ЖЭТФ, 2001, том 120, вып. 3 (9), стр. 668–677

К ТЕОРИИ ПРОВОДИМОСТИ КОМПОЗИТОВ С ДВУМЕРНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Б. Я. Балагуров[*]

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119991, ГСП-1, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 января 2001 г.

Предложен метод последовательного решения задачи о проводимости двумерных периодических систем с включениями произвольной формы. Комплексный потенциал вне включений выражен через дзета-функцию Вейерштрасса и ее производные. Поле, индуцированное на отдельном включении, описывается с помощью матрицы мультипольных поляризуемостей. «Сшивка» потенциалов проводится на расстоянии ρ таком, что $R < \rho < a$, где R — характерный размер (максимальный «радиус») включения, a — полупериод решетки. Предложенный подход позволяет находить точные вириальные разложения для проводимости и других эффективных характеристик подобных систем.

PACS: 41.20.Cv, 81.60.Hv

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование проводимости и других электрофизических характеристик неоднородных неупорядоченных систем (в частности, композитов) наталкивается на известные математические трудности [1]. Поэтому имеющиеся для электропроводности таких сред результаты получены, в основном, с помощью модельных и численных экспериментов. Более благоприятна в теоретическом отношении, особенно для двумерных систем, ситуация для композитов с периодической структурой. Здесь достаточно ограничиться нахождением потенциала в пределах одной элементарной ячейки, что существенно упрощает задачу, хотя и в этом случае она остается довольно сложной. Отметим,что изучение электрических свойств композитов с периодической структурой представляет значительный интерес как с общефизической (проблема фазового перехода металл–диэлектрик), так и с прикладной (микроэлектроника) точек зрения.

Аналитическое решение задачи о проводимости дано для ряда двумерных двоякопериодических систем [1–3] методами теории функций комплексного переменного. В [1–3] рассмотрены различные модели систем с диэлектрическими или идеально проводящими включениями, что позволяет ограничиться решением внешней задачи. Замкнутое решение в случае конечной (ненулевой) проводимости обеих компонент дано в [1] для модели со структурой шахматной доски. В работах [4, 5] развита схема последовательного нахождения вириальных разложений для различных эффективных характеристик модели (впервые рассмотренная Рэлеем [6]) — тонкой пленки с круговыми включениями, образующими квадратную (прямоугольную) решетку. Заметим, что каждый из методов, использованных в [1–6], применим к какой-то одной модели с включениями конкретной формы. В то же время единый подход к этой проблеме отсутствует.

В настоящей работе предложен метод последовательного получения вириальных разложений для проводимости и других эффективных характеристик композитов с двумерной периодической структурой, образованной включениями произвольной формы. Комплексный потенциал вне включений выражен через дзета-функцию Вейерштрасса [7, 8] и ее производные. Свойства же конкретного включения входят в решение задачи в виде мультипольных поляризуемостей этого включения — соответствующих коэффициентов в «откликах» на различные внешние поля.

Подобный подход позволяет полностью решить «решеточную» часть задачи, сводя исходную про-

[*]E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru

блему «включение в элементарной ячейке» к проблеме нахождения отклика уединенного включения на внешнее поле с заданной на бесконечности асимптотикой. Задача же отыскания мультипольных поляризуемостей должна решаться в каждом конкретном случае как самостоятельная — аналитическими или численными методами. В настоящей работе в качестве примера найдена полная матрица поляризуемостей для включений эллиптической формы. Отметим, что в работе рассмотрен наиболее простой для анализа случай квадратной решетки, хотя предложенный метод применим и к решеткам другой симметрии. Рассмотрение ведется в рамках макроскопической электродинамики, так что предполагается, в частности, что характерные размеры включений велики по сравнению с длиной свободного пробега носителей.

2. МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ

В дальнейшем нам понадобится решение задачи об отклике отдельного включения (тела) на внешнее электрическое поле. Если приложено однородное поле напряженностью $\mathbf{E}_0$, то на больших от тела расстояниях электрический потенциал φ в дипольном приближении имеет вид (двумерный случай)

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_0\mathbf{r} + 2\frac{\mathbf{pr}}{r^2} + \ldots, \quad r \to \infty. \tag{1}$$

Здесь

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda}\mathbf{E}_0 \tag{2}$$

— дипольный момент включения, $\hat{\Lambda}$ — тензор дипольной поляризуемости.

Если $\mathbf{E}_0$ направлено вдоль одной из главных осей тензора $\hat{\Lambda}$ (выберем ее в качестве координатной оси x), то

$$\varphi(\mathbf{r}) = -E_0\left\{x - 2\frac{x\Lambda^{(x)}}{r^2} + \ldots\right\}, \quad r \to \infty, \tag{3}$$

где $\Lambda^{(x)}$ — соответствующее главное значение тензора $\hat{\Lambda}$. Величина $\Lambda^{(x)}$ (как и сам тензор $\hat{\Lambda}$) пропорциональна площади (объему в трехмерном случае) включения s:

$$\Lambda^{(x)} = s\alpha^{(x)}, \tag{4}$$

где $\alpha^{(x)}$ — безразмерная дипольная поляризуемость, зависящая от формы тела и аргумента $h = \sigma_2/\sigma_1$, σ_2 и σ_1 — проводимости соответственно включения и окружающей среды.

Ниже будет удобно пользоваться комплексным потенциалом $\Phi(z)$, производная от которого связана с составляющими напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ следующим образом:

$$\Phi'(z) = -E_x + iE_y. \tag{5}$$

Действительная часть $\Phi(z)$ дает электрический потенциал $\varphi(\mathbf{r})$:

$$\varphi = \operatorname{Re}\Phi(z). \tag{6}$$

Комплексный потенциал, отвечающий выражению (3), имеет вид

$$\Phi(z) = -E_0\left\{z - \frac{2\Lambda^{(x)}}{z} + \ldots\right\}, \quad |z| \to \infty, \tag{7}$$

с вещественной константой $\Lambda^{(x)}$.

При учете высших (мультипольных) моментов выражение для $\Phi(z)$ при больших $|z|$ принимает вид

$$\Phi(z) = z + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{(x)}_{1,2m+1}}{z^{2m+1}}, \quad |z| \to \infty. \tag{8}$$

В (8) опущен общий множитель и для упрощения выкладок считается, что включение имеет достаточно симметричную форму, так что комплексный потенциал нечетен по z, а $\Lambda^{(x)}_{1,2m+1}$ вещественны. Сравнение (8) с (7) показывает, что

$$\Lambda^{(x)}_{11} = -2\Lambda^{(x)} = -2s\alpha^{(x)}. \tag{9}$$

В дальнейшем понадобится также и отклик включения на неоднородное внешнее поле вида

$$\operatorname{Re} z^{2n+1} = r^{2n+1}\cos(2n+1)\theta,$$

где θ — полярный угол. В этом случае аналогично (8) имеем

$$\Phi(z) = z^{2n+1} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{(x)}_{2n+1,2m+1}}{z^{2m+1}}, \quad |z| \to \infty, \tag{10}$$

с вещественными константами $\Lambda^{(x)}_{2n+1,2m+1}$, которые будем называть мультипольными поляризуемостями. Отметим, что равенство (10) можно представить также в виде

$$\Phi(z) = z^{2n+1} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{(x)}_{2n+1,2m+1}}{(2m)!}\left(\frac{d^{2m}}{dz^{2m}}\frac{1}{z}\right), \quad |z| \to \infty. \tag{11}$$

Аналогичным образом вводятся и четно-четные мультипольные поляризуемости $\Lambda_{2n,2m}$.

Заметим, что преобразование симметрии Дыхне [9] позволяет связать комплексные потенциалы исходной и так называемой взаимной (отличающейся от исходной заменой $h \to 1/h$) $\tilde{\Phi}(z)$ систем (ср. с [3]):

$$\Phi^{(x)}(z) = i\tilde{\Phi}^{(y)}(z). \tag{12}$$

Здесь индекс $\nu = x$ у $\Phi^{(\nu)}(z)$ означает, что в асимптотике электрического потенциала $\varphi = \operatorname{Re}\Phi^{(\nu)}(z)$ главный член имеет вид $\operatorname{Re} z^{2n+1}$, а $\nu = y$ — соответственно $\operatorname{Im} z^{2n+1}$. Значком «тильда» здесь и ниже отмечаются величины, относящиеся к взаимной системе. Для $\Phi^{(y)}(z)$ имеем разложение, аналогичное (10):

$$\Phi^{(y)}(z) = -i\left\{z^{2n+1} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{(y)}_{2n+1,2m+1}}{z^{2m+1}}\right\}, \quad |z| \to \infty. \tag{13}$$

Подстановка (10) и (13) в (12) дает соотношение

$$\tilde{\Lambda}^{(y)}_{2n+1,2m+1} = -\Lambda^{(x)}_{2n+1,2m+1}. \tag{14}$$

Таким же соотношением связаны и четно-четные поляризуемости $\Lambda_{2n,2m}$.

Из (10) по соображениям размерности следует, что

$$\Lambda_{nm} = R^{n+m}\alpha_{nm}, \tag{15}$$

где R — характерный размер (в плоскости xy) включения, α_{nm} — безразмерные величины, зависящие от формы включения и аргумента h.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ

Рассмотрим двумерную систему с одинаковыми (и одинаково ориентированными) включениями, образующими квадратную решетку с периодом $2a$. Будем считать, что главные оси тензоров поляризуемости включений совпадают с осями решетки и осями координат x и y. Тогда, если средняя (по площади элементарной ячейки) напряженность электрического поля $\langle\mathbf{E}\rangle$ направлена вдоль оси x, все величины Λ_{nm} в (8) и (10) вещественны. Задачу о нахождении потенциала решаем с помощью разложения по формально малому параметру R/a, где в данном случае R — максимальный «радиус» включения.

В нулевом приближении комплексный потенциал, отвечающий однородному внешнему полю, приложенному вдоль оси x, имеет вид

$$\Phi^{(0)}(z) = \beta z. \tag{16}$$

Отклик включения, расположенного в начале координат, на поле (16) дается согласно (8) выражением

$$\Phi^{(1)}_I(z) = \beta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda_{1,2n+1}}{z^{2n+1}} = \beta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda_{1,2n+1}}{(2n)!}\left(\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\frac{1}{z}\right). \tag{17}$$

Здесь и ниже индекс x у $\Lambda^{(x)}_{nm}$ опускаем. Суммируя отклики типа (17) от всех включений, для поправки первого приближения к (16) получим следующее выражение:

$$\Phi^{(1)}(z) = \beta\sum_{n=0}^{\infty}B^{(1)}_{2n}\zeta^{(2n)}(z), \tag{18}$$

$$B^{(1)}_{2n} = \frac{1}{(2n)!}\Lambda_{1,2n+1}. \tag{19}$$

В равенстве (18)

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + {\sum_{k,l}}'\left[\frac{1}{z-z_{kl}} + \frac{1}{z_{kl}} + \frac{z}{(z_{kl})^2}\right] \tag{20}$$

— дзета-функция Вейерштрасса [7, 8], $\zeta^{(2n)}(z)$ — производная порядка $2n$ от $\zeta(z)$, $z_{kl} = 2(k+il)a$. Функция $\zeta(z)$ (слагаемое с $n = 0$ в (18)) возникает в результате суммирования потенциалов диполей, наведенных внешним полем. При этом, как и в [4, 5], проведена регуляризация соответствующей суммы, что обеспечивает ее сходимость. Слагаемые с $n \geq 1$ в (18) отвечают высшим мультиполям.

В следующем приближении в качестве внешнего по отношению к выделенному включению потенциала выступает величина $\Phi^{(1)}(z)$ из (18) за вычетом собственного поля, т. е. потенциала $\Phi^{(1)}_I(z)$ из (17):

$$\Phi^{(1)}(z) - \Phi^{(1)}_I(z) = \beta\sum_{n=0}^{\infty}B^{(1)}_{2n}\left\{\zeta^{(2n)}(z) - \frac{(2n)!}{z^{2n+1}}\right\}. \tag{21}$$

Согласно [7] для дзета-функции имеет место разложение

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{m=2}^{\infty}\frac{c_m}{2m-1}z^{2m-1}. \tag{22}$$

Выражения для коэффициентов c_m приведены, например, в [7] (см. также [4, 5]). В частности, для квадратной решетки все c_m с нечетными индексами равны нулю. Из (22) для $\zeta^{(2n)}(z)$ находим

$$\zeta^{(2n)}(z) = \frac{(2n)!}{z^{2n+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n+2k)!}{(2k+1)!}c_{n+k+1}z^{2k+1}, \tag{23}$$

так что (21) принимает вид

$$\Phi^{(1)}(z) - \Phi_I^{(1)}(z) = = -\beta \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m}^{(1)} \frac{(2k+2m)!}{(2k+1)!} c_{k+m+1} \right\} z^{2k+1}. \quad (24)$$

Откликом выделенного включения на внешнее воздействие (24) согласно (11) является

$$\Phi_I^{(2)}(z) = -\beta \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m}^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2m)!}{(2k+1)!} c_{k+m+1} \times \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_{2k+1,2n+1}}{(2n)!} \left(\frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \frac{1}{z} \right). \quad (25)$$

Суммирование откликов вида (25) от всех включений дает вклад второго приближения в полный потенциал

$$\Phi^{(2)}(z) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}^{(2)} \zeta^{(2n)}(z), \quad (26)$$

где

$$B_{2n}^{(2)} = -\sum_{m=0}^{\infty} P_{nm} B_{2m}^{(1)} \quad (27)$$

с $B_{2n}^{(1)}$ из (19) и

$$P_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2m)!}{(2k+1)!} c_{k+m+1} \frac{\Lambda_{2k+1,2n+1}}{(2n)!}. \quad (28)$$

Продолжая эту процедуру, приходим к выводу, что полный потенциал вне включений имеет точно такой же по форме вид, что и в случае включений круговой формы [4, 5]:

$$\Phi(z) = \beta \left\{ z + \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \zeta^{(2n)}(z) \right\}. \quad (29)$$

При этом поправки к коэффициентам B_{2n} $(N+1)$-го и N-го приближений связаны соотношением

$$B_{2n}^{(N+1)} = -\sum_{m=0}^{\infty} P_{nm} B_{2m}^{(N)}, \quad (30)$$

так что

$$B_{2n} = \sum_{N=0}^{\infty} B_{2n}^{(N+1)} = = \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \sum_{m=0}^{\infty} \left(\hat{P}^N \right)_{nm} B_{2m}^{(1)} \quad (31)$$

или

$$B_{2n} = B_{2n}^{(1)} - \sum_{k} P_{nk} B_{2k}^{(1)} + \sum_{k,l} P_{nk} P_{kl} B_{2l}^{(1)} - - \sum_{k,l,m} P_{nk} P_{kl} P_{lm} B_{2m}^{(1)} + \ldots \quad (32)$$

Нетрудно убедиться, что величины B_{2n} из (32) удовлетворяют уравнению

$$B_{2n} + \sum_{m=0}^{\infty} P_{nm} B_{2m} = B_{2n}^{(1)} \quad (33)$$

с $B_{2n}^{(1)}$ из (19) и P_{nm} из (28). Выражения (29) и (33) с (28) дают формальное решение поставленной задачи.

Случай, когда $\langle \mathbf{E} \rangle$ направлено вдоль оси y, рассматривается аналогичным образом. Соответствующие величины будем снабжать черточкой сверху, так что $\Phi^{(y)}(z) = \overline{\Phi}(z)$, $\Lambda_{nm}^{(y)} = \overline{\Lambda}_{nm}$ и т. д. Используя для отыскания отклика формулу (13), для потенциала вне включений получим выражение

$$\overline{\Phi}(z) = -i\beta \left\{ z - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{B}_{2n} \zeta^{(2n)}(z) \right\}, \quad (34)$$

где коэффициенты $\overline{B}_{2n}$ удовлетворяют уравнению

$$\overline{B}_{2n} - \sum_{m=0}^{\infty} \overline{P}_{nm} \overline{B}_{2m} = \overline{B}_{2n}^{(1)}. \quad (35)$$

Здесь

$$\overline{B}_{2n}^{(1)} = \frac{1}{(2n)!} \overline{\Lambda}_{1,2n+1} \equiv \frac{1}{(2n)!} \Lambda_{1,2n+1}^{(y)}; \quad (36)$$

матрица $\overline{P}_{nm}$ по форме совпадает с P_{nm} из (28), отличаясь от P_{nm} только заменой $\Lambda_{2k+1,2n+1}$ на $\overline{\Lambda}_{2k+1,2n+1}$. Отметим, что подстановка (29) и (34) в равенство (12), записанное в виде $\tilde{\Phi}(z) = i\overline{\Phi}(z)$, дает соотношение между коэффициентами

$$\overline{B}_{2n} = -\tilde{B}_{2n}. \quad (37)$$

Для включений круговой формы радиуса R матрица поляризуемостей имеет диагональный вид

$$\Lambda_{nm} = R^{2n} \frac{1-h}{1+h} \delta_{nm}; \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (38)$$

В этом случае из (33) следует уравнение

$$B_{2n} + \frac{1-h}{1+h} \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m} \frac{(2n+2m)!}{(2n)!(2n+1)!} R^{4n+2} c_{n+m+1} = = R^2 \frac{1-h}{1+h} \delta_{n0}, \quad (39)$$

совпадающее с равенством (А.6) из [4].

4. ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Проводимость. Вычисляя с помощью комплексного потенциала $\Phi(z)$ из (29) падение напряжения U_x на элементарной ячейке и полный ток I_x через нее в направлении оси x, аналогично [4, 5] получим

$$\begin{aligned} U_x &= -2\beta a \left(1 + B_0 \frac{\pi}{4a^2}\right), \\ I_x &= -2\sigma_1 \beta a \left(1 - B_0 \frac{\pi}{4a^2}\right). \end{aligned} \tag{40}$$

Для эффективной проводимости $\sigma_{xe} = I_x/U_x$ в направлении оси x (т. е. для соответствующего главного значения σ_{xe} эффективного тензора проводимости $\hat{\sigma}_e$) находим

$$\sigma_{xe} = \sigma_1 \left(1 - B_0 \frac{\pi}{4a^2}\right) \Bigg/ \left(1 + B_0 \frac{\pi}{4a^2}\right). \tag{41}$$

Если «радиус» включения R мал по сравнению с полупериодом решетки a, то согласно (19) и (9) имеем

$$B_0 \approx B_0^{(1)} = \Lambda_{11}^{(x)} = -2s\alpha^{(x)},$$

так что в линейном по концентрации $c = s/(2a)^2$ приближении из (41) следует

$$\sigma_{xe} = \sigma_1 \left(1 + 4\pi c \alpha^{(x)}\right). \tag{42}$$

Выражение (42) совпадает с соответствующей формулой из [10] (с учетом того, что в [10] через $\alpha^{(x)}$ обозначена вдвое бо́льшая величина).

С точностью до членов $\sim R^{10}$ включительно для коэффициента B_0 из (32), (28), (19) находим

$$\begin{aligned} B_0 = \Lambda_{11} - c_2\Lambda_{11}\left(\frac{1}{3}\Lambda_{31} + \Lambda_{13}\right) - \\ - c_4\left(\frac{1}{7}\Lambda_{11}\Lambda_{71} + 3\Lambda_{13}\Lambda_{51} + 5\Lambda_{31}\Lambda_{15} + \Lambda_{11}\Lambda_{17}\right) + \\ + c_2^2\Lambda_{11}\left[\frac{1}{9}(\Lambda_{31})^2 + \frac{1}{3}\Lambda_{13}\Lambda_{31} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3}\Lambda_{11}\Lambda_{33} + (\Lambda_{13})^2\right] + \ldots \end{aligned} \tag{43}$$

Для круговых включений из (43) с учетом (38) следует

$$\begin{aligned} B_0 &= \left\{1 + \frac{1}{3}c_2^2 R^8 \delta^2 + \ldots\right\} R^2 \delta, \\ \delta &= \frac{1-h}{1+h}, \end{aligned} \tag{44}$$

что согласуется с [4].

Выписанные в (43) слагаемые являются первыми членами вириального разложения для коэффициента B_0 и, тем самым, для проводимости σ_{xe}. Подчеркнем, что параметром разложения в (43) является не концентрация (доля занимаемой площади) включений, а величина порядка R/a, где R — максимальный «радиус» включения. Можно ожидать, однако, что, как и в случае круговых включений [4], приближение (43) удовлетворительно описывает проводимость системы при всех $R/a \lesssim 1$. По мере же приближения R к a в разложении (43) следует учитывать все бо́льшее количество членов. Можно думать, что соответствующий ряд будет сходящимся, если сходятся (при $|z| > R$) разложения (8) и (10).

В случае, когда $\langle \mathbf{E} \rangle$ направлено вдоль оси y, для эффективной проводимости σ_{ye} аналогично (41) получим

$$\sigma_{ye} = \frac{\sigma_1\left(1 - \overline{B}_0\pi/4a^2\right)}{1 + \overline{B}_0\pi/4a^2} \tag{45}$$

с коэффициентом $\overline{B}_0$ из (34). Для взаимной системы ($h \to 1/h$) из (37) следует, в частности, $\tilde{B}_0 = -\overline{B}_0$. Поэтому из сравнения σ_{ye} с $\tilde{\sigma}_{xe}$ получаем

$$\tilde{\sigma}_{xe}\sigma_{ye} = \sigma_1\sigma_2 \tag{46}$$

— соотношение взаимности [11].

2. Термоэдс. В случае слабой термоэлектрической связи для главного значения α_{xe} эффективного тензора термоэдс $\hat{\alpha}_e$ двухкомпонентной среды со структурной анизотропией справедливо общее выражение [12]:

$$\alpha_{xe} = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_2)\Psi^{(x)}, \tag{47}$$

где

$$\Psi^{(x)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{xe}} \frac{\langle \mathbf{E}^{(x)} \cdot \mathbf{G}^{(x)} \rangle^{(2)}}{\langle E_x^{(x)} \rangle \langle G_x^{(x)} \rangle}. \tag{48}$$

Здесь α_i — термоэлектрический коэффициент i-й компоненты; $\langle \ldots \rangle^{(2)}$ — интеграл по площади включения, деленный на площадь элементарной ячейки. В (48) $\mathbf{E}^{(x)} = -\nabla\varphi$ — напряженность электрического поля и $\mathbf{G}^{(x)} = -\nabla T$ — «напряженность» температурного поля, вычисленные в отсутствие термоэлектрической связи при $\langle \mathbf{E} \rangle \parallel x$ и $\langle \mathbf{G} \rangle \parallel x$.

Задачи о проводимости и теплопроводности в отсутствие термоэлектрических эффектов переходят друг в друга при перестановках $\sigma \leftrightarrow \kappa$, $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{G}$ и $\mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{q}$, где κ — теплопроводность, $\mathbf{q} = \kappa\mathbf{G}$ — плотность потока тепла. Поэтому результаты разд. 2, 3 и п. 1 из разд. 4 переносятся на задачу о теплопроводности с помощью замен $\sigma_i \to \kappa_i$ и $\sigma_{\alpha e} \to \kappa_{\alpha e}$, так что, например,

$$\kappa_{xe} = \frac{\kappa_1 \left(1 - \overline{\overline{B}}_0 \pi/4a^2\right)}{1 + \overline{\overline{B}}_0 \pi/4a^2}. \tag{49}$$

Здесь двумя черточками отмечен коэффициент, получающийся из B_0 при $\sigma_i \to \kappa_i$.

Для вычисления величины $\Psi^{(x)}$ воспользуемся формулой (A.5) из Приложения A. Для этого заметим, что электрический потенциал

$$\varphi(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}\Phi(z)$$

с $\Phi(z)$ из (29) принимает, с учетом (23), вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \beta \left\{ r\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_{2n} \frac{(2n)!}{r^{2n+1}} - \right.\right. \\ \left. - \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m} \frac{(2n+2m)!}{(2n+1)!} c_{n+m+1} r^{2n+1} \right] \times \\ \left. \times \cos(2n+1)\theta \right\}. \tag{50}$$

Подстановка (50) и аналогичного выражения (с заменой B_{2n} на $\overline{\overline{B}}_{2n}$) для $T(\mathbf{r})$ в формулу (A.5) дает

$$\int_s (\mathbf{EG}) d\mathbf{r} = 2\pi\beta\overline{\overline{\beta}} \left(\overline{\overline{B}}_0 - B_0\right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^{-1}. \tag{51}$$

Подставив в (48) выражение (51), $\langle E_x^{(x)} \rangle = U_x/(2a)$ с U_x из (40) и аналогичное (с заменами B_0 на $\overline{\overline{B}}_0$ и β на $\overline{\overline{\beta}}$) выражение для $\langle G_x^{(x)} \rangle$, найдем

$$\Psi^{(x)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{xe}} \frac{2\left(\overline{\overline{B}}_0 - B_0\right)}{\sigma_2/\sigma_1 - \kappa_2/\kappa_1} \frac{\pi}{4a^2} \times \\ \times \left(1 + B_0 \frac{\pi}{4a^2}\right)^{-1} \left(1 + \overline{\overline{B}}_0 \frac{\pi}{4a^2}\right)^{-1}. \tag{52}$$

Исключая из (52) коэффициенты B_0 и $\overline{\overline{B}}_0$ с помощью (41) и (49), получим окончательно:

$$\Psi^{(x)} = \left(\frac{\kappa_1}{\sigma_1} - \frac{\kappa_{xe}}{\sigma_{xe}}\right) \left(\frac{\kappa_1}{\sigma_1} - \frac{\kappa_2}{\sigma_2}\right)^{-1}. \tag{53}$$

Выражение (53) обобщает соответствующую изотропную формулу (см. [13]) на случай структурно (геометрически) анизотропных сред.

3. Парциальные квадратичные характеристики. С тензором эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ непосредственно связаны парциальные квадратичные характеристики напряженности электрического поля [14]:

$$\psi_i^{(\alpha)} \equiv \langle (\mathbf{e}^{(\alpha)})^2 \rangle^{(i)} = \frac{\partial \sigma_{\alpha e}}{\partial \sigma_i}, \\ \mathbf{e}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}^{(\alpha)}(\mathbf{r})}{|\langle \mathbf{E}^{(\alpha)} \rangle|}. \tag{54}$$

Здесь $\sigma_{\alpha e}$ (где $\alpha = x, y, z$) — главные значения тензора $\hat{\sigma}_e$, $\mathbf{E}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ — напряженность электрического поля в среде; индекс α означает, что $\langle \mathbf{E}^{(\alpha)} \rangle$ направлено вдоль оси α; $\langle \ldots \rangle^{(i)}$ — интеграл по площади (объему в трехмерном случае) i-й компоненты, деленный на площадь (объем) образца.

Для вычисления величины $\psi_2^{(x)}$ воспользуемся формулой (51). Положив в (51) $\kappa_1 = \sigma_1$, $\overline{\overline{\beta}} = \beta$ и проводя затем предельный переход $\kappa_2 \to \sigma_2$, получим

$$\int_s \mathbf{E}^2 dr = -2\pi\sigma_1\beta^2 \frac{\partial B_0}{\partial \sigma_2}. \tag{55}$$

Из (55) с учетом $\langle E_x^{(x)} \rangle = U_x/(2a)$ (с U_x из (40)) находим

$$\langle (\mathbf{e}^{(x)})^2 \rangle^{(2)} = -2\sigma_1 \frac{\partial B_0}{\partial \sigma_2} \frac{\pi}{4a^2} \left(1 + B_0 \frac{\pi}{4a^2}\right)^{-2}. \tag{56}$$

Нетрудно видеть, что правая часть (56) является производной от σ_{xe} из (41):

$$\langle (\mathbf{e}^{(x)})^2 \rangle^{(2)} = \frac{\partial \sigma_{xe}}{\partial \sigma_2}, \tag{57}$$

что совпадает с (54) при $\alpha = x$ и $i = 2$.

4. Коэффициент Холла. Эффективный коэффициент Холла R_e в слабом магнитном поле $\mathbf{H}$ выражается через холловскую составляющую σ_{ae} эффективного тензора проводимости $\hat{\sigma}_e$ следующим образом:

$$R_e = \frac{1}{H} \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{xe}\sigma_{ye}}. \tag{58}$$

Здесь учтено, что рассматриваемая система является, вообще говоря, структурно анизотропной. В свою очередь σ_{ae} может быть выражена через холловские составляющие отдельных компонент σ_{ai} [14]:

$$\sigma_{ae} = \sigma_{a2} + (\sigma_{a1} - \sigma_{a2})\varphi_a, \tag{59}$$

где

$$\varphi_a = 1 - \left\{ \frac{\langle [\mathbf{E}^{(x)} \times \mathbf{E}^{(y)}]_z \rangle^{(2)}}{\langle E_x^{(x)} \rangle \langle E_y^{(y)} \rangle} \right\}. \tag{60}$$

Здесь $\langle \ldots \rangle^{(2)}$ — то же, что и в (48).

Подставляя в (Б.12) $\varphi^{(x)} = \operatorname{Re}\Phi(z)$, $A^{(x)} = -\operatorname{Im}\Phi(z)$, $\varphi^{(y)} = \operatorname{Re}\overline{\Phi}(z)$ с $\Phi(z)$ из (29) и $\overline{\Phi}(z)$ из (34), получим

$$\int\limits_s \left[\mathbf{E}^{(x)} \times \mathbf{E}^{(y)}\right]_z d\mathbf{r} = 2\pi\beta\overline{\beta}\frac{B_0 + \overline{B}_0}{1 - h^2}. \qquad (61)$$

Используя соотношение (61), из (60) находим

$$\varphi_a = \frac{\sigma_{xe}\sigma_{ye} - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}, \qquad (62)$$

что обобщает соответствующую изотропную формулу из [14] на случай системы со структурной анизотропией.

5. ВКЛЮЧЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Задача о мультипольных поляризуемостях эллиптического цилиндра решается в эллиптических координатах (μ, θ) [15]:

$$x = z_0 \operatorname{ch}\mu\cos\theta, \quad y = z_0 \operatorname{sh}\mu\sin\theta. \qquad (63)$$

Уравнение для границы включения задается равенством $\mu = \mu_0$, так что $z_0 \operatorname{ch}\mu_0 = a_0$ — большая и $z_0 \operatorname{sh}\mu_0 = b_0$ — малая полуоси эллипса. Отсюда

$$z_0 = \sqrt{a_0^2 - b_0^2}, \quad \mu_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{a_0 + b_0}{a_0 - b_0}. \qquad (64)$$

Матрица поляризуемостей эллипса найдена в Приложении В. Для ее элементов имеет место следующее выражение

$$\Lambda^{(x)}_{2n+1,2m+1} = \frac{2}{2m+1}\left(\frac{z_0}{2}\right)^{2n+2m+2} \times$$
$$\times \sum_{k=n-m}^{n} (2n-2k+1) C^k_{2n+1} D^{2n-2k+1}_{2n+1} C^{m-n+k}_{2m+1},$$
$$m \le n. \qquad (65)$$

Выражение для $\Lambda^{(x)}_{2n+1,2m+1}$ при $m \ge n$ отличается от (65) только тем, что суммирование по k идет от 0 до n. В (65) C_n^m — биномиальный коэффициент и

$$D^{2n-2k+1}_{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{(1-h)\operatorname{sh}2\xi}{\operatorname{ch}\xi + h\operatorname{sh}\xi}e^{\xi},$$
$$\xi = (2n-2k+1)\mu_0. \qquad (66)$$

В частности, при $k = n$ с учетом (64) имеем

$$D^1_{2n+1} = D^1_1 = \frac{a_0 b_0}{a_0 - b_0}\,\frac{1-h}{a_0 + hb_0}, \qquad (67)$$

так что

$$\Lambda^{(x)}_{11} = \frac{a_0 + b_0}{2}\,\frac{(1-h)a_0 b_0}{a_0 + hb_0}. \qquad (68)$$

Величины $\Lambda^{(y)}_{2n+1,2m+1}$ могут быть найдены по известным $\Lambda^{(x)}_{2n+1,2m+1}$ с помощью соотношения (14), записанного в виде

$$\Lambda^{(y)}_{2n+1,2m+1} = -\tilde{\Lambda}^{(x)}_{2n+1,2m+1}, \qquad (69)$$

где значок «тильда» означает замену $h \to 1/h$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для вычисления величины, входящей в выражение для термоэдс,

$$\int\limits_s \mathbf{E}\cdot\mathbf{G}\,d\mathbf{r},$$

где интегрирование проводится по площади включения s, рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_{r\le\rho} (\sigma_1 \mathbf{qE} - \kappa_1 \mathbf{jG})\,d\mathbf{r}, \qquad (\text{A}.1)$$

взятый по площади круга радиуса ρ ($R < \rho < a$). Заметим, что подынтегральное выражение в (А.1) отлично от нуля только внутри включения, так что

$$J = (\sigma_1\kappa_2 - \sigma_2\kappa_1)\int\limits_s \mathbf{E}\cdot\mathbf{G}\,d\mathbf{r}. \qquad (\text{A}.2)$$

С другой стороны, в силу уравнений $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{q} = 0$ имеем

$$\sigma_1\mathbf{qE} - \kappa_1\mathbf{jG} = -\nabla(\sigma_1\varphi\mathbf{q} - \kappa_1 T\mathbf{j}), \qquad (\text{A}.3)$$

где положено $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\mathbf{G} = -\nabla T$. С учетом (А.3) интеграл в (А.1) может быть преобразован в «поверхностный», взятый по окружности радиуса ρ, целиком лежащей вне включения. В результате из (А.1) следует

$$J = \sigma_1\kappa_1\int\limits_0^{2\pi}\left(\varphi\frac{\partial T}{\partial r} - T\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\bigg|_{r=\rho}\rho\,d\theta. \qquad (\text{A}.4)$$

Приравнивая (А.2) и (А.4), находим

$$\int\limits_s \mathbf{E}\cdot\mathbf{G}\,d\mathbf{r} = \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{-1} \times$$
$$\times \int\limits_0^{2\pi}\left(\varphi\frac{\partial T}{\partial r} - T\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\bigg|_{r=\rho}\rho\,d\theta. \qquad (\text{A}.5)$$

Для уединенного включения с помощью асимптотики (3) для потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ (и аналогичной асимптотики для $T(\mathbf{r})$) из (А.5) в пределе $\rho \to \infty$ получим

$$\int\limits_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{G} d\mathbf{r} = 4\pi \frac{\overline{\overline{\Lambda}}^{(x)} - \Lambda^{(x)}}{\overline{\overline{h}} - h} E_0^2, \tag{А.6}$$

где $h = \sigma_2/\sigma_1$, $\overline{\overline{h}} = \kappa_2/\kappa_1$ и $\overline{\overline{\Lambda}}^{(x)} = \Lambda^{(x)}(\overline{\overline{h}})$. В пределе $\overline{\overline{h}} \to h$ из (А.6) следует

$$\int\limits_s \mathbf{E}^2 d\mathbf{r} = 4\pi \frac{\partial \Lambda^{(x)}}{\partial h} E_0^2, \tag{А.7}$$

где $\Lambda^{(x)}$ — главное значение тензора дипольной поляризуемости $\hat{\Lambda}$. В случае произвольной ориентации включения вместо (А.7) имеем

$$\int\limits_s \mathbf{E}^2 d\mathbf{r} = 4\pi \left(\mathbf{E}_0 \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial h} \mathbf{E}_0 \right). \tag{А.8}$$

В трехмерном случае аналогичное рассмотрение с использованием асимптотики потенциала

$$\begin{gathered} \varphi(br) = -\mathbf{E}_0 \mathbf{r} + \frac{\mathbf{pr}}{r^3} + \ldots, \\ r \to \infty, \quad \mathbf{p} = \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0, \end{gathered} \tag{А.9}$$

также приводит (для интеграла по объему включения) к выражениям (А.7) и (А.8).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Для вычисления интеграла

$$\int\limits_s \left[\mathbf{E}^{(x)} \times \mathbf{E}^{(y)} \right]_z d\mathbf{r},$$

входящего в выражение для функции φ_a из (59), (60), рассмотрим величину

$$I = \\ = \int\limits_{r \le \rho} \left\{ \sigma_1^2 \left[\mathbf{E}^{(x)} \times \mathbf{E}^{(y)} \right]_z - \left[\mathbf{j}^{(x)} \times \mathbf{j}^{(y)} \right]_z \right\} d\mathbf{r}, \tag{Б.1}$$

где интегрирование ведется по площади круга $r \le \rho$ ($R < \rho < a$). Так как подынтегральное выражение отлично от нуля только внутри включения, то

$$I = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \int\limits_s \left[\mathbf{E}^{(x)} \times \mathbf{E}^{(y)} \right]_z d\mathbf{r}. \tag{Б.2}$$

Здесь интегрирование ведется по площади включения s.

С другой стороны, интеграл в (Б.1) может быть преобразован в «поверхностный» (контурный в рассматриваемом двумерном случае). Для этого заметим, что в силу уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ имеем равенство

$$\mathbf{E}^{(x)} \times \mathbf{E}^{(y)} = -\operatorname{rot} \left\{ \varphi^{(x)} \mathbf{E}^{(y)} \right\}, \tag{Б.3}$$

где учтено, что $\mathbf{E}^{(x)} = -\nabla \varphi^{(x)}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{\sigma_1^2} \equiv \int\limits_{r \le \rho} \left[\mathbf{E}^{(x)} \times \mathbf{E}^{(y)} \right]_z d\mathbf{r} = \\ = -\int\limits_{r \le \rho} \operatorname{rot} \left\{ \varphi^{(x)} \mathbf{E}^{(y)} \right\} \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned} \tag{Б.4}$$

где векторный элемент площади $d\mathbf{S}$ направлен вдоль оси z. По теореме Стокса интеграл по поверхности круга радиуса ρ преобразуется в интеграл по его контуру:

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{\sigma_1^2} = -\oint \left\{ \varphi^{(x)} \mathbf{E}^{(y)} \right\} \Big|_{r=\rho} \cdot d\mathbf{l} = \\ = -\int\limits_0^{2\pi} \left\{ \varphi^{(x)} E_\tau^{(y)} \right\} \Big|_{r=\rho} \rho \, d\theta. \end{aligned} \tag{Б.5}$$

Для тангенциальной составляющей напряженности $\mathbf{E}^{(y)} = -\nabla \varphi^{(y)}$ имеем

$$E_\tau^{(y)} = -r^{-1} (\partial \varphi^{(y)} / \partial \theta)$$

при $r = \rho$, так что из (Б.5) следует

$$I_1 = \sigma_1^2 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \varphi^{(x)} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(y)}}{\partial \theta} \right\} \Big|_{r=\rho} \rho \, d\theta. \tag{Б.6}$$

Далее введем векторный потенциал согласно

$$\mathbf{j} = \sigma_1 \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{Б.7}$$

где $A_x = A_y = 0$, $A_z = A$, так что

$$j_x = \sigma_1 \frac{\partial A}{\partial y}, \quad j_y = -\sigma_1 \frac{\partial A}{\partial x}. \tag{Б.8}$$

Тогда для величины

$$\left[\mathbf{j}^{(x)} \times \mathbf{j}^{(y)} \right]_z = \sigma_1 \left\{ \frac{\partial A^{(x)}}{\partial x} j_x^{(y)} + \frac{\partial A^{(x)}}{\partial y} j_y^{(y)} \right\} \tag{Б.9}$$

с учетом уравнения $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ имеем

$$\left[\mathbf{j}^{(x)} \times \mathbf{j}^{(y)} \right]_z = \sigma_1 \nabla \left\{ A^{(x)} \mathbf{j}^{(y)} \right\}. \tag{Б.10}$$

Поэтому

$$I_2 \equiv -\int\limits_{r\le\rho}\left[\mathbf{j}^{(x)}\times\mathbf{j}^{(y)}\right]_z d\mathbf{r} = -\,\sigma_1\int\limits_0^{2\pi}\left\{A^{(x)}j_N^{(y)}\right\}\Bigg|_{r=\rho}\rho\,d\theta = \sigma_1^2\int\limits_0^{2\pi}\left\{A^{(x)}\frac{\partial\varphi^{(y)}}{\partial r}\right\}\Bigg|_{r=\rho}\rho\,d\theta. \qquad (\text{Б.11})$$

Здесь j_N — нормальная (к контуру $r=\rho$) составляющая $\mathbf{j}$.

Из (Б.6) и (Б.11) находим величину $I=I_1+I_2$, сравнение которой с (Б.2) дает окончательно

$$\int\limits_s\left[\mathbf{E}^{(x)}\times\mathbf{E}^{(y)}\right]_z d\mathbf{r} = \frac{1}{1-h^2}\times \int\limits_0^{2\pi}\left\{\varphi^{(x)}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^{(y)}}{\partial\theta}+A^{(x)}\frac{\partial\varphi^{(y)}}{\partial r}\right\}\Bigg|_{r=\rho}\rho\,d\theta, \qquad (\text{Б.12})$$

где $h=\sigma_2/\sigma_1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

При решении задачи о мультипольных поляризуемостях эллиптического цилиндра удобно пользоваться комплексным представлением. При этом связь координат (63) принимает вид

$$z = x+iy = z_0\,\mathrm{ch}\,w, \quad w=\mu+i\theta \qquad (\text{В.1})$$

с z_0 из (64). Для комплексного потенциала внешнего поля имеем

$$\Phi_0(z) = z^{2n+1} = z_0^{2n+1}(\mathrm{ch}\,w)^{2n+1}. \qquad (\text{В.2})$$

Согласно [8]

$$(\mathrm{ch}\,w)^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^k\,\mathrm{ch}\left[(2n-2k+1)w\right]. \qquad (\text{В.3})$$

Поэтому комплексные потенциалы вне и внутри эллипса ищем в виде

$$\Phi^{(e)}(z) = 2\left(\frac{z_0}{2}\right)^{2n+1}\times \sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^k\left\{\mathrm{ch}\left[(2n-2k+1)w\right] + D_{2n+1}^{2n-2k+1}e^{-(2n-2k+1)w}\right\}, \qquad (\text{В.4})$$

$$\Phi^{(i)}(z) = 2\left(\frac{z_0}{2}\right)^{2n+1}\times \sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^k B_{2n+1}^{2n-2k+1}\,\mathrm{ch}\left[(2n-2k+1)w\right] \qquad (\text{В.5})$$

с вещественными коэффициентами $D_{2n+1}^{2n-2k+1}$ и $B_{2n+1}^{2n-2k+1}$. Отделяя в (В.4) и (В.5) действительные части и удовлетворяя граничным условиям

$$\varphi^{(e)}=\varphi^{(i)}, \quad \frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial\mu}=h\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial\mu}, \quad \mu=\mu_0, \qquad (\text{В.6})$$

найдем коэффициенты $D_{2n+1}^{2n-2k+1}$ (см. формулу (66)) и $B_{2n+1}^{2n-2k+1}$:

$$B_{2n+1}^{2n-2k+1} = \frac{e^{\xi}}{\mathrm{ch}\,\xi+h\,\mathrm{sh}\,\xi}, \quad \xi=(2n-2k+1)\mu_0. \qquad (\text{В.7})$$

Далее, с помощью разложения

$$\left(1-\sqrt{1-x}\,\right)^n = n\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+n}C_{2k+n}^k\left(\frac{x}{4}\right)^k \qquad (\text{В.8})$$

находим

$$e^{-(2n-2k+1)w} = \left(\frac{z-\sqrt{z^2-z_0^2}}{z_0}\right)^{2n-2k+1} = (2n-2k+1)\times \sum_{m=n-k}^{\infty}\frac{1}{2m+1}C_{2m+1}^{m-n+k}\left(\frac{z_0}{2z}\right)^{2m+1}. \qquad (\text{В.9})$$

С учетом (В.2), (В.3) и (В.9) выражение (В.4) принимает вид

$$\Phi^{(e)}(z) = z^{2n+1}+2\left(\frac{z_0}{2}\right)^{2n+1}\times \sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^kD_{2n+1}^{2n-2k+1}(2n-2k+1)\times \sum_{m=n-k}^{\infty}\frac{1}{2m+1}C_{2m+1}^{m-n+k}\left(\frac{z_0}{2z}\right)^{2m+1}. \qquad (\text{В.10})$$

После замены в (В.10) порядка суммирования и сравнения с общей формулой (10) получим выражения (65), (66) для $\Lambda_{2n+1,2m+1}^{(x)}$.

Четно-четные мультипольные поляризуемости $\Lambda_{2n,2m}^{(x)}$ ищутся аналогичным образом. В результате

$$\Lambda_{2n,2m}^{(x)} = \frac{2}{m}\left(\frac{z_0}{2}\right)^{2n+2m}\sum_{k=n-m}^{n-1}(n-k)C_{2n}^kD_{2n}^{2n-2k}\times C_{2m}^{m-n+k}, \quad 1\le m\le n, \qquad (\text{В.11})$$

где

$$D_{2n}^{2n-2k} = \frac{1}{2}\frac{(1-h)\operatorname{sh}2\xi}{\operatorname{ch}\xi + h\operatorname{sh}\xi}e^{\xi},$$
$$\xi = 2(n-k)\mu_0. \tag{B.12}$$

Выражение для $\Lambda_{2n,2m}^{(x)}$ при $m \geq n$ отличается от (B.11) только тем, что суммирование по k идет от 0 до $n-1$. Поляризуемости $\Lambda_{2n,2m}^{(y)}$ находятся из формул типа (69).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*, Наукова думка, Киев (1986).
2. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **79**, 1561 (1980).
3. Б. Я. Балагуров, ЖТФ **53**, 428 (1983).
4. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **117**, 978 (2000).
5. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖТФ **71**, 106 (2001).
6. Lord Rayleigh, Phil. Mag. **34**, 481 (1892).
7. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979).
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
9. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
10. Б. Я. Балагуров, ЖТФ **52**, 850 (1982).
11. J. B. Keller, J. Math. Phys. **5**, 548 (1964).
12. Б. Я. Балагуров, ФТП **21**, 1978 (1987).
13. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **85**, 568 (1983).
14. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **93**, 1888 (1987).
15. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. 2, ИЛ, Москва (I960).