — ^{nat}Ge

водности лежат заметно ниже экспериментально измеренных для полированного образца (см. вставку к рис. 3). В работах [2, 10] это расхождение объяснялось в рамках теории Займана–Софера [20, 21]. Оно связано с тем, что при расчете теплопроводности в низкотемпературной области необходимо учитывать зависимость вероятности P зеркального отражения фононов и, соответственно, частоты релаксации $\nu_{phB}(q)$ от длины волны фононов [2, 10, 20, 21].

Можно отметить еще один эффект, который может приводить к расхождению результатов расчета и экспериментальных данных по теплопроводности при низких температурах. Как видно из рис. 4, объемная длина свободного пробега фононов (рис. 4б) при низких температурах значительно превосходит как эффективную длину свободного пробега для фононов обеих поляризаций (рис. 4а), так и размеры образцов. Так, для образца германия с содержанием 99.99% изотопа ^{70}Ge (кривые 1, рис. 4б) объемная длина свободного пробега поперечных фононов ($1t$) уже при температуре 10 К (4.8 см) становится больше длины образца, а при 5 К она превосходит длину образца в 250 раз. Поэтому при $T \leq 8$ К возможен баллистический транспорт фононов, который может дать дополнительный вклад в теплопроводность. Диффузионная длина свободного пробега продольных фононов определяется главным образом нормальными процессами рассеяния и оказывается малочувствительной к степени изотопического беспорядка. Однако для поперечных фононов вероятность нормальных процессов рассеяния мала и вклад поперечных фононов в теплопроводность определяется главным образом диффузионным дви-

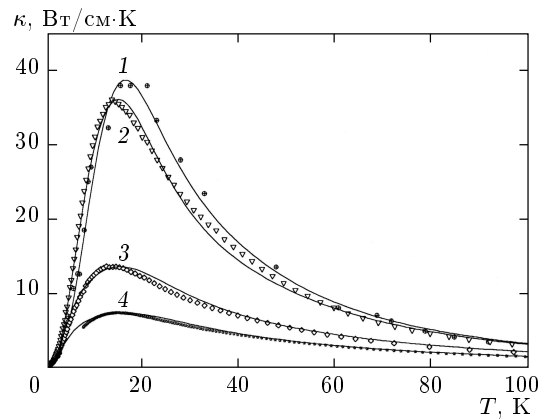


Рис. 5. Зависимости теплопроводности от температуры для кристаллов германия с различным изотопическим составом: 1 — ^{74}Ge (95.8%), $g = 3.6 \cdot 10^{-5}$, $C_{BL} = 3.43$; 2 — ^{70}Ge (96.3%), $g = 7.57 \cdot 10^{-5}$, $C_{BL} = 1.6$; 3 — ^{nat}Ge , $g = 5.87 \cdot 10^{-4}$, $C_{BL} = 1.2$; 4 — $^{70/76}\text{Ge}$, $g = 1.53 \cdot 10^{-3}$, $C_{BL} = 1.35$. Символы — экспериментальные данные [2, 3, 12]

жением. Поэтому диффузионная длина свободного пробега практически совпадает с эффективной и существенно зависит от степени изотопического беспорядка.

Результаты расчетов теплопроводности $\kappa(T)$, приведенные на рис. 5, при тех же значениях параметров для механизма релаксации Херринга хорошо согласуются с экспериментальными данными для кристаллов германия с различной степенью изотопического беспорядка [2, 3, 12]. Очевидно, что рост изотопического беспорядка приводит к

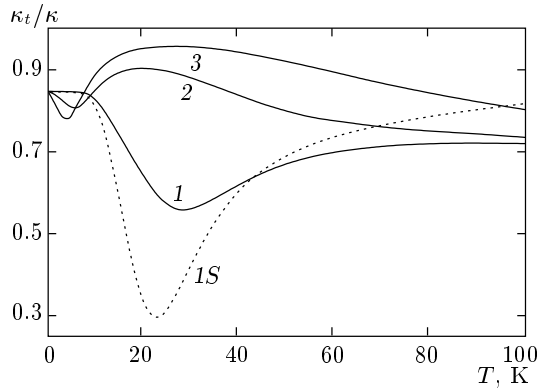


Рис. 6. Зависимости отношения вклада поперечных фононов к полной теплопроводности для образцов германия с различной степенью изотопического беспорядка: 1 — ^{70}Ge (99.99 %); 2 — ^{70}Ge (96.3 %); 3 — ^{nat}Ge . Сплошные линии — механизм Херринга, штриховая линия — обобщенная модель Каллавея для ^{70}Ge (99.99 %)

уменьшению значений полной теплопроводности $\kappa(T)$. При этом различие между вариантами межветвевое (механизм Херринга) и внутриветвевое перераспределения импульса фононов уменьшается, и для германия с натуральным составом изотопов это различие становится менее 1%. Однако вклад дрейфового движения продольных фононов в теплопроводность $\kappa_L(T)$ при температуре 15 К даже для германия с натуральным составом превышает диффузионный в полтора раза. Мы провели анализ вклада поперечных фононов в полную теплопроводность для образцов германия с различной степенью изотопического беспорядка. Как видно из рис. 6, поперечные фононы вносят основной вклад в теплопроводность германия, причем с ростом степени изотопического беспорядка этот вклад увеличивается, и для кристаллов ^{nat}Ge в интервале температур от 15 до 60 К превышает 90% полной теплопроводности. Уменьшение степени изотопического беспорядка приводит к увеличению дрейфовой скорости фононов. Для изотопически чистых образцов ^{70}Ge (99.99%) вклад продольных фононов увеличивается, а поперечных уменьшается до 55% при температуре 29 К для механизма Херринга, а для обобщенной модели Каллавея доля поперечных фононов в теплопроводности уменьшается до 30% при температуре 23 К. Следует отметить интересный факт, связанный с влиянием N -процессов рассеяния Херринга на теплопроводность кристаллов германия с различной степенью изотопического беспорядка. Дело в том,

что при рассеянии на изотопическом беспорядке частота релаксации поперечных фононов (см. (20)) примерно в пять раз больше, чем продольных, и, казалось бы, рост изотопического беспорядка должен приводить к увеличению вклада продольных фононов в теплопроводность. Однако рост изотопического беспорядка вызывает резкое снижение скорости дрейфа продольных фононов, которая в исследуемом интервале изотопического состава уменьшается почти на два порядка (см. ниже). Это существенно уменьшает вклад продольных фононов в теплопроводность для ^{nat}Ge по сравнению с ^{70}Ge (99.99%). Именно с отмеченными выше обстоятельствами и связан успех теории Холланда [13] при объяснении теплопроводности кристаллов германия с натуральным составом. Наши результаты согласуются с анализом, проведенным в [22] в рамках вариационного подхода. В этой работе вероятности рассеяния фононов определялись из экспериментальных значений упругих постоянных и получено хорошее согласие с данными работ [12, 23]. Согласно [22], от 80 до 90% тепла в германии переносится поперечными фононами в температурной области от 2 до 300 К.

Рассмотрим теперь отношение дрейфового вклада к диффузионному, $\kappa_{dr}^\lambda/\kappa_{dif}^\lambda$, в теплопроводность германия с различной степенью изотопического беспорядка для обеих ветвей фононного спектра. Как видно из рис. 7, для механизма Херринга вклад дрейфового движения продольных фононов в теплопроводность ^{70}Ge (99.99%) в области максимума уменьшается примерно в два раза по сравнению с результатом, полученным для обобщенной модели Каллавея (значения всех параметров теории взяты из [2]). Однако и в этом случае он на два порядка превосходит вклад диффузионного движения продольных фононов. Заметим, что вклад дрейфового движения продольных фононов в теплопроводность ^{70}Ge (99.99%) для механизма Херринга достигает максимума при температуре 28 К, в этом случае он превышает диффузионный вклад в 270 раз. С другой стороны, вклад дрейфового движения поперечных фононов в области максимума теплопроводности составляет 6% от полной теплопроводности κ^t для обобщенной модели Каллавея (механизм Саймонса) и менее 2% для механизма Херринга. С ростом степени изотопического беспорядка и отношение $\kappa_{dr}^\lambda/\kappa_{dif}^\lambda$ для обеих ветвей фононного спектра, и различие между вариантами Саймонса и Херринга становятся пренебрежимо малыми.

Рисунок 8 иллюстрирует зависимости значений теплопроводности в точке максимума κ_{max} от степе-

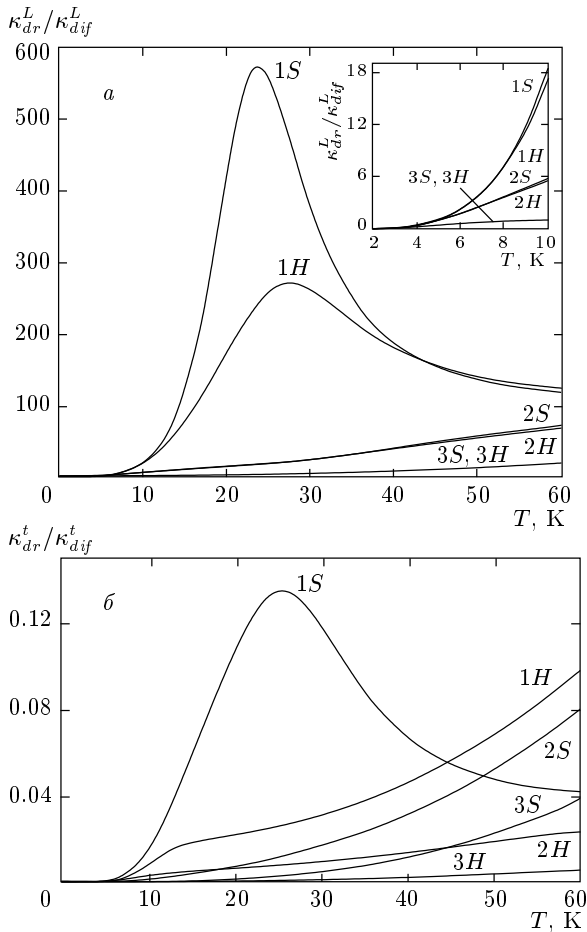


Рис. 7. Зависимости отношения дрейфового вклада в теплопроводность к диффузионному, $\kappa_{dr}^\lambda/\kappa_{dif}^\lambda$, для продольных (а) и поперечных (б) фононов в кристаллах германия с различной степенью изотопического беспорядка: 1 — ^{70}Ge (99.99 %); 2 — ^{70}Ge (96.3 %); 3 — ^{nat}Ge . Буква *S* означает обобщенную модель Каллавея (механизм Саймонса), *H* — механизм Херринга

ни изотопического беспорядка g для кристаллов германия с различной частотой релаксации фононов на границах образца (C_{BL}). Очевидно, что предложенная нами модель межветвевое перераспределения импульса фононов в N -процессах рассеяния Херринга позволяет описать экспериментальные данные [2–4, 12] существенно лучше (кривая 1), чем обобщенная модель Каллавея [2] (кривая 1'). Как видно из рисунка, при $g < 10^{-6}$ (что соответствует ^{70}Ge (99.9 %)) значения κ_{max} выходят на насыщение при увеличении степени изотопического совершенства кристаллов германия, однако существенно зависят от величины и характера граничного рассеяния фононов. Из сравнения кривых 1 и 4 видно,

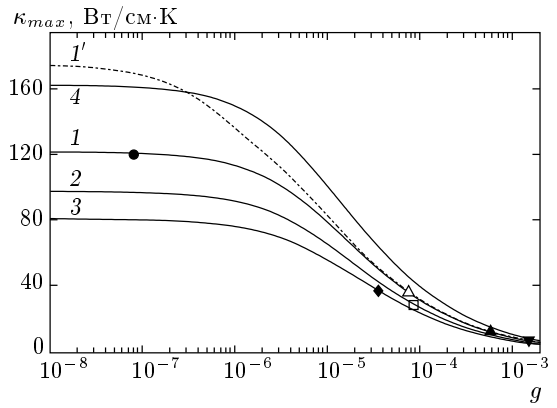


Рис. 8. Зависимости максимальных значений теплопроводности κ_{max} от степени изотопического беспорядка g . Сплошные линии — механизм Херринга: 1 — $C_{BL} = 1.6$; 2 — $C_{BL} = 2.48$; 3 — $C_{BL} = 3.43$; 4 — $C_{BL} = 0.8$; штриховая линия — обобщенная модель Каллавея (1') $C_{BL} = 1.6$. Символы — экспериментальные значения [2, 3, 12]: \bullet — $g = 8.16 \cdot 10^{-8}$, $C_{BL} = 1.6$; \blacklozenge — $g = 3.6 \cdot 10^{-5}$, $C_{BL} = 3.43$; \triangle — $g = 7.57 \cdot 10^{-5}$, $C_{BL} = 1.6$; \square — $g = 8.7 \cdot 10^{-5}$, $C_{BL} = 2.48$; \blacktriangle — $g = 5.87 \cdot 10^{-4}$, $C_{BL} = 1.2$; \blacktriangledown — $g = 1.53 \cdot 10^{-3}$, $C_{BL} = 1.35$

что увеличение поперечного сечения образца в два раза должно приводить к увеличению κ_{max} на одну треть для ^{70}Ge (99.9 %) по сравнению с максимальными значениями теплопроводности, достигнутыми в [2] для ^{70}Ge (99.99 %).

Поскольку для кристаллов германия преобладающий вклад в теплопроводность вносят поперечные фононы, представляло бы интерес рассмотреть, насколько чувствительны значения теплопроводности в окрестности максимума к предположению о дебаевском спектре поперечных фононов ($\omega_{qt} = s_t q$). Однако эти расчеты выходят за рамки данной работы и требуют отдельного рассмотрения.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в настоящей работе рассмотрено влияние N -процессов рассеяния фононов на теплопроводность кристаллов германия с различной степенью изотопического беспорядка. Детально проанализированы вклады дрейфового движения продольных и поперечных фононов в теплопроводность для двух вариантов релаксации фононов в N -процессах: 1) N -процессы фонон-фононного рассеяния перераспределяют импульс фононов только внутри каждой колебательной ветви (механизм Саймонса); 2) домини-

нирует перераспределение импульса фононов между различными колебательными ветвями фононов (механизм Херринга). Показано, что N -процессы рассеяния фононов играют важную роль в изотопически обогащенных кристаллах германия и результаты расчета теплопроводности существенным образом зависят от механизма релаксации импульса фононов в N -процессах. Для обобщенной модели Калавея дрейфовый вклад продольных фононов в теплопроводность почти на три порядка превышает диффузионный и, главным образом, определяет величины полной теплопроводности в области максимума. Этот результат согласуется с расчетами [10]. В этом случае вклад поперечных фононов в теплопроводность определяется диффузионным движением. Однако для кристаллов германия основным механизмом N -процессов фонон-фононного рассеяния является механизм Херринга [2, 11, 13, 14, 17, 22]. Проведенный в данной работе анализ теплопроводности кристаллов германия с различной степенью изотопического беспорядка является еще одним подтверждением этого факта. Нам удалось согласовать результаты расчета теплопроводности кристаллов германия для тех же значений параметров, что и в [2], не привлекая дополнительный механизм рассеяния фононов на дислокациях, концентрация которых, согласно [24], на четыре порядка меньше, чем требовалось в [2] для согласования рассчитанных и измеренных значений теплопроводности ^{70}Ge (99.99%) в области максимума. Следует отметить, что результаты расчета теплопроводности германия для двух вариантов релаксации импульса фононов в N -процессах различаются не только количественно, но и качественно. Если значения теплопроводности германия в области максимума для обобщенной модели Калавея [2, 3] (механизм Саймонса) определяются главным образом продольными фононами, то для механизма Херринга — поперечными. Нами показано, что перераспределение импульса между продольными и поперечными фононами в N -процессах Херринга приводит к существенному подавлению дрейфового движения продольных фононов и, соответственно, их вклада в теплопроводность.

Можно надеяться, что подход, развитый в данной работе, будет полезен при исследовании теплопроводности в других системах с изотопическим беспорядком. Очевидно, что увеличение изотопического порядка в таких кристаллах как кремний и алмаз, где дебаевские частоты поперечных фононов существенно выше, чем в германии, приведет к более сильной изотопической зависимости теплопроводности за счет более раннего вымораживания процессов

переброса поперечных фононов.

Предложенная в данной работе теория основана на особенностях трехфононных процессов релаксации Херринга и Саймонса и развивает представления, заложенные Калавеем [11]. Для дальнейшего развития теории решеточной теплопроводности необходимы анализ микроскопического кинетического уравнения для неравновесной функции распределения фононов и выделение из трехфононного интеграла столкновений матрицы частот релаксации $\nu_{phN}^{\lambda\lambda'}$ (q), описывающей перераспределение фононного импульса как внутри ветвей, так и между ними. Интенсивные исследования физических свойств изотопически чистых кристаллов [1–10] делает решение этой задачи актуальной проблемой физики твердого тела.

Авторы выражают глубокую благодарность А. В. Инюшкину и А. Н. Талденкову за предоставление экспериментальных данных и полезные замечания в ходе выполнения работы, а также А. П. Танкееву и В. Е. Найшу за обсуждение результатов работы и критические замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 00-02-16299 и 01-02-06238).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Плеханов, УФН **170**, 1245 (2000).
2. M. Asen-Palmer, K. Bartovski, E. Gmelin et al., Phys. Rev. B **56**, 9431 (1997).
3. В. И. Ожогин, А. В. Инюшкин, А. Н. Талденков, А. В. Тихомиров, Г. Э. Попов, Ю. Халлер, К. Ито, Письма в ЖЭТФ **63**, 463 (1996).
4. А. Н. Талденков, А. В. Инюшкин, В. И. Ожогин и др., в сб. *Труды IV конференции «Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул»* (Звенигород, 1999), Наука, Москва (1999).
5. R. Berman, Phys. Rev. B **45**, 5726 (1992).
6. W. S. Capinski, H. J. Maris, E. Bauser et al., Appl. Phys. Lett. **71**, 2109 (1997).
7. Lanhua Wei, P. K. Kuo, R. L. Thomas et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 3764 (1993).
8. J. E. Graebner, M. E. Reiss, L. Seibles et al., Phys. Rev. B **50**, 3702 (1994).
9. J. R. Olson, R. O. Pohl, J. W. Vandersande et al., Phys. Rev. B **47**, 14850 (1993).

10. А. П. Жернов, Д. А. Жернов, ЖЭТФ **114**, 1757 (1998); А. П. Жернов, ФТТ **41**, 1185 (1999).
11. J. Callaway, Phys. Rev. **113**, 1046 (1959).
12. Т. Н. Geballe and G. W. Hull, Phys. Rev. **110**, 1773 (1958).
13. M. G. Holland, Phys. Rev. **132**, 2461 (1963).
14. Р. Берман, *Теплопроводность твердых тел*, Мир, Москва (1962).
15. Б. М. Могилевский, А. Ф. Чудновский, *Теплопроводность полупроводников*, Наука, Москва (1972).
16. S. Simons, Proc. Phys. Soc. **82**, 401 (1963); **83**, 799 (1963).
17. C. Herring, Phys. Rev. **95**, 954 (1954).
18. И. Г. Кулеев, ФТТ **42**, 1952 (2000).
19. И. Г. Кулеев, ФММ **90**, вып. 6, 18 (2000).
20. Дж. Займан, *Электронны и фононы*, Изд-во иностр. лит., Москва (1962).
21. B. Soffer, J. Appl. Phys. **38**, 1710 (1967).
22. R. A. H. Hamilton and J. E. Parrot, Phys. Rev. **178**, 1284 (1969).
23. G. A. Slack and C. J. Glassbrenner, Phys. Rev. **120**, 782 (1960).
24. K. Itoh, PhD Thesis, University of California at Berkeley, December, 1994.