

ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ С НАКАЧКОЙ

А. А. Заболотский*

*Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 5 марта 2001 г.

Развита теория возмущений для систем эволюционных уравнений, близких к системам, интегрируемым в рамках метода обратной задачи рассеяния со спектральным параметром, зависящим от переменных. Эта теория используется для исследования особенностей эволюции солитонных импульсов света в двухуровневой среде с накачкой верхнего уровня с учетом линейных и нелинейных потерь и дисперсии. Численно исследованы разные режимы эволюции солитона в такой системе, в том числе хаотический. Показано, что при наличии неоднородного уширения и зависимости скоростей накачки верхнего уровня и потери инверсной заселенности от расстройки возникают аномалии в зависимости параметров солитона от длины лазерной среды. Также изучен вклад радиационной части решения с учетом возмущений и показано, что существует область значений параметров, в которой этим вкладом можно пренебречь.

PACS: 41.20.Jb, 42.65.Tg

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучению динамики солитонов в нелинейной оптике, в том числе и в рамках полностью интегрируемых моделей, посвящено значительное число работ (см., например, [1] и обзор [2]). Применение интегрируемых моделей, как правило, требует наложения ряда физических ограничений, однако на практике в рамках этих моделей удается наиболее детально описать эволюцию ультракоротких импульсов в нелинейных средах. Если эволюционные уравнения отличаются от интегрируемых малыми членами, то их учет может быть проведен в рамках теории возмущений, развитой для почти интегрируемых систем [3, 4], см. также обзор [5]. Эта теория возмущений построена для систем, близких к интегрируемым, в рамках аппарата обратной задачи рассеяния (МОЗР) [1] со спектральным параметром, не зависящим от переменных. В то же время каждому интегрируемому уравнению с постоянными коэффициентами, к которому применима схема метода обратной задачи, соответствует целый класс уравнений с переменными коэффициентами. Эти уравнения интегрируются в рамках МОЗР с переменным спек-

тральным параметром и называются «деформациями» исходного уравнения или «деформированными» интегрируемыми моделями [6]. Детальное описание таких моделей и метода их точного решения дано в работе Бурцева, Захарова и Михайлова [6]. К этому классу деформированных интегрируемых моделей относится ряд физически важных моделей, некоторые из которых могут применяться в нелинейной оптике [7, 8].

В настоящей работе аппарат теории возмущений, развитый в [3, 4] для систем уравнений, близких к интегрируемым, в рамках МОЗР со спектральным параметром, не зависящим от переменных, обобщается на случай систем, близких к деформированным интегрируемым моделям. Это обобщение позволяет аналитически исследовать сильно нелинейную стадию эволюции полей для новых областей значений физических параметров.

Система эволюционных уравнений Максвелла–Блоха с внешней накачкой используется для моделирования процессов в газовых средах, твердых телах и красителях [9, 10]. В таких лазерных средах часто используются трех- и четырехуровневые схемы накачки, которые при выполнении ряда условий могут быть сведены к системе уравнений Максвелла–Блоха для двухуровневой среды с

*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

дополнительным членом в уравнении динамики разности заселенностей уровней, который описывает скорость накачки (см. книгу [9, уравнения (9.106)]).

Ранее аппарат МОЗР применялся для изучения характеристик двухуровневого лазерного усилителя [11] в работе [12]. В рамках этого метода для начально-краевых условий, отвечающих усилению малого затравочного импульса или флуктуаций среды в длинном лазерном усилителе, показано, что (квази)радиационная асимптотика поля полностью определяется непрерывным действительным спектром задачи Захарова–Шабата [12]. В лазерном усилителе отсутствует внешняя накачка и предполагается, что система первоначально находится в инвертированном состоянии. Усиление флуктуаций среды или малого затравочного импульса поля происходит за счет конверсии энергии, запасенной в среде в начальный момент, в энергию светового поля. Отметим формальную аналогию модели с моделью Чу–Скотта для комбинационного рассеяния [13]. В рамках этой модели в работе [14] показано, что для длинной нелинейной среды начальные условия, отвечающие частичной начальной инверсии, также приводят к квазирadiационной, несолитонной асимптотике.

В то же время схема двухуровневого лазерного перехода с внешней накачкой [9] значительно чаще применяется в нелинейной оптике для описания генерации в лазерах. В связи с этим аналитическое исследование качественно новых черт нелинейных режимов эволюции импульсов в таких моделях представляет практический интерес.

Интегрируемость модели двухуровневого лазера с постоянной накачкой уровней в рамках МОЗР с переменным спектральным параметром доказана в работах [6, 8]. Под действием накачки происходит заселение верхнего уровня среды, и в случае возникновения инверсной заселенности начинается лазерная генерация. Для малых затравочных импульсов лазерная генерация асимптотически описывается (квази)радиационным решением, ассоциированным с непрерывным действительным спектром задачи Захарова–Шабата, так же, как и в случае длинного лазерного усилителя [12]. Результаты аналитического [15–17] и численного [18] анализов показали, что это решение состоит из нелинейных осцилляций с монотонно растущей с расстоянием z амплитудой. Однако усредненное по осцилляциям значение амплитуды поля, в отличие от случая лазерного усилителя, не стремится к нулю, а растет пропорционально \sqrt{z} .

Двухуровневая лазерная среда с накачкой может

быть также использована для усиления солитонных импульсов с несущей частотой, близкой к частоте перехода. Динамика солитонного импульса, который ассоциируется с изолированным собственным значением задачи Захарова–Шабата с положительной мнимой частью, существенно отличается от поведения радиационного решения. Частные солитонные решения интегрируемой системы уравнений Максвелла–Блоха с накачкой получены в [6–8, 15–19] для скорости накачки, не зависящей от z и частотной расстройки.

В настоящей работе развитый аппарат теории возмущений применяется для исследования солитонной динамики в рамках модели, близкой к деформированной интегрируемой системе уравнений Максвелла–Блоха с накачкой. По сравнению с работами [6–8, 15–19] здесь дополнительно учтены неоднородное уширение и зависимость скорости накачки и потерь инверсной заселенности от координаты и частотной расстройки. Учет этой зависимости необходим при наличии неоднородного уширения лазерного перехода, которое может быть связано с движением атомов, взаимодействием атома с окружением, неоднородностью электрического или магнитного полей. Это формально простое обобщение приводит к ряду качественно новых физических свойств усиливающей среды. Дополнительный учет в рамках развитого в этой работе аппарата теории возмущений квадратичной дисперсии, линейных и нелинейных потерь и вынуждающей силы приводит к ряду новых особенностей в зависимости параметров солитона от длины лазерной среды.

В теории возмущений, описывающей нелинейную динамику изолированных импульсов, в качестве нелинейных мод используются «робастные» солитонные решения невозмущенной интегрируемой системы уравнений с параметрами, не зависящими от переменных [5]. В настоящей работе в качестве таких нелинейных мод берутся точные «деформируемые» солитонные решения с переменными параметрами. Учет возмущений в рамках развитой теории возмущений приводит к системам уравнений, включающим вклад этих деформаций и возмущений. Численный и аналитический анализ полученных уравнений позволил найти ряд особенностей усиления солитонов в такой системе, которое может сопровождаться скачкообразным переключением режимов усиления, возникновением бифуркаций и хаотизацией.

На динамику солитона оказывает влияние радиационное решение, вкладом которого в усиливающей среде пренебрегать нельзя. В работе прово-

дится сравнение амплитуды солитона, найденной с помощью решения уравнений теории возмущений, и численного квазиавтомодельного решения исходной системы эволюционных уравнений с учетом слабых возмущений. Влияние возмущений на динамику солитона и на радиационное решение качественно различно. Это позволяет обнаружить область параметров, в которой амплитуда нелинейных осцилляций радиационного решения много меньше амплитуды солитона, вследствие чего вкладом радиационного решения можно пренебречь.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 приводятся уравнения теории возмущений для модели, близкой к интегрируемой, в рамках аппарата МОЗР с помощью спектральной задачи Захарова–Шабата с переменным спектральным параметром. Модель двухуровневого лазера с накачкой, зависящей от частоты, и ее вывод описаны в разд. 3. Далее в разд. 4 найдены режимы распространения солитона для разных условий накачки и возмущений. В следующем разделе численно изучается роль накачки, в том числе периодически модулированной, в возникновении хаотической динамики. Последний раздел посвящен изучению вклада радиационной части решения в общее решение модели для разных типов возмущений.

2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К ДЕФОРМИРОВАННЫМ ИНТЕГРИРУЕМЫМ МОДЕЛЯМ

Теория возмущений для нелинейных систем уравнений, близких к интегрируемым, с помощью спектральной задачи Захарова–Шабата построена в работах Каупа [3], Карпмана и Маслова [4]. Проведем обобщение результатов этих авторов на случай деформированных интегрируемых моделей.

Пусть точно интегрируемая система уравнений может быть представлена в виде условия совместности следующих линейных систем уравнений:

$$\Phi_z = U\Phi, \quad \Phi_\tau = V\Phi. \tag{1}$$

Здесь U, V и Φ — матричные функции от τ, z и спектрального параметра λ . В общем случае функции U и V , зависящие рационально от λ , имеют вид

$$U(z, \tau; \lambda) = u_0 + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{u_n(\tau, z)}{\lambda - \lambda_n},$$

$$V(z, \tau; \lambda) = v_0 + \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n(\tau, z)}{\lambda - \mu_n}, \tag{2}$$

где простые полюсы λ_n и μ_m не совпадают. Условие совместности имеет вид

$$U_z - V_\tau + [U, V] = 0. \tag{3}$$

Зависимость спектрального параметра от переменных в общем виде определяется следующими уравнениями:

$$D_z \lambda \equiv [\partial_z - F(\lambda)] \lambda = 0,$$

$$D_\tau \lambda \equiv [\partial_\tau - G(\lambda)] \lambda = 0. \tag{4}$$

С учетом этих выражений условие совместности (3) может быть формально переписано без явной зависимости λ от z, τ в виде

$$D_z U - D_\tau V + [U, V] + [D_z, D_\tau] = 0. \tag{5}$$

Точная интегрируемость требует обращения в нуль последнего коммутатора в левой части (5), т. е.

$$F_\tau - GF_\lambda = G_z - FG_\lambda. \tag{6}$$

Пусть функции F, G имеют вид

$$F = - \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{\lambda - \lambda_m}, \quad G = - \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{\lambda - \mu_m}. \tag{7}$$

Тогда эволюционные уравнения, удовлетворяющие условиям (5), (6), калибровочным преобразованием могут быть приведены к виду [6]

$$\partial_z u_0 - \partial_\tau v_0 + [u_0, v_0] = 0,$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial z} + \left[u_n, \sum_{k=1}^{N_2} \frac{v_k}{\lambda_n - \mu_k} \right] = \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m u_n + c_n v_m}{(\lambda_n - \mu_m)^2}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial \tau} + \left[v_n, \sum_{k=1}^{N_1} \frac{u_k}{\mu_n - \lambda_k} \right] = \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m v_n + b_n u_m}{(\lambda_m - \mu_n)^2}.$$

В рамках теории возмущений, предложенной ниже, в первом приближении по малому параметру ϵ достаточно потребовать

$$[D_z, D_\tau] \sim O(\epsilon^2). \tag{9}$$

Последнее условие выполняется, например, если F и G малы и являются медленными функциями от одной из переменных:

$$F = \epsilon \mathcal{F}(\epsilon \tau, z; \lambda), \quad G = \epsilon \mathcal{G}(\tau, \epsilon z; \lambda) \tag{10}$$

или

$$G \frac{\partial}{\partial \lambda} F \lesssim O(\epsilon^2), \quad \frac{\partial}{\partial \tau} F \lesssim O(\epsilon^2),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} G \lesssim O(\epsilon^2), \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} G \lesssim O(\epsilon^2). \tag{11}$$

Для системы уравнений (8) условия (10) означают

$$\begin{aligned} c_n &= \epsilon C_n(\epsilon\tau, z), & b_n &= \epsilon B_n(\tau, \epsilon z), \\ \lambda_m &= \lambda_m(\epsilon\tau, z), & \mu_m &= \mu(\tau, \epsilon z), \end{aligned} \quad (12)$$

т. е. правые части второго и третьего уравнений в (8) имеют порядок $O(\epsilon)$. Условия (11) выполняются при

$$b_n \lesssim O(\epsilon^2), \quad \frac{\partial}{\partial z} b_n \lesssim O(\epsilon^2), \quad (13)$$

при этом функции c_n , λ_m , μ_m и их производные могут быть $\gtrsim O(1)$.

Пусть эволюционное уравнение имеет вид

$$u_z = \mathcal{N}[u] + \epsilon P[u]. \quad (14)$$

Предполагаем, что это уравнение точно интегрируемо в рамках МОЗР в отсутствие малого возмущения $\epsilon P[u]$, $\epsilon \ll 1$. С учетом возмущения условие совместности (5) принимает вид

$$D_\tau U - D_z V + [U, V] = [D_\tau, D_z] + \epsilon \hat{P}[u], \quad (15)$$

где \hat{P} — некоторый оператор, конкретный вид которого зависит от вида уравнения и возмущения.

В случае спектральной проблемы Захарова–Шабата [1] уравнения теории возмущений для системы уравнений, близкой к деформированной интегрируемой модели, могут быть получены обобщением известных уравнений работы [4]. В этом случае потенциалом является $u(\tau, 0)$ (см. уравнение (14)).

Отметим, что в настоящей работе, по сравнению с аналогичными уравнениями в [4], пространственная (z) и временная (τ) переменные переставлены. Это обусловлено спецификой физических примеров, рассматриваемых в настоящей работе.

Считаем, что эволюция данных рассеяния \mathcal{S} описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{S} = \Omega(\lambda) \mathcal{S} + \mathcal{F}(\tau, z; \lambda). \quad (16)$$

Здесь $\Omega(\lambda)$ — аналог дисперсионного соотношения. В (16), в отличие от аналогичного выражения, приведенного в [4], добавлен член \mathcal{F} . Для спектральных данных, соответствующих непрерывному и дискретному спектрам задачи $\Phi_z = U\Phi$, имеем $\mathcal{F} \equiv F$. Для других спектральных данных $\mathcal{F} \equiv 0$. Повторяя вывод работы [4], с учетом этого члена приходим к следующей системе уравнений для эволюции данных

рассеяния в первом порядке по малому параметру ϵ , характеризующему возмущение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(\lambda, z)}{\partial z} &= \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau P[u] \psi^{(1)}(\tau, \lambda) \varphi^{(2)}(\tau, \lambda) + \\ &+ \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau P^*[u] \psi^{(2)}(\tau, \lambda) \varphi^{(1)}(\tau, \lambda), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b(\lambda, z)}{\partial z} &= 2i\Omega(\lambda) + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau P[u] \psi^{(2)*}(\tau, \lambda) \varphi^{(1)}(\tau, \lambda) - \\ &- \epsilon^* \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau P^*[u] \psi^{(1)*}(\tau, \lambda) \varphi^{(2)}(\tau, \lambda), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_n(\lambda_n, z)}{\partial z} &= 2i\Omega(\lambda_n) + \frac{b_n}{a'(\lambda_n)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \times \\ &\times \left\{ \epsilon P[u] Q^{(1)}(\tau, \lambda_n) + \epsilon^* P^*[u] Q^{(2)}(\tau, \lambda_n) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Q^{(m)}(\tau, \lambda_n) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\psi^{(m)}(\tau, \lambda) \varphi^{(m)}(\tau, \lambda) - \right. \\ &\left. - \psi^{(m)}(\tau, \lambda) \varphi^{(m)}(\tau, \lambda) \right] \Bigg|_{\lambda=\lambda_n}, \quad m = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_n(z, \tau)}{\partial z} &= F(z, \tau; \lambda_n) - \frac{1}{a'(\lambda_n)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \epsilon P[u] \psi^{(1)}(\tau, \lambda_n) \varphi^{(2)}(\tau, \lambda_n) + \right. \\ &\left. + \epsilon^* P^*[u] \psi^{(2)}(\tau, \lambda_n) \varphi^{(1)}(\tau, \lambda_n) \right\} = \\ &= F(z, \tau; \lambda_n) - Q(z, \tau; \lambda_n). \end{aligned} \quad (20)$$

Звезда означает комплексное сопряжение. Отметим, что уравнения (18), (19) выведены в [3, 4] для тривиальных граничных условий ($z = 0, \infty$), отвечающих эволюции импульсов на фоне устойчивого состояния.

Систему уравнений (17)–(20) в случае зависимости λ от τ следует дополнить уравнением

$$\frac{\partial \lambda_n(z, \tau)}{\partial \tau} = G(z, \tau; \lambda_n). \quad (21)$$

Это уравнение является следствием «деформированности» невозмущенной модели и не изменяется в первом порядке теории возмущений.

При выводе системы уравнений (17)–(20) использовались стандартные предположения о применимости теории возмущений [4]. По сравнению с известными уравнениями [4] в правую часть уравнения (20) добавлен член $F(\lambda_n)$ и добавлено уравнение (21). Напомним, что уравнение (20) без второго члена в правой части и уравнение (21) описывают зависимость спектрального параметра от переменных вне рамок теории возмущений.

Система (17)–(19) должна быть в общем случае дополнена уравнениями

$$\partial_z \lambda = F(z, \tau; \lambda), \quad \partial_\tau \lambda = G(z, \tau; \lambda), \quad (22)$$

где λ принадлежит непрерывному действительному спектру задачи $\Phi_z = U\Phi$. В настоящей работе изучается динамика дискретного солитонного спектра без учета вклада непрерывного спектра, т. е. последняя пара уравнений не учитывается. Ниже в разд. 5 анализируется вклад непрерывного действительного спектра и найдены условия, когда им можно пренебречь.

В случае, если в силу уравнения (21) λ_n зависят от переменной τ , эту зависимость необходимо учитывать при нахождении функций $\psi^{(k)}(\tau; \lambda_n)$, $\varphi^{(k)}(\tau; \lambda_n)$, которые входят в правые части уравнений (17)–(20). В этом состоит одно из основных отличий теории возмущений для систем, близких к деформированным интегрируемым моделям, от известной [4].

В связи с тем, что в общем случае λ_n подчиняются двум уравнениям, (20) и (21), необходимо найти условие совместности этих уравнений. При наличии возмущения также следует учитывать зависимость λ_n от z , вызванную этим возмущением. С учетом (20), (21) приближенное условие коммутативности производных λ в первом порядке теории возмущений может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F - G \frac{\partial}{\partial \lambda} (F - Q) - \frac{\partial}{\partial z} G + (F - Q) \frac{\partial}{\partial \lambda} G \sim O(\epsilon^2). \quad (23)$$

Для $Q \sim O(\epsilon)$ условие (23) выполняется, в частности, если справедливо (11). Отметим, что при выполнении (23) и малости коммутатора $[D_z, D_\tau] \sim O(\epsilon)$ последний может быть включен в возмущение

$$\epsilon \hat{P}[u] \rightarrow \epsilon \hat{P}[u] + [D_\tau, D_z].$$

При этом выполнения условия (9) не требуется.

Соотношения, вытекающие из условия $[D_z, D_\tau] = 0$, получены в [6] для ряда точно

интегрируемых моделей. Следующие из этого условия ограничения на физические параметры моделей в большинстве случаев не реализуемы. В возмущенной задаче условие (23) включает вклад возмущения Q . В первом приближении по ϵ различие между F и Q состоит лишь в том, что Q входит с малым параметром. Этот факт позволяет использовать результаты, полученные в рамках точной теории, развитой для систем с переменным спектральным параметром, в теории возмущений и наоборот. Из (23) следует, например, что в некоторых случаях это условие может быть приближенно выполнено при специальном выборе формы возмущения и условий на функции $F(z, \tau; \lambda)$, $G(z, \tau; \lambda)$, $Q(z; \lambda)$.

3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА–БЛОХА ДЛЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЫ С НАКАЧКОЙ

Применим построенную теорию возмущений для описания динамики солитонного решения системы уравнений Максвелла–Блоха двухуровневой среды с накачкой верхнего уровня. К этой системе уравнений сводятся некоторые идеализированные трех- и четырехуровневые модели лазерной генерации в газовых, ионных и других лазерах [9].

Предполагаем, что схема лазерной накачки представляет собой четырехуровневую среду с уровнями 0, 1, 2, 3 (см. рис. 1) и с соответствующими энергиями W_i , такими что

$$W_3 > W_1 > W_2 > W_0.$$

Существует некоторый механизм накачки, при ко-

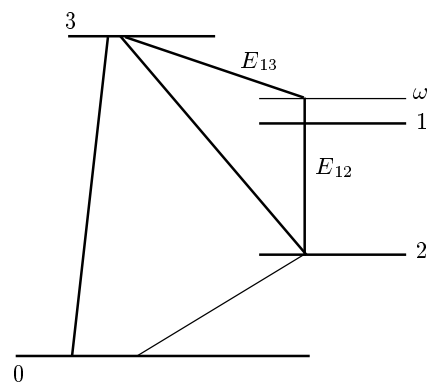


Рис. 1. Схема четырехуровневого лазера. E_{12} — амплитуда поля на лазерном переходе $1 \leftrightarrow 2$, ω — частота. Горизонтальные линии — уровни энергии. Наклонные линии показывают возможные переходы между уровнями

тором происходит перенос электронов с основного уровня 0 на уровень 3 с энергией W_3 и его заселение.

Вследствие быстрого переноса электронов с уровня 3 на лежащий ниже уровень 1 происходит рост разности заселенностей уровня 1 и уровня 2, имеющего меньшую энергию, причем полагаем, что уровень 2 расположен выше основного состояния 0 и не заселен в начальный момент. Считаем, что разность энергий $W_1 - W_0$ много больше $k_B T_k$ (k_B — постоянная Больцмана, T_k — температура). Это условие позволяет пренебречь тепловым механизмом заселения уровня 2. Инверсная заселенность поддерживается при быстром переносе электронов с уровня 2 на основной уровень 0. В такой системе можно получить инверсию заселенностей уровней 1 и 2 и генерацию поля с амплитудой E_{12} на этом переходе с частотой $\omega_{12} = (W_1 - W_2)/\hbar$.

Для описания генерации ультракоротких импульсов во многих работах используется система уравнений Максвелла–Блоха для двухуровневой среды, например, для описания самоиндуцированной прозрачности [9]. Вклад накачки учитывается добавлением в уравнение, описывающее динамику разности заселенностей уровней 1 и 2, члена, пропорционального разности скоростей накачки уровней 1 и 2. Накачка последнего может осуществляться переносом электронов между уровнями 3 и 2, см. рис. 1. Запрет по четности для этого перехода может быть снят из-за взаимодействия с окружением в твердой матрице или вследствие каскадного перехода через промежуточный уровень. Этот переход приводит к уменьшению инверсной заселенности, так же, как и перенос электронов с уровня 0 на уровень 2 и с уровня 1 на уровень i , имеющий энергию $W_i < W_1$. Если времена релаксации на этих переходах много меньше характерных длительностей импульсов, то вклад этих переходов также может быть учтен в рамках рассматриваемой ниже модели. В трехуровневой схеме нижний лазерный уровень 2 совпадает с основным уровнем [9]. В рамках решаемой ниже идеализированной модели отличие этих лазерных схем состоит лишь в начальных условиях для разности заселенностей уровней лазерного перехода $1 \leftrightarrow 2$.

Систему уравнений Максвелла–Блоха в приближении медленной огибающей можно представить в виде

$$\begin{aligned} \partial_z E(z, \tau) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z; \omega) R_+(z, \tau; \omega) d\omega + \epsilon P(z, \tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau R_+ &= 2R_3 E(z, \tau) - \gamma_2 R_+ + 2i\omega R_+, \\ \partial_\tau R_3 &= - [R_+^* E(z, \tau) + R_+ E^*(z, \tau)] + \\ &+ \tilde{h}(z; \omega) - \gamma_1 R_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $E = (2d/\hbar)E_{12}$, E_{12} — амплитуда электрического поля на лазерном переходе,

$$z = \frac{1}{2} \kappa_0 \int_0^x N_0(s) ds, \quad \tau = t - \frac{x}{c}, \quad \kappa_0 = \frac{2\pi\omega_{12}\mu_{12}^2}{\hbar c},$$

$$R_3(z, \tau; \omega) = \frac{N_3(z, \tau; \omega)}{N_0(z)},$$

$$R_+(z, \tau; \omega) = \frac{R(z, \tau; \omega)}{N_0(z)}, \quad R_- = R_+^*,$$

N_0, N_3, R — соответственно, плотность активных атомов, разность заселенностей уровней и поляризуемость перехода двухуровневой среды, ω_{12} — частота перехода, μ_{12} — дипольный момент, x, t — пространственная и временная переменные, ϵP — возмущение с малым параметром ϵ , $\gamma_{1,2} = 1/T_{1,2}$ — константы релаксации, $g(z; \omega)$ — функция, описывающая неоднородное уширение, т. е. распределение атомов по частотному сдвигу ω относительно частоты перехода, $\tilde{h}(z; \omega)$ — скорость накачки, если $\tilde{h} > 0$, или скорость потери инверсной заселенности, если $\tilde{h} < 0$.

Предполагаем, что $E(0, \tau) = 0$ для $\tau \rightarrow \pm\infty$ и $R_+(z, 0) = 0, R_3(z, 0) = -n_0 < 0$ для всех z , т. е. поле на бесконечностях отсутствует и в момент $\tau = 0$ среда находится в основном состоянии: $n_0 = 1$ для трехуровневой лазерной схемы и $n_0 = 0$ для четырехуровневой схемы.

Система (24) в отсутствие возмущения ($\epsilon P = 0$) и для характерных времен, много меньших $T_{1,2}$ ($\gamma_{1,2} = 0$), представима в виде условия совместности (3) следующих линейных систем [8]:

$$\partial_\tau \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda & E \\ -E^* & i\lambda \end{pmatrix} \Phi = U\Phi, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \partial_z \Phi &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\lambda - \omega} \times \\ &\times \begin{pmatrix} R_3 & -R_+ \\ -R_- & -R_3 \end{pmatrix} (z, \tau, \omega) d\omega \Phi = V\Phi. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь λ — спектральный параметр, $\Phi(z, t, \lambda)$ — двухкомпонентная функция. Дополнительное условие определяет зависимость спектрального параметра от переменной z . Эта зависимость, найденная в [6, 16] в виде

$$\partial_z \lambda = \text{const}/\lambda,$$

отвечает накачке с частотой, точно совпадающей с частотой перехода (без учета неоднородного уширения перехода) для $\tilde{h}(z; \omega) \equiv \text{const}$. В работе [8] аппарат МОЗР развивался для модели Максвелла–Блоха для среды с накачкой с учетом неоднородного уширения. В настоящей работе предлагается следующее новое обобщение этой зависимости:

$$\frac{\partial}{\partial z} \lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(z, \nu) g(z, \nu) d\nu}{\nu - \lambda} \equiv F(z; \lambda), \quad (27)$$

здесь $g(z; \nu)$, $h(z; \nu) = \tilde{h}(z; \nu)/2$ — в общем случае произвольные действительные функции. Зависимость $h(z; \nu)$ от частотной расстройки ν может быть связана с физической природой накачки и структурой атомной системы и появляется, например, из-за разных скоростей релаксации атомных переходов, спектральной зависимости механизмов переноса электронов, зависимости сечения поглощения от частоты, влияния движения атомов и атомных столкновений и неоднородности поля накачки.

На простом качественном примере покажем, как накачка может зависеть от частоты. Рассмотрим четырехуровневую лазерную схему, изображенную на рис. 1. Пусть возможны следующие дипольные переходы между уровнями: $3 \leftrightarrow 1$ и $1 \leftrightarrow 2$. Динамика заселенности ρ_{11} уровня 1 и поляризации ρ_{13} перехода $1 \leftrightarrow 3$ описываются следующими уравнениями из системы уравнений Блоха:

$$\partial_{\tau} \rho_{11} = \frac{2i\mu_{12}}{\hbar} \rho_{12} E_{12}^* + \frac{2i\mu_{13}}{\hbar} \rho_{13} E_{13}^* + \text{с.с.}, \quad (28)$$

$$\partial_{\tau} \rho_{13} + (i\omega + \gamma_{13}) \rho_{13} = \frac{2i\mu_{13}}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{33}) E_{13}. \quad (29)$$

Здесь ρ_{ij} — элементы матрицы плотности многоуровневой системы, μ_{ij} — дипольные моменты переходов, ω — частотная расстройка, $E_{12}(z, \tau)$ — амплитуда поля на лазерном переходе и $E_{13}(z)$ — постоянное заданное поле, осуществляющее перенос электронов с уровня 3 на уровень 1. Уровень 3 постоянно заселяется электронами с основного уровня 0. В ионном лазере, например, этот процесс может быть вызван сильным током, проходящим через газ. Полагаем, что время релаксации γ_{13}^{-1} на переходе $1 \leftrightarrow 3$ много меньше характерных времен генерируемых импульсов и $\rho_{33}(z, 0) \gg \rho_{11}(z, \tau) \forall z, \tau$. Тогда из системы (28), (29) получаем

$$\partial_{\tau} \rho_{11} = \frac{2i\mu_{12}}{\hbar} \rho_{12} E_{12}^* - \frac{2i\mu_{12}^*}{\hbar} \rho_{12}^* E_{12} + |\mu_{13} E_{13}(z)|^2 \frac{8\rho_{33}(z, 0)\gamma_{13}}{\hbar^2 (\gamma_{13}^2 + \omega^2)}. \quad (30)$$

Последний член в правой части (30) представляет собой скорость накачки $\tilde{h}(z, \omega)$. Аналогичное выражение, но с противоположным знаком, отвечающее скорости потери инверсной заселенности, возникает, если возможен переход $3 \leftrightarrow 2$ и (или) переход с уровня 1 на промежуточный уровень i с энергией W_i , такой что $W_2 < W_i < W_1$, и с малыми временами релаксации.

В присутствии неоднородного уширения зависимость накачки от расстройки ω может приводить к особенностям и аномалиям в зависимости параметров солитонов, распространяющихся в двухуровневой среде с накачкой. Исследование таких особенностей в рамках модели, близкой к деформированной интегрируемой системе уравнений Максвелла–Блоха, является основной целью остальной части работы.

4. ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ С НАКАЧКОЙ

Для рассматриваемого примера функция $G(z, \tau; \lambda) \equiv 0$ при $\gamma_{1,2} = 0$. В этом случае F — произвольная функция z и λ , а $Q = Q(z, \lambda) \sim O(\epsilon)$.

Пусть частотное распределение, описывающее неоднородное уширение, имеет лоренцеву форму и нормировано на единицу:

$$g(z; \omega) = \frac{\Gamma_0}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + \Gamma_0^2}, \quad (31)$$

а $h(z; \omega) \equiv h_1(z)$. Решение уравнения (27), отвечающего изолированному значению спектрального параметра $\lambda = i\eta + \xi$, имеет вид

$$\eta(z) = \left\{ \frac{y_0 - \xi_0 + H}{2} + \frac{[(y_0 - \xi_0 + H)^2 + 4\xi_0^2 y_0]^{1/2}}{2} \right\}^{1/2} - \Gamma_0, \quad (32)$$

$$\xi(z) = \xi_0 \frac{\eta(0) + \Gamma_0}{\eta(z) + \Gamma_0}.$$

Здесь

$$y_0 = [\eta(0) + \Gamma_0]^2, \quad H(z) = 2 \int_0^z h_1(z) dz > 0,$$

$$\xi_0 = \xi(0).$$

Знаки выбраны с учетом действительности и положительности η .

Для $\xi(0) = 0$, $h_1(z) \equiv h = \text{const}$ решение (32) упрощается и солитонное решение невозмущенной модели (24) ($P = \gamma_{1,2} = 0$) имеет следующий вид:

$$E_s(z, \tau) = \frac{2\eta(z)}{\text{ch}[2(\eta(z) - \Gamma_0)(\tau - 1/h) + 2\eta_0/h]}. \quad (33)$$

Решение (33) описывает монотонный рост амплитуды солитона с ростом величины $hz > 0$, которая стремится к бесконечности при $z \rightarrow \infty$. При этом длительность солитона стремится к нулю, а групповая скорость солитона стремится к скорости света.

При учете малых возмущений динамика усиления может качественно измениться. В частности, может возникнуть стационарная или затухающая асимптотика для $\eta(z)$, и появится качественная зависимость параметров солитона от спектральных характеристик накачки и потерь. Эти особенности могут быть описаны в рамках теории возмущений, развитой в работе.

Пусть в среду в точке $z = 0$ инжектируется солитон, ассоциированный со спектральным параметром $\lambda_0 = \xi(0) + i\eta(0)$ и имеющий в точке $z = 0$ форму

$$E_0(\tau) = \frac{2\eta(0) \exp[2i\xi(0)\tau - i\phi_0]}{\text{ch}[2\eta(0)\tau]}. \quad (34)$$

Рассмотрим далее временной масштаб, на котором релаксацией можно пренебречь: $\gamma_{1,2} \rightarrow 0$. В рамках теории возмущений, развитой выше, исследуем эволюцию по z солитона (34), которая описывается системой (24) с накачкой и возмущением ϵP . Считаем, что последнее включает линейные и кубичные по амплитуде поля потери и линейную дисперсию второго порядка, т. е. имеет следующий вид:

$$\epsilon P = -\alpha_1 E + \alpha_2 E_{zz} - \alpha_3 |E|^2 E, \quad (35)$$

где α_i — действительные коэффициенты. Решения $\psi^{(m)}(\tau, \lambda_0)$, $\varphi^{(m)}(\tau, \lambda_0)$ спектральной задачи Захарова–Шабата для потенциала (34) известны (см., например, [4, 5]). Подставив эти выражения в уравнение (20), получаем после интегрирования по переменной τ следующую систему уравнений для мнимой и действительной частей спектрального параметра в первом приближении теории возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \eta &= -2\eta \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\alpha_2 \eta^2 + \frac{8}{3}\alpha_3 \eta^3 \right) - \\ &\quad - \frac{16}{3}\alpha_2 \eta \xi^2 + \frac{h_1(z)(\eta + \Gamma_0)}{(\eta + \Gamma_0)^2 + \xi^2}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \xi &= -\frac{16}{3}\eta^2 \xi + \frac{h_1(z)\xi}{(\eta + \Gamma_0)^2 + \xi^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

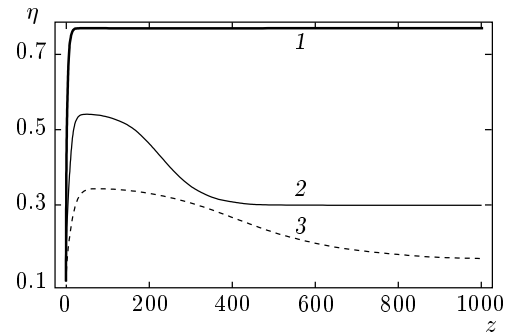


Рис. 2. Численное решение системы (36): зависимость η от длины среды z ; $\alpha_1 = 0.02$, $\alpha_2 = -0.02$, $\alpha_3 = 0.03$, $h_1(z) = 0.1$; $\Gamma_0 = 0.5$ (1), 2 (2), 5 (3)

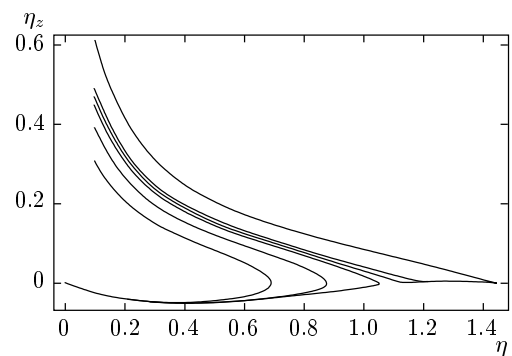


Рис. 3. Фазовый портрет: зависимость η_z от η для разных значений $\xi(0)$; $\eta(0) = 0.1$

Результаты численного решения системы уравнений (36) представлены на рис. 2.

Оказывается, что при изменении спектральной ширины (равной $2\Gamma_0$) зависимость амплитуды солитона от длины усиления может качественно изменяться. Например, для $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = 0.01$, $\alpha_3 = 0.02$, $h_1 = 0.1$ и для величины Γ_0 , лежащей в интервале 0.6–5, на этой зависимости возникает горб (см. рис. 2). Для $\Gamma_0 \gtrsim 8.7$ амплитуда солитона асимптотически стремится к нулю. Для меньших спектральных ширин амплитуда солитона с ростом z стремится к ненулевому постоянному значению. С ростом спектральной ширины эффективность усиления уменьшается. Поскольку h зависит от частоты, этот эффект обусловлен потерями и дисперсионными эффектами, включенными в возмущение P .

Асимптотика решения системы (36) зависит от граничных значений параметров $\eta(0)$, $\xi(0)$, так как система имеет в общем случае больше одного устойчивого фокуса в фазовом пространстве. Численный анализ, проведенный для $h = 0.125$, $\Gamma_0 = 0.1$,

$\alpha_2 = 0.01$, $\alpha_{1,3} = 0$ и для разных $\xi(0)$, показал наличие двух устойчивых фокусов $\eta_1 = 0$, $\eta_2 \approx 1.425$, $(\eta_{1,2})_z = 0$ (см. рис. 3). Оказалось, что в окрестности значения $\xi_c(\eta(0)) \approx -0.115$ фазовые траектории могут расходиться, т. е. при небольших вариациях граничной (при $z = 0$) отстройки солитона $\xi(0)$ в окрестности ξ_c амплитуда солитона с ростом z стремится либо к $2\eta \approx 2.85$, либо к 0. Численными методами получено, что при уменьшении начальной амплитуды солитона $\eta(0)$ происходит уменьшение критического значения $|\xi_c|$.

В реальных резонансных средах наряду с накачкой верхнего уровня возможны процессы, приводящие к потерям инверсной заселенности во время распространения солитона в среде. Эти потери могут быть вызваны столкновениями атомов в газе, переходами на более низколежащие уровни энергии и заселением нижнего уровня. В общем случае скорости накачки и потерь характеризуются разными частотными зависимостями, что связано с разными сечениями поглощения, константами релаксации и другими физическими факторами [9]. В связи с этим необходимо учитывать частотную зависимость не только скорости накачки, но и скорости потерь (ср. (30)). В рамках исследуемой системы уравнений Максвелла–Блоха потери заселенности уровня 1 эквивалентны накачке нижнего уровня лазерного перехода (см. рис. 1). Эта накачка может быть вызвана переходами с уровня 3 на уровень 2 и так же, как накачка верхнего лазерного уровня, может зависеть от частоты.

Численные результаты, представленные ниже, показывают, что учет частотной зависимости скорости накачки приводит к ряду особенностей в усилении солитонов. Например, при наличии неоднородного уширения усиление солитонов возможно и при равенстве интегральных, т. е. проинтегрированных по всему частотному спектру, скоростей накачки и потерь инверсной заселенности лазерного перехода. При некоторых условиях усиление солитона возможно на ограниченном отрезке и при превышении интегральных потерь над интегральной накачкой.

Выберем лоренцеву форму частотной зависимости скоростей накачки и потерь инверсной заселенности (ср. (30)):

$$h(z; \omega) = \frac{h_1(z)}{\pi} \frac{\Gamma_1}{\omega^2 + \Gamma_1^2} - \frac{h_2(z)}{\pi} \frac{\Gamma_2}{\omega^2 + \Gamma_2^2}. \quad (37)$$

Здесь $h_1 > 0$ отвечает накачке верхнего уровня, а $h_2 > 0$ — потере заселенности верхнего лазерного уровня 1 или заселению нижнего уровня 2.

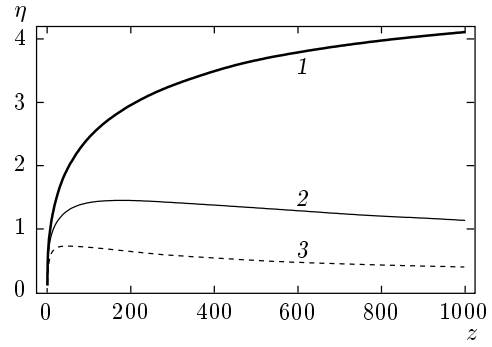


Рис. 4. Численное решение системы (38): зависимость амплитуды солитона от длины усиления без учета возмущений; $\Gamma_0 = 3.0$, $\Gamma_1 = 3.0$, $\Gamma_2 = 3.1$, $h_1 = 33$; $h_2 = 33$ (1), 35 (2), 38 (3)

Уравнения (36) для того же возмущения (35) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \eta &= -2\eta \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \alpha_2 \eta^2 + \frac{8}{3} \alpha_3 \eta^3 \right) - \frac{16}{3} \alpha_2 \eta \xi^2 - \\ &\quad - \text{Im} [\mathcal{H}_1(\eta, \xi) + \mathcal{H}_2(\eta, \xi)], \\ \frac{\partial}{\partial z} \xi &= -\frac{16}{3} \alpha_2 \eta^2 \xi - \text{Re} [\mathcal{H}_1(\eta, \xi) + \mathcal{H}_2(\eta, \xi)], \quad (38) \\ \mathcal{H}_m(\eta, \xi) &= \frac{h_m(z)}{\pi} \times \\ &\quad \times \left[\frac{i(\Gamma_0 + \Gamma_m) + i\eta + \xi}{(\Gamma_m + \Gamma_0)(i\Gamma_0 + i\eta + \xi)(i\Gamma_m + i\eta + \xi)} \right]. \end{aligned}$$

Так как скорости накачки и потерь зависят от расстройки, существенную роль играют их частотные характеристики. Численный анализ системы (38) показал, что динамика солитона качественно зависит от соотношений между величинами h_1 и h_2 и спектральными ширинами $2\Gamma_{0,1,2}$. Результаты численного решения (38), выполненные без учета возмущений ($\alpha_{1,2,3} = 0$), представлены на рис. 4 для разных коэффициентов h_1 и h_2 . При $\Gamma_2 < \Gamma_1$ и $h_1 = h_2$ амплитуда солитона обращается в нуль на расстоянии $z \sim (h_1)^{-1}$. Из рис. 4 видно, что усиление солитона возможно для $h_1 = h_2$. Более того, численный анализ (38) показал, что рост амплитуды солитонов на конечном начальном интервале возможен и для $h_1 < h_2$ при условии, что $\Gamma_1 < \Gamma_2$ и имеет место неоднородное уширение лазерного перехода.

Учет возмущения приводит к качественному изменению зависимости параметров солитона от z . При $\alpha_2 > 0$ амплитуда солитона растет на начальном этапе, а затем стремится к постоянному асимптотическому значению. Для $\Gamma_2 < \Gamma_1$ при относительно малом изменении h_1 ($|\Delta h_1| \ll h_1$) и фиксированном h_2 происходит изменение асимптотик. Для

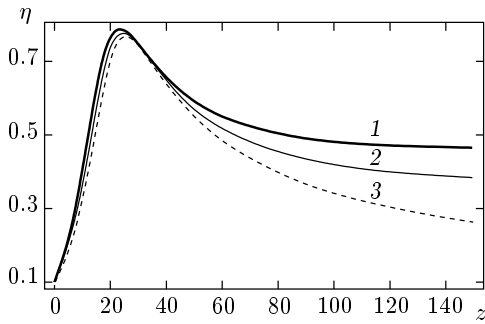


Рис. 5. То же, что на рис. 4; $\Gamma_0 = 3.0$, $\Gamma_1 = 3.0$, $\Gamma_2 = 3.1$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0.02$; $h_1 = 3.1$, $h_2 = 3.0$ (1), $h_1 = h_2 = 3.1$ (2), $h_1 = 3.0$, $h_2 = 3.1$ (3)

$h_1 > h_2$ амплитуда солитона стремится к постоянно- нулевому значению, для $h_1 < h_2$ она стремится с ростом z к нулю (см. рис. 5).

5. ХАОТИЗАЦИЯ В УСИЛИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Системы уравнений, включающие уравнения Максвелла–Блоха, линейную и нелинейную дисперсию, а также кубичные по амплитуде поля члены, применяются для анализа эффектов распространения ультракоротких солитонов в волоконных световодах [20]. Устойчивые импульсы поля в волоконном световоде возникают вследствие баланса между действием дисперсии и нелинейности. Для компенсации потерь, возникающих при распространении солитона в световоде, используются различные механизмы, в том числе связанные с усилением импульсов на конечных интервалах световода, расположенных периодически по его длине. Усиление солитона происходит, например, при прохождении солитона через участок световода с имплантированными атомами редкоземельных металлов с резонансным двухуровневым переходом. Динамика солитона в такой среде может быть описана в рамках модели, близкой к интегрируемой системе уравнений Максвелла–Блоха, с учетом накачки, зависящей от пространственной переменной и частоты. Учет дисперсии и керровской нелинейности в системе уравнений Максвелла–Блоха может быть проведен либо в рамках теории возмущений, либо с использованием модели, объединяющей эту систему и нелинейное уравнение Шредингера. Интегрируемость такой объединенной модели требует наложения жесткого условия на физические параметры [2, 21, 22]. Однако применение объеди-

ненной модели представляется целесообразным для определения качественных особенностей сильно нелинейной динамики солитона, в том числе хаотического поведения ультракоротких импульсов.

Для солитонного решения нелинейного уравнения Шредингера, имеющего в наших обозначениях вид

$$E(z, \tau) = \frac{2\eta \exp(i\phi)}{\text{ch}(2\eta\tau)}, \quad (39)$$

Нозаки и Бекки [23] численно исследовали возникновение хаотической динамики под действием малой вынуждающей силы в виде суммы двух гармоник и квадратичной дисперсии. В переменных настоящей работы это возмущение имеет вид

$$\epsilon P_{NV} = \epsilon_1 \exp(ik_1 z) + \epsilon_2 \exp(ik_2 z) - \alpha_2 E_{\tau\tau}.$$

Авторы работы [23] решали уравнения для параметров солитона, возникающие в первом порядке теории возмущений, и обнаружили, что при росте значений параметров возникают бифуркации удвоения периодов, а затем хаотическая зависимость параметров от z . В условиях накачки в модели, объединяющей систему (24) и нелинейное уравнение Шредингера, следует ожидать изменения условий возникновения хаотической динамики.

Эволюция ультракороткого оптического импульса в волоконном световоде с учетом взаимодействия с двухуровневыми атомами описывается следующим уравнением Максвелла для медленной амплитуды светового поля U :

$$U_t + U_x + i \frac{k''}{2} U_{tt} + i \chi_3 |U|^2 U = L_0 \langle R_+ \rangle. \quad (40)$$

Здесь k'' , χ_3 — коэффициенты, характеризующие соответственно дисперсию и керровскую нелинейность, L_0 — длина резонансного поглощения. Физические значения этих коэффициентов приведены, например, в [21, 22].

Интегрируемое объединение уравнений Максвелла–Блоха и (40) найдено в [21, 22] без учета накачки. В переменных, использованных в системе (24), объединенная модель имеет вид

$$\partial_z E = i \chi_0 \left(\frac{1}{2} E_{\tau\tau} + E |E|^2 \right) + \langle R_+ \rangle, \quad (41)$$

$$\partial_\tau R_+ = 2R_3 E + 2i\omega R_+, \quad (42)$$

$$\partial_\tau R_3 = - [R_+^* E + R_+ E^*] + \tilde{h}(z; \omega). \quad (43)$$

Интегрируемость этой объединенной системы требует выполнения некоторого дополнительного условия

на физические параметры, возникающего при сведении системы уравнений Максвелла–Блоха и (40) к виду (41)–(43). В работах [21, 22] предложены физические ситуации, когда это условие выполняется. Поскольку целью данного раздела является исследование качественных характеристик усиления солитона при наличии накачки, мы не будем конкретизировать физические условия. Отметим, что существование солитонного решения объединенной модели численно и экспериментально доказано в работах [24, 25].

Представление Лакса для системы (41)–(43) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Psi = \begin{pmatrix} -i\lambda & E \\ -E^* & i\lambda \end{pmatrix} \Psi, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \Psi = & \frac{1}{2} \left\langle \frac{i}{\lambda + \omega} \begin{pmatrix} \rho_{11} & -\rho_{12} \\ -\rho_{21} & -\rho_{11} \end{pmatrix} \right\rangle \Psi + \\ & + \chi_0 \begin{pmatrix} -i\lambda^2 - \frac{i}{2}|E|^2 & \lambda E + \frac{i}{2}E_\tau \\ -\lambda E^* + \frac{i}{2}E_\tau^* & i\lambda^2 + \frac{i}{2}|E|^2 \end{pmatrix} \Psi. \end{aligned} \quad (45)$$

Принципиальное отличие этого представления Лакса от аналогичного, приведенного в работах [21, 22], состоит лишь в том, что спектральный параметр дополнительно подчиняется уравнению (27).

Считаем, что зависимость скорости накачки \tilde{h} от координаты и частоты дается выражением (31). Пусть возмущение ϵP имеет вид

$$\epsilon P_c = \epsilon_1 \exp(ik_1 z) + \epsilon_2 \exp(ik_2 z) - \frac{1}{2} \alpha_3 |E|^2 E. \quad (46)$$

Это возмущение может описывать действие внешнего постоянного поля (или комбинации полей) с волновыми отстройками k_1 и k_2 от волнового вектора поля E и кубичные нелинейные потери. Для возмущения (46) в рамках развитой выше теории возмущений получаем следующий аналог уравнений Нозаки и Бекки [23] для параметров солитона (39):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \eta = & -\frac{8}{3} \alpha_3 \eta^3 - \frac{\pi}{2} [\epsilon_1 \sin(k_1 z - \varphi) + \\ & + \epsilon_2 \sin(k_2 z - \varphi)] + \frac{h_1(z)}{\eta + \Gamma_0}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi = 4\chi_0 \eta^2.$$

Выбираем периодическую зависимость скорости накачки от z :

$$h_1(z) = h_0 [1 - \beta + \beta \cos(k_0 z)]^2 > 0.$$

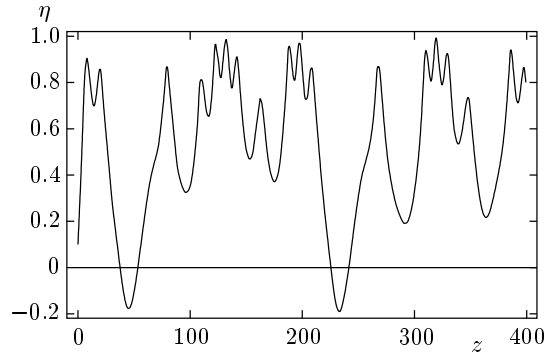


Рис. 6. Численное решение системы (47): зависимость η от z при $\beta = 1$, $h_0 = 0.125$, $\alpha_3 = 0.03$, $\Gamma_0 = 1$, $\epsilon_1 = 0.04$, $\epsilon_2 = 0$, $\chi_0 = 0.225$ и $k_0 = k_1 = 0.5$

Для приведенного выше выражения скорости накачки (30) эта зависимость отвечает стоячей волне поля:

$$E_{13}(z) = E_{13}(0) [1 - \beta + \beta \cos(k_0 z)].$$

Периодическая зависимость накачки от координаты приводит к качественным отличиям условий перехода к хаотической динамике от соответствующих условий, приведенных в [23]. В частности, при $\beta \neq 0$ для возникновения хаотического аттрактора достаточно одной гармоники внешней силы ($\epsilon_1 \neq 0$, $\epsilon_2 = 0$) и совпадения волновых векторов $k_0 = k_1$. Для $h_0 \approx 0.12$ хаотическая динамика обнаружена для $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, $k_0 = 0.1$, $\beta = 1$, $\alpha_3 = 0.01$. Напомним, что в модели, изученной в работе [23], для возникновения хаотической динамики требуется бигармоническая вынуждающая сила.

На рис. 6 приводятся результаты численного решения системы (47) для параметра солитона η . На рис. 7 изображен фазовый портрет, демонстрирующий хаотический аттрактор для тех же значений параметров, что на рис. 6.

Численный анализ показал, что при накачке $h_0 \gtrsim 0.1$ бифуркации удвоения периода и хаотическая динамика возникают при значениях $\epsilon_{1,2} \neq 0$ на два порядка ниже, чем в отсутствие накачки. Обнаружено, что в присутствии накачки, не зависящей от z , роста амплитуд хаотических модуляций не происходит. И наоборот, при учете периодической пространственной зависимости скорости накачки происходит значительное (в несколько раз) увеличение амплитуд флуктуаций.

При $h_0(z) = \text{const}$, $\alpha_3 > 0$, $\epsilon_{1,2} > 0.01$ для достаточно больших z амплитуда солитона выходит на квазистационарный режим, т. е. хаотически осциллирует вокруг среднего значения. Результаты чис-

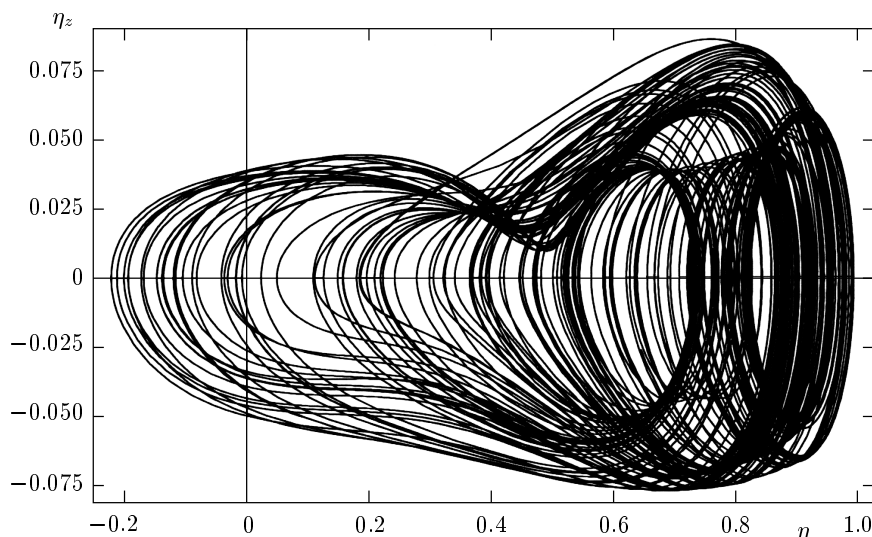


Рис. 7. Фазовый портрет: зависимость η_z от η . Значения параметров те же, что на рис. 6

ленного анализа показали, что квазихаотическая динамика проявляется и в отсутствие возмущения вида $-\alpha_i |E|^3 E$, поскольку скорость накачки нелинейно зависит от параметра η . При учете линейных потерь $-\alpha_1 E$ амплитуда хаотических пульсаций вокруг среднего значения уменьшается, но не затухает с ростом z .

В заключение этого раздела отметим, что аналогичная хаотическая динамика может наблюдаться и при учете первого и второго членов в правой части (41) в виде возмущений для малого коэффициента χ_0 и достаточно большой скорости накачки ($\sim h_0$).

6. ВКЛАД РАДИАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ

При эволюции поля в лазерных средах наряду с усилением солитонов происходит усиление нелинейных пульсаций, составляющих радиационную часть решения. Последнее в случае полностью интегрируемой модели (24) ассоциируется с непрерывным действительным спектром задачи Захарова–Шабата (25) и может инициироваться флуктуациями среды. Для исследуемой в настоящей работе модели (24) радиационное решение может вносить значительный (если не доминирующий) вклад в общее решение. В связи с этим исследование радиационной части решения необходимо при анализе динамики усиливающихся солитонов. Отметим аналогию со случаем длинного лазерного усилителя, в котором, как показано в работе [12], для определен-

ных начальных условий асимптотика решения модели для амплитуды поля описывается трансцендентом Пенлеве III и пропорциональна \sqrt{z} .

Одно из решений точно интегрируемого варианта системы уравнений Максвелла–Блоха с накачкой для определенных начальных условий и при выполнении соотношений

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \epsilon = 0, & g(\omega) &= \delta(\omega), \\ \tilde{h}(z; \omega) &= c = \text{const} \end{aligned} \tag{48}$$

пропорционально автомодельному решению, которое может быть выражено через трансцендент Пенлеве V [15–17].

Следуя работам [15, 16], вводим автомодельную переменную

$$\zeta = \tau \sqrt{2cz}$$

и функции

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{2cz} \mathcal{E}(\zeta), & R &= \sqrt{c/2z} \mathcal{R}(\zeta), \\ N &= \sqrt{c/2z} \mathcal{N}(\zeta). \end{aligned} \tag{49}$$

При этом система (24) переходит в следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta \mathcal{E}(\zeta)) &= \mathcal{R}(\zeta) + \epsilon \sqrt{\frac{2z}{c}} P(\sqrt{2cz} \mathcal{E}(\zeta)), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{R}(\zeta) &= \mathcal{N}(\zeta) \mathcal{E}(\zeta) - \frac{\gamma_2}{\sqrt{2cz}} \mathcal{R}(\zeta), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{N}(\zeta) &= -\mathcal{R}(\zeta) \mathcal{E}(\zeta) + 1 - \frac{\gamma_1}{\sqrt{2cz}} \mathcal{N}(\zeta). \end{aligned} \tag{50}$$

Полагаем, что возмущение ϵP зависит от амплитуды поля и его производных.

Покажем, что для малых $\gamma_{1,2}$ и ϵ , начально-краевых условий

$$|R(z, 0)| \ll 1, \quad N(z, 0) = -n_0, \quad E(0, \tau) = 0 \quad (51)$$

и достаточно больших ζ радиационное решение системы (50) полностью определяет асимптотику.

Система (24) имеет следующие линейные решения:

$$E = R = 0, \quad N = -n_0 + c\tau, \quad (52)$$

здесь $-n_0 < 0$ — начальная разность заселенностей уровней 1 и 2, и

$$E = \sqrt{2cz}, \quad R = \sqrt{c/2z}, \quad N = 0. \quad (53)$$

Радиационное решение инициируется флуктуациями среды и описывает нелинейную стадию развития неустойчивости. Для малых флуктуаций, как и в случае лазерного усилителя [12], возникает форма переднего фронта и характерная задержка, которые могут быть определены из линейного решения для малых отклонений амплитуды поля и поляризации от состояния (52). Для линейной стадии развития неустойчивости и $g(\omega) = \delta(\omega)$, $\epsilon = 0$ из системы (24) находим

$$\partial_z \tilde{E} = \tilde{R}, \quad (54)$$

$$\partial_\tau \partial_z \tilde{E} = \left[-n_0 + \frac{c}{\gamma_1} (1 - e^{-\gamma_1 \tau}) \right] \tilde{E} + f(z, \tau) e^{\gamma_2 \tau}. \quad (55)$$

Здесь

$$\tilde{E} = E e^{-\gamma_2 \tau}, \quad \tilde{R} = R e^{-\gamma_2 \tau},$$

f — функция, описывающая флуктуации поляризации среды. По аналогии с теорией лазерного усилителя, развитой в полуклассической теории [26], для описания инициации процесса может быть использовано моделирование начальной поляризации стохастической функцией с малой амплитудой флуктуаций.

Уравнение (55) заменой

$$\tilde{\tau} = -n_0 \tau + \frac{c}{\gamma_1} \left[\tau - \frac{1}{\gamma_1} (1 - e^{-\gamma_1 \tau}) \right]$$

сводится к телеграфному уравнению. При $\gamma_1 \rightarrow 0$, $\tau \gg n_0$ решение этого уравнения имеет вид

$$E(z, \tau) = \int_0^x \int_0^\tau f(z', \tau') \times \\ \times I_0 \left(\sqrt{2c(\tau^2 - \tau'^2)}(z - z') \right) dz' d\tau'. \quad (56)$$

Для достаточно медленной функции $f(z, \tau)$ (она растет не быстрее, чем степенным образом) решение (56) описывает передний фронт квазиавтомодельного решения исходной модели (24). Для $\zeta \gg 1$ находим

$$E \approx \frac{z \operatorname{sign} f_0}{\zeta} e^{\zeta - \zeta_0} \left[1 + O \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \right]. \quad (57)$$

Здесь $\zeta_0 = \ln |f_0|$, f_0 — некоторое среднее значение амплитуды флуктуаций. Более строгое вычисление стохастических средних приводит к такому же результату.

При $\mathcal{R}(0) \ll 1$, $\epsilon = \gamma_1 = 0$ в линейном пределе, который описывает малые отклонения от состояния (52), система (50) сводится к уравнению

$$\zeta \partial_\zeta^2 \mathcal{E} + \partial_\zeta \mathcal{E} = (\zeta - n_0) \mathcal{E}, \quad (58)$$

которое приводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Решение этого уравнения при малых ζ и достаточно больших n_0 состоит из затухающих с ростом ζ осцилляций, которые при $\zeta > \zeta_c$ переходят в быстро растущее решение, пропорциональное функции Бесселя $I_0(\zeta)$ (ζ_c — точка сшивки затухающего и растущего решений). При $\zeta > \zeta_c \gg 1$ получаем следующее решение:

$$E \approx \frac{z \operatorname{sign} \mathcal{E}_c}{\zeta} e^{\zeta - \zeta_c} \left[1 + O \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \right]; \quad (59)$$

значение $\operatorname{sign} \mathcal{E}_c$ определяется сшивкой растущей части с затухающей начальной частью решения уравнения (58). Решения (57) и (59) совпадают с точностью до величины задержки, т. е. асимптотика решения (24) для начально-краевых условий, мало отличающихся от (52), «сшивается» с квазиавтомодельным решением уравнения (50). Таким образом, при выполнении условий (48) в нелинейном режиме решение системы (24) описывается нелинейным решением (50), которое может быть сведено к решению следующего уравнения Пенлеве V:

$$u_{\xi\xi} = (u_\xi)^2 \frac{3u - 1}{2u(u - 1)} - \frac{1}{\xi} u_\xi + \frac{\gamma u}{\xi} - \frac{u(u + 1)}{2(u - 1)}, \quad (60)$$

где $\xi = 2\zeta$ и

$$\mathcal{E} = \frac{u - u_\xi}{\sqrt{u(u - 1)}} e^{i\varphi}. \quad (61)$$

Используя линейное решение (52), выбираем

$$\mathcal{N}(0) = 0, \quad \mathcal{E}(0) = \mathcal{R}(0) = \mathcal{R}_0, \quad \operatorname{Im} \mathcal{R}_0 = 0.$$

Начальные условия для u и параметры уравнения определяются сшивкой с этим линейным решением,

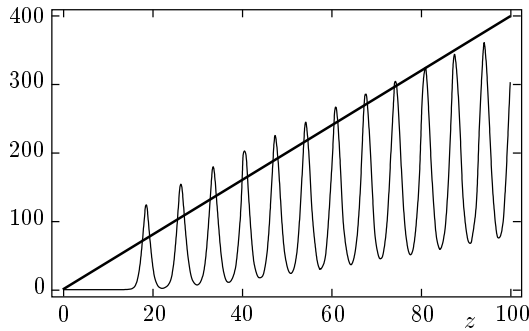


Рис. 8. Численное решение систем (36) и (50) при $\epsilon = 0$; $c = 1$, $n_0 = -1$, $\alpha_{1,2,3} = 0$. Зависимости максимума интенсивности солитона (жирная линия) и зависимость интенсивности радиационного решения $|E|^2$ (тонкая линия) от z

условиями регулярности в $\xi = 0$ и действительности [15–18] и имеют вид

$$\begin{aligned} u(0) &= -1, & \varphi &= \pi/2, \\ u_\xi(0) &= 1 + 2\mathcal{R}_0, & \gamma &= -1 - 2\mathcal{R}_0. \end{aligned} \tag{62}$$

Заметим, что решение (59) совпадает с аналогичным для случая лазерного усилителя [12] с точностью до замены автомодельной переменной и фазового множителя. Из него следует, в частности, что для малых \mathcal{R}_0 имеет место задержка усиления, как и в случае лазерного усилителя. В то же время в случае трехуровневого лазера с накачкой появляется дополнительная задержка генерации радиационного решения, связанная с начальной заселенностью нижнего лазерного уровня:

$$R_3(z, 0) = -n_0 < 0.$$

Проанализируем теперь роль малого возмущения в формировании автомодельной радиационной асимптотики и сравним эти результаты с аналогичными для солитонной амплитуды. Численное решение систем (36) и (50), выполненное для $\epsilon = \gamma_{1,2} = 0$, приведено на рис. 8. Из него видно, что существует интервал значений $[0, z_d \approx 16]$, в котором вкладом непрерывного спектра можно пренебречь. Длина этого интервала z_d растет с ростом n_0 и уменьшением $|\mathcal{R}_0|$. В общем случае в отсутствие возмущения, при $\gamma_{1,2} = 0$ и для достаточно больших z солитонное решение, стартующее с малой начальной амплитуды, имеет такой же порядок, как и импульсы радиационного решения. Из рис. 8 видно, что для значений $z > z_d$ вкладом радиационного решения в динамику солитона в общем случае пренебрегать нельзя.

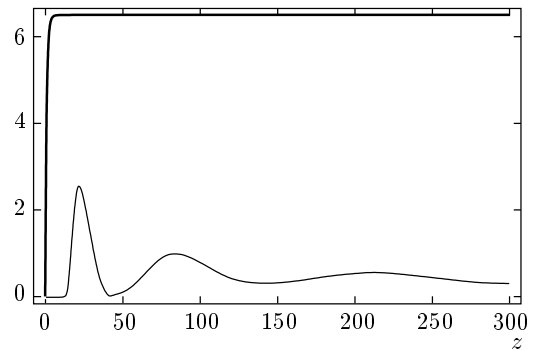


Рис. 9. Численное решение систем (24) и (50) при $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0.05$

В то же время численный анализ показал, что поведение солитонного и радиационного решений при наличии возмущений и накачки качественно различается. Это позволяет найти условия, при которых амплитуда солитонного решения много больше амплитуд импульсов, составляющих радиационное решение, для всех z . В этом случае вклад радиационного решения можно не учитывать при изучении эволюции солитонов.

Учет малых возмущений вида (35) приводит к качественному изменению радиационной асимптотики. Зафиксируем точку ζ_1 на переднем фронте импульса радиационного решения и перейдем в систему отсчета этой точки. Из системы (50) видно, что в этой системе отсчета с ростом z возмущение растет пропорционально амплитуде поля, а вклад релаксационных членов уменьшается пропорционально $T_{1,2}^{-1}$. Численные расчеты показали, что возмущения, содержащие потери в виде нечетных степеней амплитуды поля, например,

$$\epsilon P = -\alpha_1 E - \alpha_3 |E|^2 E - \alpha_4 |E|^4 E, \quad \alpha_i > 0,$$

приводят к уменьшению радиационного вклада для больших z . Это подавление тем больше, чем больше задержка, т. е. чем больше начальная заселенность нижнего уровня лазерного перехода и чем меньше $|\mathcal{R}_0|$.

В то же время, как видно из предыдущего раздела, малые возмущения могут приводить к качественному изменению асимптотики солитонного решения. На рис. 9 приводятся результаты численного анализа системы (24) для солитонного и системы (50) для квазирadiационного режимов, где возмущение имеет вид

$$\epsilon P = -\alpha_1 E - \alpha_3 |E|^2 E.$$

Начальные и граничные условия здесь следующие:

$$2\eta(0) = 0.1, \quad R_0 = 0.001, \quad n_0 = 1.$$

Численный анализ был проведен для разных $\alpha_{1,3}$ и h . Обнаружено, что меньшим $\alpha_{1,3} > 0$ отвечает меньшее относительное подавление радиационного вклада. Значительное влияние на радиационное решение оказывает изменение h . При $\alpha_{1,3} \sim 10^{-1} - 10^{-4}$, $c \sim 1$ и достаточно больших z амплитуда осцилляций радиационного решения не превышает 10% от амплитуды солитона для всех z . С уменьшением c эта доля уменьшается. С ростом c и уменьшением $\alpha_{1,3} \neq 0$ отношение максимальных амплитуд осцилляций радиационного решения к амплитуде солитона растет и может превосходить единицу на некотором интервале z (ср. рис. 8).

Из приведенных оценок задержки радиационного решения следует, что трехуровневая схема лазерной накачки, когда нижний уровень лазерного перехода совпадает с основным уровнем, более предпочтительна для наблюдения динамики солитона, поскольку в этом случае задержка радиационного решения может быть значительно (на порядок) больше, чем в случае четырехуровневой схемы накачки. В то же время релаксационные эффекты, а также линейные и нелинейные потери приводят к сильному подавлению радиационной части решения. И наоборот, в случае нулевой начальной заселенности нижнего лазерного уровня, больших значений коэффициента накачки $c \gg 1$ и в отсутствие потерь необходимо учитывать вклад непрерывного спектра задачи при исследовании динамики солитонов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение систем уравнений, близких к интегрируемым, позволяет исследовать нелинейную стадию эволюции солитонов и других нелинейных мод. Аппарат теории возмущений, представленный в настоящей работе, позволяет дополнить список этих моделей моделями, близкими к деформированным интегрируемым системам уравнений. Некоторые интегрируемые деформированные модели имеют важные физические приложения, например, цилиндрическое уравнение Гайзенберга, уравнения главного кирального поля, находящие применение в теории гравитации, и др. [6].

Уравнения Максвелла–Блоха, близкие к системе (24) и описывающие взаимодействие светового поля с резонансной средой в условиях накачки, применяются достаточно часто [9]. Решения идеализи-

рованной, интегрируемой версии этой модели могут рассматриваться как сильно «деформируемые» в процессе эволюции нелинейные моды (солитоны), поскольку спектральный параметр зависит от переменных. Учет малых возмущений приводит к появлению дополнительных членов в уравнениях, описывающих зависимость параметров солитонов от переменных. Как показано в настоящей работе, объединение этих свойств приводит к качественно новой динамике нелинейных мод. В частности, возникают режимы усиления солитонов, которые не могут быть описаны при использовании стандартной теории возмущений [4, 5].

С другой стороны, в возмущенной модели условия вида (9) могут выполняться приближенно при специальном выборе возмущения. Это позволяет расширить физическую область применимости моделей, интегрируемых в рамках МОЗР с переменным спектральным параметром.

Обнаруженные в работе качественные эффекты, проявляющиеся при распространении солитона в среде с накачкой, могут найти применение при анализе и выборе условий лазерной генерации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-02-17904).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
2. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
3. D. J. Kaup, *Stud. Appl. Math.* **31**, 121 (1976).
4. В. И. Карпман, Е. М. Маслов, *ЖЭТФ* **73**, 537 (1977).
5. Yu. S. Kivshar and V. A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 763 (1989).
6. С. П. Бурцев, А. В. Михайлов, В. Е. Захаров, *ТМФ* **70**, 323 (1987).
7. S. P. Burtsev and I. R. Gabitov, *Phys. Rev. A* **49**, 2065 (1994).
8. S. P. Burtsev, I. R. Gabitov, and V. E. Zakharov, *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, World Scientific, Singapore (1988), p. 897.

9. О. Звелто, *Физика лазеров*, Мир, Москва (1979).
10. A. A. Apolonsky, A. A. Zabolotskii, V. P. Drachev, and E. I. Zinin, in *Proc. SPIE* **2041**, 385 (1993).
11. Q. H. F. Vreken, in *Laser Spectroscopy*, ed. by H. Walther and K. W. Rothe, Springer, Berlin (1979), vol. 4, p. 79.
12. С. В. Манаков, *ЖЭТФ* **83**, 68 (1982).
13. F. Y. F. Chu and A. C. Scott, *Phys. Rev. A* **12**, 2060 (1975).
14. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **115**, 1168 (1999).
15. In *Painlevé Transcendents. Their Asymptotics and Physical Applications*, *NATO ASI Series B: Physics*, ed. by P. Winternitz and D. Levi, **278**, Plenum, New York (1992).
16. S. P. Burtsev, *Phys. Lett. A* **177**, 341 (1993).
17. A. V. Kitaev, A. V. Rybin, and J. Timonen, *J. Phys. A* **26**, 3583 (1993).
18. H. Steudel and I. Leonhardt, *Opt. Comm.* **107**, 88 (1994).
19. A. V. Rybin, *J. Phys. A* **24**, 5235 (1991).
20. In *Optical Solitons — Theory and Experiment. Cambridge Studies in Modern Optics*, ed. by J. R. Taylor, CUP, Cambridge (1992), vol. 10.
21. А. И. Маймистов, Э. А. Маныкин, *ЖЭТФ* **85**, 1177 (1983).
22. E. A. Doktorov and R. A. Vlasov, *Optica Acta* **30**, 2 (1983).
23. K. Nozaki and N. Bekki, *Phys. Lett. A* **102**, 383 (1984).
24. M. Nakazawa, E. Yamada, and H. Kubota, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2625 (1991).
25. M. Nakazawa, Y. Kimura, K. Kurokawa, and K. Suzuki, *Phys. Rev. A* **45**, 23 (1992).
26. F. Haake, H. King, G. Schröder, J. Haus, and R. Glauber, *Phys. Rev. A* **20**, 2047 (1979).