

О ДОМЕННЫХ СТЕНКАХ, НЕСУЩИХ $U(1)$ -ЗАРЯД

*В. А. Ленский**

*Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет)
115409, Москва, Россия*

*В. А. Гани**, А. Е. Кудрявцев****

*Государственный научный центр
«Институт теоретической и экспериментальной физики»
117259, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 апреля 2001 г.

Рассматривается классическая полевая система, состоящая из двух взаимодействующих скалярных полей — действительного поля Хиггса и комплексного скалярного поля. Показано, что в такой системе существует нетривиальное топологическое решение — кинк, несущий $U(1)$ -заряд. Обсуждаются некоторые вопросы, связанные с устойчивостью найденного решения. Предложена улучшенная вариационная процедура нахождения топологических $U(1)$ -заряженных конфигураций.

PACS: 03.50.-z, 03.65.Pm, 11.27.+d

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что решения типа доменных стенок присутствуют в широком классе современных суперсимметричных теорий поля и при струнном описании (D -branes) калибровочных теорий [1]. Вопрос о взаимодействии частиц с доменными стенками неоднократно обсуждался в литературе начиная с работы Волошина [2]. Более подробно взаимодействие абелевых калибровочных частиц с доменными стенками изучалось в работе [3]. Обычно взаимодействие частиц со стенкой рассматривается как рассеяние в заданном потенциале, образованном стенкой, т. е. используется приближение слабой связи и пренебрегается обратным воздействием полей на стенку. Такое приближение может быть не всегда верным. Известно, например, что взаимодействие монополей и скирмионов с доменными стенками нетривиально [4, 5]. Кроме того, стенки могут образовывать связанные состояния с другими полями и нести отвечающие этим полям квантовые числа. Недавно в работе [6] обсуждалась интегрируемая решеточная модель дионного типа с топологическим солитоном, несущим $U(1)$ -заряд.

В настоящей работе мы рассмотрим более простую непрерывную модель для системы двух взаимодействующих скалярных полей. В такой модели, обсуждавшейся уже давно в работе [7], существуют нетопологические решения с $U(1)$ -зарядом, называемые Q -боллами (Q -balls). В настоящей работе будет показано, что в размерности $(1 + 1)$ в модели Ли–Фридберга–Сирлина существуют топологические решения типа кинков, несущие дополнительно $U(1)$ -заряд.

Следует отметить, что решения типа монополей, несущие дополнительно электрический заряд (дионы), давно известны в литературе. Другими примерами топологических решений, несущих $U(1)$ -заряд, являются так называемые Q -lumps [8].

2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И НЕТОПОЛОГИЧЕСКИЕ Q -БОЛЛЫ

Рассмотрим систему взаимодействующих скалярных полей в $(1 + 1)$ -измерениях с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi^* + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - h^2 \phi^2 \xi \xi^* - \frac{m^2}{2} (\phi^2 - v^2)^2. \quad (1)$$

*E-mail: lensky@vxitep.itep.ru

**E-mail: gani@heron.itep.ru

***E-mail: kudryavt@heron.itep.ru

Здесь ϕ — действительное скалярное поле, ξ — комплексное скалярное поле, h, m, v — вещественные константы, $\mu = 0, 1$. Такой полевой лагранжиан в $(3 + 1)$ -измерениях был впервые рассмотрен в работе [7]. В частности, в [7] были найдены классические сферически-симметричные решения уравнений движения для лагранжиана (1), несущие $U(1)$ -заряд. Такие нетопологические солитонные решения были позднее названы Q -боллами [9]. Одномерные Q -боллы для полевой системы с лагранжианом, близким к (1), обсуждаются подробно в книге [10].

Лагранжиан (1) обладает симметрией относительно глобальных $U(1)$ -преобразований,

$$\xi \rightarrow \xi e^{i\alpha}, \quad (2)$$

а также относительно дискретных преобразований,

$$\phi \rightarrow -\phi. \quad (3)$$

Инвариантности лагранжиана относительно преобразований (2) соответствуют сохраняющиеся ток

$$j^\mu = \frac{1}{i}(\xi^* \partial^\mu \xi - \xi \partial^\mu \xi^*)$$

и заряд

$$Q = \int j^0 dx.$$

Симметрии (3) соответствуют сохраняющиеся топологический ток

$$i^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$$

и топологический заряд

$$P = \int i^0 dx$$

(здесь $\epsilon^{\mu\nu}$ — единичный антисимметричный тензор).

Из лагранжиана (1) следуют уравнения движения

$$\partial_\mu \partial^\mu \xi + h^2 \phi^2 \xi = 0, \quad (4)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + 2h^2 \xi \xi^* \phi + 2m^2(\phi^2 - v^2)\phi = 0. \quad (5)$$

Вакуумные состояния системы, описываемой лагранжианом (1), определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi_{vac} &= \pm v, \\ \xi_{vac} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Если рассматривать такие конфигурации, в которых поле ξ тождественно равно своему вакуумному значению, то уравнение (4) удовлетворяется тождественно, а (5) принимает вид

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + 2m^2(\phi^2 - v^2)\phi = 0, \quad (7)$$

что совпадает с уравнением движения для лагранжиана теории $\lambda\phi^4$ с двукратно вырожденным вакуумом. В $(1 + 1)$ -измерениях уравнение (7) имеет статическое топологическое решение — кинк:

$$\phi_k(x) = v \operatorname{th}(mvx). \quad (8)$$

Поскольку поле ξ в рассматриваемой конфигурации равно нулю тождественно, заряд также равен нулю. Энергия же этой конфигурации (масса кинка) равна

$$E_k = \frac{4}{3}mv^3. \quad (9)$$

Далее мы покажем, что для системы полей, определяемых лагранжианом (1), в случае больших зарядов Q существуют локализованные конфигурации, являющиеся устойчивыми относительно распада на плоские волны. Такие конфигурации могут быть как нетопологическими (Q -болл), так и топологическими (топологический Q -болл). В дальнейшем нам понадобятся в явном виде выражения для энергии плоских волн — возмущений около вакуумных состояний (6). При этом, чтобы избежать появления расходящихся величин при вычислении энергии и заряда, рассмотрим эти возмущения на большом, но конечном отрезке оси x : $-L/2 \leq x \leq L/2$. Предполагая амплитуды отклонений полей от (6) малыми, в линейном приближении из (4) и (5) получим

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \delta\xi + h^2 v^2 \delta\xi &= 0, \\ \partial_\mu \partial^\mu \delta\phi + 4m^2 v^2 \delta\phi &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\delta\phi = \phi - \phi_{vac}$, $\delta\xi = \xi - \xi_{vac}$. При заданном заряде конфигурации решением системы (10), обеспечивающим наименьшее отклонение энергии от вакуумного значения, будет

$$\begin{aligned} \delta\phi &= 0, \\ \delta\xi &= \sqrt{\frac{Q}{2hvL}} e^{ihvt}. \end{aligned} \quad (11)$$

Энергия решения (11) при данном заряде Q равна

$$E^0 = hvQ. \quad (12)$$

Существенным отличием случая одного пространственного измерения от трехмерного случая является существование в системе с лагранжианом (1) топологических решений. При обсуждении возможности существования устойчивых топологических заряженных решений мы должны сравнивать энергию такого решения, несущего заряд Q , с суммой энергий кинка (8) (который обладает наименьшей энергией среди всех топологических

конфигураций) и заряженной нетопологической конфигурации (11). Значение этой суммы равно

$$\tilde{E}^0 = hvQ + \frac{4}{3}mv^3. \quad (13)$$

В дальнейшем именно это значение мы примем за отправную точку при обсуждении возможности существования устойчивой заряженной топологической конфигурации.

Теперь, следуя [7, 10], рассмотрим функционал энергии

$$H[\phi, \xi] = \int dx \left(\left| \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + h^2 \phi^2 \xi \xi^* + \frac{m^2}{2} (\phi^2 - v^2)^2 \right) \quad (14)$$

на классе пробных функций вида

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| < l/2, \\ \pm v \left[1 - \exp\left(-\frac{x+l/2}{a}\right) \right], & x \leq -l/2, \\ v \left[1 - \exp\left(-\frac{x-l/2}{a}\right) \right], & x \geq l/2, \end{cases} \quad (15)$$

$$\xi(x, t) = \begin{cases} 0, & |x| > l/2, \\ A \cos(\Omega x) \exp(i\Omega t), & |x| \leq l/2, \end{cases} \quad (16)$$

где l и a — произвольные положительные константы, подлежащие варьированию (параметры Ритца). Знаки «+» и «-» в (15) берутся соответственно для нетопологических и для топологических пробных функций. Мы рассматриваем состояние с наименьшей энергией, для которого $|\xi(x)|$ не обращается в нуль на интервале $|x| < l/2$, поэтому

$$\Omega = \frac{\pi}{l}.$$

В случае, когда $\xi(x, t) = |\xi(x)| \exp(i\Omega t)$, заряд конфигурации равен

$$Q = 2\Omega \int |\xi(x)|^2 dx.$$

Отсюда можно найти постоянную A в (16):

$$A = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

Теперь можно написать в явном виде выражение для энергии пробных функций (15), (16):

$$E = \frac{\pi Q}{l} + \frac{v^2}{2a} + \frac{m^2 v^4 l}{2} + \frac{11 a m^2 v^4}{12}. \quad (17)$$

В это выражение не входит константа взаимодействия полей h , так как в гамильтониан она входит только в комбинации $h^2 \phi^2 \xi \xi^*$, которая для функций вида (15), (16) обращается в нуль тождественно. Отметим также, что выражение (17) справедливо как для нетопологической, так и для топологической конфигураций в силу того, что поле ϕ входит в лагранжиан квадратично и замена знака в (15) не сказывается на значении энергии.

Минимальное значение выражения (17) при данном заряде Q достигается при значениях параметров Ритца

$$l_0 = \frac{\sqrt{2\pi Q}}{mv^2}, \quad a_0 = \frac{1}{mv} \sqrt{\frac{6}{11}}$$

и равно

$$E_{min} = mv^2 \sqrt{2\pi Q} + mv^3 \sqrt{\frac{11}{6}}. \quad (18)$$

Поскольку энергия плосковолновых конфигураций зависит от заряда линейно (см. (12), (13)), при больших зарядах энергетически выгодной оказывается локализованная конфигурация (15), (16), энергия которой зависит от Q как \sqrt{Q} . Это означает, что при больших зарядах $Q > Q^{cr}$ в системе (1) существует локализованное решение. Заметим, что энергия (13) топологической конфигурации «кинк + плоские волны» с данным зарядом Q отлична от энергии (12) для нетопологической плосковолновой конфигурации с тем же зарядом Q . В то же время вариационная оценка (18) одинаково применима как к нетопологической, так и к топологической конфигурациям. Отсюда получаются различные выражения¹⁾ для значений критического заряда Q^{cr} :

1) нетопологический Q -болл,

$$Q^{cr} = \frac{m^2 v^2}{h^2} \left(\pi + \frac{h}{m} \sqrt{\frac{11}{6}} + \sqrt{\pi^2 + 2\pi \frac{h}{m} \sqrt{\frac{11}{6}}} \right), \quad (19)$$

¹⁾ Данные значения являются оценками сверху, полученными при использовании пробных функций (15), (16), и поэтому на самом деле устойчивые заряженные локализованные решения могут существовать и при зарядах, меньших (19), (20).

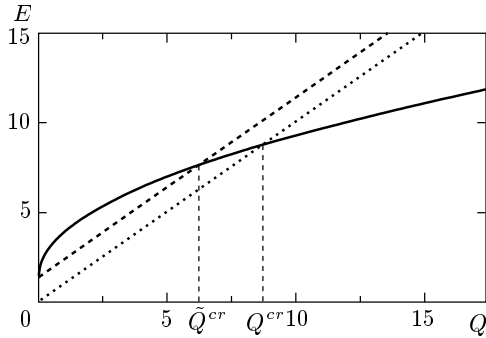


Рис. 1. Зависимости энергии от заряда для плоско-волновой конфигурации (пунктирная кривая), конфигурации типа «кинк + плоские волны» (штриховая кривая) и вариационной конфигурации (15), (16) (сплошная кривая). Q^{cr} и \tilde{Q}^{cr} — критические значения заряда для нетопологической и топологической конфигураций. Графики построены при значениях констант $h = m = 1; v = 1$

2) топологический Q -болл,

$$\tilde{Q}^{cr} = \frac{m^2 v^2}{h^2} \left(\pi + \frac{h}{m} \left(\sqrt{\frac{11}{6}} - \frac{4}{3} \right) + \sqrt{\pi^2 + 2\pi \frac{h}{m} \left(\sqrt{\frac{11}{6}} - \frac{4}{3} \right)} \right). \quad (20)$$

Смысл критических зарядов Q^{cr} и \tilde{Q}^{cr} поясняет рис. 1. Таким образом, топологическая конфигурация становится энергетически выгодной и, следовательно, устойчивой относительно распада на кинк + плоские волны при критических зарядах меньших, чем для нетопологической конфигурации.

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО Q -БОЛЛА

В предыдущем разделе было продемонстрировано, что в системе, определяемой лагранжианом (1), кроме обычного Q -болла может существовать топологический Q -болл, несущий одновременно топологический и $U(1)$ -заряды. Однако предъявленное в предыдущем разделе топологическое решение является вариационным. В принципе, точное решение задачи с заданными граничными условиями на бесконечности (заданный топологический сектор) и полным $U(1)$ -зарядом Q может обладать и меньшей энергией. Как будет показано, для уравнений (4), (5) частное решение такой задачи может быть найдено аналитически.

Действительно, будем искать решение уравнений (4), (5) в виде

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \phi(x), \\ \xi(x, t) &= f(x)e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\phi(x)$ и $f(x)$ — действительные функции x . С учетом (21) уравнения (4) и (5) принимают вид

$$-\omega^2 f - f'' + h^2 \phi^2 f = 0, \quad (22)$$

$$-\phi'' + 2h^2 f^2 \phi + 2m^2(\phi^2 - v^2)\phi = 0. \quad (23)$$

Далее мы ограничимся предположением, что поле ϕ сохраняет функциональную зависимость кинка (8), быть может, с другим масштабам:

$$\phi(x) = v \operatorname{th}(\alpha m v x), \quad (24)$$

где $\alpha > 0$ — некоторая неизвестная постоянная.

Перейдем в (22) и (23) к новой переменной

$$z = v \operatorname{th}(\alpha m v x), \quad -v < z < v.$$

Вместо (22) и (23) получим

$$-\omega^2 f - \alpha^2 m^2 (v^2 - z^2) \frac{d}{dz} \left((v^2 - z^2) \frac{df}{dz} \right) + h^2 \phi^2 f = 0, \quad (25)$$

$$-\alpha^2 m^2 (v^2 - z^2) \frac{d}{dz} \left((v^2 - z^2) \frac{d\phi}{dz} \right) + 2h^2 f^2 \phi + 2m^2(\phi^2 - v^2)\phi = 0. \quad (26)$$

Учитывая, что согласно (24) $\phi(z) = z$, из (26) получим

$$f^2(z) = \frac{m^2(1 - \alpha^2)}{h^2} (v^2 - z^2), \quad (27)$$

откуда следует, что искомое решение существует, только если константа α меньше единицы. Предполагая, что это условие выполняется, извлекаем корень в (27) и подставляем получившееся выражение для $f(z)$ в (25), после чего получаем

$$(2\alpha^2 m^2 - h^2)z^2 + (\omega^2 - \alpha^2 m^2 v^2) = 0. \quad (28)$$

Так как равенство (28) должно выполняться при произвольных z , получаем

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{h^2}{2m^2}, \\ \omega^2 &= \alpha^2 m^2 v^2 = \frac{h^2 v^2}{2}. \end{aligned}$$

Итак, мы нашли точное нетривиальное решение уравнений (4), (5). Приведем его явное выражение:

$$\phi(x) = v \operatorname{th} \left(hvx/\sqrt{2} \right), \quad (29)$$

$$\xi(x, t) = v \sqrt{\frac{m^2}{h^2} - \frac{1}{2}} \frac{\exp(ihvt/\sqrt{2})}{\operatorname{ch} \left(hvx/\sqrt{2} \right)}. \quad (30)$$

Это решение существует при следующих ограничениях на параметры лагранжиана:

$$\frac{h^2}{m^2} \equiv \rho^2 \leq 2. \quad (31)$$

Заметим, что в решении (29), (30) пространственный масштаб поля ϕ совпадает с масштабом поля ξ , и при $\rho \rightarrow \sqrt{2}$ решение (29), (30) переходит в незаряженный топологический кинк (8). Выпишем энергию и заряд решения (29), (30):

$$E = \frac{2\sqrt{2}}{3} hv^3 \left(4\frac{m^2}{h^2} - 1 \right), \quad (32)$$

$$Q = 2v^2 \left(2\frac{m^2}{h^2} - 1 \right). \quad (33)$$

Обсудим теперь, как изменяется найденное нами решение и соответствующие ему энергия и заряд при изменении параметров лагранжиана. При $h \ll m$ решение (29), (30) имеет характерный пространственный размер, много больший размера кинка (8); при этом амплитуда заряженного поля велика ($\sim vt/h$). Как следует из соотношений (32) и (33), энергия и заряд топологического Q -болла также велики в пределе малой константы связи h . Стремление амплитуды ξ в (30) к бесконечности при $h \rightarrow 0$ означает, что решение (29), (30) непертурбативно по малости параметра h . Оно не может быть получено разложением по степеням h в пределе малых h (при $h \rightarrow 0$ член с взаимодействием в (1) порядка m^2v^4 , т. е. вовсе не мал по сравнению с остальными членами). Наоборот, пределу слабой связи в (29), (30) соответствует случай $h \rightarrow \sqrt{2}m$. В этом пределе амплитуда ξ в (30), а с ней и заряд, стремятся к нулю, в то время как $\phi(x)$ стремится к $\phi_k(x)$ (8). Таким образом, пределу слабой связи соответствует малость не h^2 , а $h^2|\xi|^2$. Здесь можно отметить, что точное топологическое решение содержит существенную зависимость от константы h в отличие от предложенного выше вариационного, которое от h не зависело.

Сравним теперь энергию конфигурации (29), (30) с энергией плосковолновых конфигураций и энергией соответствующих пробных конфигураций

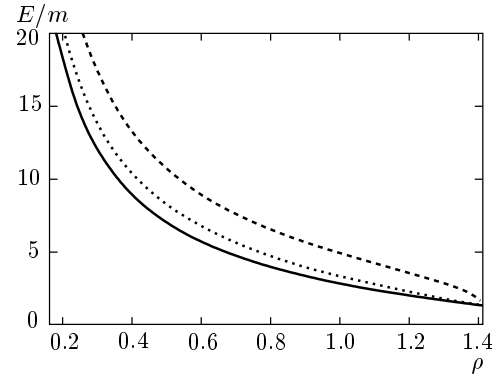


Рис. 2. Зависимости отношения энергии к константе m от величины ρ для точного решения (сплошная кривая), конфигурации типа «кинк + плоские волны» (пунктирная кривая) и вариационной конфигурации (15), (16) (штриховая кривая) (для двух последних — при заряде Q , равном заряду (33) точного решения). Графики построены при значении константы $v = 1$

(15), (16). Для этого надо подставить в (13) и (18) значение заряда Q (33). Получаем

$$\widetilde{E}^0 = mv^3 \left[\frac{4}{3} + 2\rho \left(\frac{2}{\rho^2} - 1 \right) \right], \quad (34)$$

$$E_{min} = mv^3 \left[2\sqrt{\pi \left(\frac{2}{\rho^2} - 1 \right)} + \sqrt{\frac{11}{6}} \right]. \quad (35)$$

Легко убедиться, что как энергия (34) плосковолновой конфигурации, так и энергия (35) вариационной конфигурации с соответствующим зарядом оказываются больше значения энергии (32) точного решения при любых значениях параметров лагранжиана, удовлетворяющих неравенству (31). Это естественно, так же как и тот факт, что заряд Q (33) меньше оценочного критического (20) для топологической конфигурации, ибо (29), (30) является точным решением уравнений движения. Таким образом, найденное точное решение (29), (30) устойчиво относительно распада на кинк + плоские волны и на конфигурации, близкие к вариационной (15), (16).

На рис. 2 представлены зависимости отношения энергии к константе лагранжиана m для точного решения, конфигурации типа «кинк + плоские волны» и вариационной конфигурации (15), (16) от величины ρ в интервале $0 < \rho \leq \sqrt{2}$.

4. УЛУЧШЕННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА

Обнаружение точного решения (29), (30) с энергией, меньшей, чем при использовании вариационной процедуры, описанной в разд. 2, говорит о том, что вариационная процедура, использовавшаяся ранее, должна и может быть улучшена. Кроме того, при заданных параметрах лагранжиана заряд (33) точного решения фиксирован, в результате чего точное решение не воспроизводит весь спектр топологических решений с различными зарядами Q при заданных параметрах лагранжиана (1). Попытаемся улучшить вариационную процедуру. Для этого возьмем вариационные функции в следующем виде:

$$\phi(x) = v \operatorname{th}(\beta x), \quad (36)$$

$$\xi(x, t) = Av \frac{\exp(i\beta t)}{\operatorname{ch}(\beta x)}, \quad (37)$$

где A и β — параметры Ритца. Такой выбор вариационной функции при

$$A = \sqrt{\frac{m^2}{h^2} - \frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{hv}{\sqrt{2}}$$

воспроизводит точное решение (29), (30). В то же время можно надеяться, что в силу непрерывной зависимости вариационных функций от параметров A и β подстановка (36), (37) в функционал энергии (14) приведет к лучшей минимизации этого функционала по крайней мере в области параметров A и β , близких к таковым для точного решения. Подставив (36), (37) в (14), получаем, что энергия и заряд этой конфигурации имеют следующие значения:

$$\tilde{E} = \frac{2}{3}v^2(1 + 4A^2)\beta + \frac{2}{3}v^4(h^2A^2 + m^2)\frac{1}{\beta}, \quad (38)$$

$$Q = 4A^2v^2. \quad (39)$$

Таким образом, значение константы A однозначно фиксируется зарядом. Подставляя найденное из (39) значение A в (38) и минимизируя энергию по β при данном заряде Q , получаем, что минимальное значение выражения для энергии (38) равно

$$\tilde{E}_{min} = \frac{2}{3}v\sqrt{(Q + v^2)(h^2Q + 4m^2v^2)} \quad (40)$$

и достигается при значении параметра β , равном

$$\beta_0 = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{h^2Q + 4m^2v^2}{Q + v^2}}.$$

При заряде Q равном заряду (33) точного решения мы, как и следовало, получаем

$$\beta_0 = \frac{hv}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{E}_{min} = E = \frac{2\sqrt{2}}{3}hv^3\left(4\frac{m^2}{h^2} - 1\right).$$

Как уже отмечалось, при зарядах, отличающихся от Q (33) достаточно мало, значение энергии (40) новой вариационной функции меньше как значения энергии (18) конфигурации (15), (16), так и значения энергии (13) конфигурации типа «кинк + плоские волны». О поведении выражения (40) при произвольных зарядах можно сказать следующее.

1) При $Q \rightarrow +\infty$

$$\tilde{E}_{min} = \frac{2}{3}hvQ + O(\sqrt{Q}),$$

следовательно, при зарядах больших некоторого Q_1^{cr} (значение Q_1^{cr} может быть найдено в общем случае из условия равенства $\tilde{E}_{min}(Q_1^{cr})$ (40) и $E_{min}(Q_1^{cr})$ (18)), вариационная конфигурация (15), (16) становится энергетически выгоднее, чем (36), (37); таким образом, при больших зарядах системы обычная подстановка, приводящая к решению типа Q -болла, оказывается энергетически выгоднее.

2) При $Q < Q_1^{cr}$ возможны в зависимости от отношения констант лагранжиана $\rho = h/m$ два случая:

а) условие устойчивости конфигурации относительно распада на кинк + плоские волны выполняется при любых $Q > 0$. Это имеет место при $3 - \sqrt{5} \leq \rho \leq 3 + \sqrt{5}$. Характерный вид зависимостей энергии от заряда для обеих вариационных и для плосковолновой конфигураций, соответствующий этому случаю, приведен на рис. 3а;

б) равенство энергий вариационной и плосковолновой конфигураций, $\tilde{E}_{min}(Q) = \tilde{E}^0(Q)$, имеет решение при $Q > 0$, что соответствует $\rho > 3 + \sqrt{5}$ или $0 < \rho < 3 - \sqrt{5}$. В этом случае конфигурация (36), (37) при

$$Q < Q_2^{cr} = \frac{4}{5}v^2\left(\frac{4}{\rho^2} - \frac{6}{\rho} + 1\right)$$

является энергетически менее выгодной, чем плосковолновая, поэтому вывода о существовании устойчивых локализованных решений сделать нельзя. Характерное расположение кривых на графике зависимостей энергии конфигурации от заряда для этого случая изображено на рис. 3б.

Существенно, однако, что в соответствии со сделанным выше заключением значение энергии (32) точного решения при любых $0 < \rho \leq \sqrt{2}$ меньше энергии (34) конфигурации типа «кинк + плоские

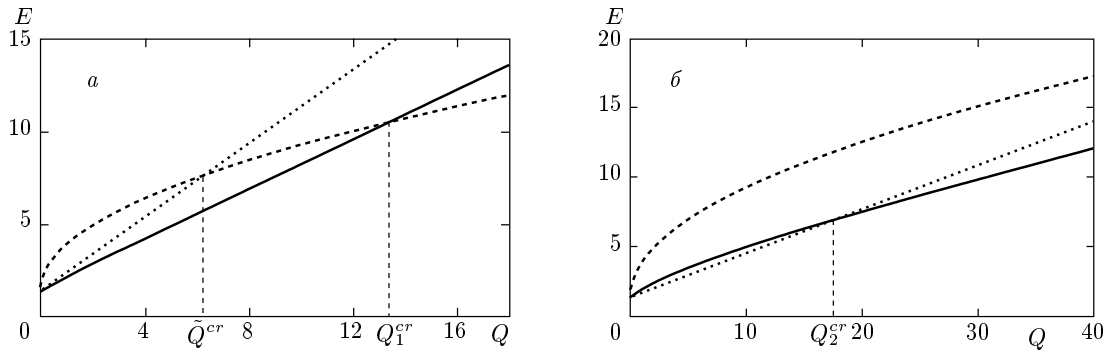


Рис. 3. Зависимости энергии от заряда для вариационных конфигураций (15), (16) (штриховая кривая), (36), (37) (сплошная кривая) и для конфигурации типа «кинк + плоские волны» (пунктирная кривая), соответствующие $\rho = 1$ ($h = m = 1$), $v = 1$ (а) и $\rho = \sqrt{0.1} = 0.31622\dots$ ($h = \sqrt{0.1}$, $m = 1$), $v = 1$ (б)

волны» с соответствующим зарядом (33). Таким образом, вариационная функция (36), (37) является точным решением при значениях заряда $Q = 0$ и $Q = 2v^2(2/\rho^2 - 1)$. При этом функция (36), (37) при всех $Q > Q_2^{cr}$ (или $Q \geq 0$ в зависимости от значения ρ) приводит к меньшему значению функционала энергии, чем конфигурация типа «кинк + плоские волны», и при всех значениях $Q < Q_1^{cr}$ приводит к меньшему значению функционала энергии, чем вариационная конфигурация (15), (16).

Итак, мы уточнили вариационную функцию для значений зарядов, меньших критического \tilde{Q}^{cr} для функции (15), (16), причем новая вариационная функция совпадает с точным решением (29), (30) при соответствующем значении заряда. Найденные точное решение (29), (30) и улучшенная вариационная процедура (36), (37) приводят к выводу, что топологические Q -боллы могут существовать в значительно более широкой области зарядов Q , чем это следует из стандартной вариационной процедуры, применяемой обычно к Q -боллам.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы продемонстрировали, таким образом, что одномерное решение типа стенки (кинк) для скалярного поля Хиггса может связывать комплексное скалярное поле, несущее $U(1)$ -заряд, причем величина связанного стеной заряда Q может меняться в достаточно широких пределах.

Возможность связать большой $U(1)$ -заряд топологической стенкой является основным новым результатом нашей работы. Этот эффект должен проявляться в задаче о рассеянии частиц доменной стенкой. Такая проблема впервые обсуждалась в работе Волошина [2]. При этом рассматривались две раз-

личные задачи. В первой задаче исследовалось рассеяние плоской волны поля Хиггса на кинке этого же поля. При этом рассеивающий потенциал оказывается безотражательным. Во второй задаче рассматривалось взаимодействие поля Хиггса с фермионным полем. Задача о рассеянии фермиона на кинке также сводилась к задаче о рассеянии в заданном потенциале, создаваемом полем кинка. Постановке этой задачи в рамках работы [2] в нашем случае отвечает исследование задачи рассеяния для уравнения (4) с заданным потенциалом $\phi(x)$. При подстановке $\phi(x)$ в виде (8) задача сводится к известной задаче о рассеянии частицы в поле $V(x) \propto -1/\text{ch}^2(mvx)$. Интересно, что при $h \rightarrow 0$ коэффициент отражения от такого потенциала стремится к единице при импульсе $k \rightarrow 0$ [11]. Такое поведение коэффициента отражения в случае $h \rightarrow 0$ означает, что предел слабой связи неприменим. В данной задаче это не является случайным, так как в одномерном случае в потенциале притяжения всегда существует связанное состояние.

Следует отметить, что вопрос о рассеянии частиц на кинке в общем случае не сводится к задаче о рассеянии на заданном потенциале. На самом деле, кроме уравнения (4), определяющего поведение поля ξ в заданном поле $\phi(x)$, требуется одновременно исследовать поведение поля $\phi(x)$ в поле плоской волны $\xi(x)$, т. е. проанализировать решение уравнения (5). Как видно из (5), при учете $\xi(x)$ в виде плоской волны вакуум поля ϕ и масса возбуждения поля ϕ над вакуумом меняются. Таким образом, задача о рассеянии частиц в поле кинка является самосогласованной, лишь если они являются малыми отклонениями от вакуума того же поля. Более того, даже связанное состояние поля ξ в потенциале кин-

ка поля ϕ может быть получено без учета обратного воздействия поля ξ на поле ϕ формально только в случае достаточно сильносвязанного уровня. Качественно это становится ясным из того, что волновая функция слабосвязанного уровня медленно убывает на больших расстояниях, и поэтому отбрасываемый в (5) член $2h^2\xi\xi^*\phi$ при $\phi(x) = v \operatorname{th}(mvx)$ становится при $x \rightarrow \pm\infty$ экспоненциально большим по сравнению с членом $(\phi^2 - v^2)\phi \propto \operatorname{ch}^{-2}(mvx)$. В случае наличия в потенциале $-h^2v^2/\operatorname{ch}^2(mvx)$ одного связанного уровня его волновая функция имеет вид [11]

$$\xi = \frac{e^{i\omega t}}{\operatorname{ch}^s(mvx)},$$

где

$$s = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\rho^2} \right).$$

Для того чтобы член $2h^2\xi\xi^*\phi$ не был при больших x экспоненциально велик по сравнению с остальными членами в (5), необходимо выполнение неравенства $s \geq 1$, откуда получаем $\rho \geq \sqrt{2}$. Итак, не только задача о рассеянии, но также задача о слабосвязанной частице поля ξ в поле кинка должны, вообще говоря, решаться с учетом обратного воздействия поля ξ на поле ϕ .

Возможность существования топологических стенок, несущих $U(1)$ -заряд, может иметь непосредственное отношение к проблеме схлопывания доменных пузырей. Задача об эволюции схлопывающегося доменного пузыря подробно и в разных аспектах исследовалась начиная с пионерской работы Зельдовича, Кобзарева и Окуня [12] (в этой связи см. также [13]). Обычно рассматривались эволюции сферически-симметричных пузырей теории $\lambda\phi^4$ с профилем поля по радиусу, отвечающим профилю кинка. Как известно, такие пузыри схлопываются, и стационарных доменных структур в теории $\lambda\phi^4$ не существует. Возможность стабилизации доменных пузырей за счет наполнения их зарядами обсуждалась, начиная с работ [14, 15]. В частности, Бардин, Чановиц, Дрелл и др. [15] обсуждали возможность стабилизации пузырей за счет наполнения их кварками. Найденные в нашей работе решения для заряженных стенок также могут быть использованы для нахождения стабильных доменных областей, несущих $U(1)$ -заряд. Здесь следует подчеркнуть, что вакуумный домен, окруженный заряженной стенкой, может, в принципе, эволюционировать в Q -болл. В дальнейшем мы планируем вернуться к вопросу о временной эволюции таких конфигураций.

Найденные нами топологические решения с $U(1)$ -зарядом, по-видимому, могут существовать

и в некоторых более общих моделях. В частности, интерес представляет решение типа «ежик» для триплета хиггсовских скалярных полей при учете его взаимодействия с комплексным полем с $U(1)$ -симметрией.

Мы благодарны Н. А. Воронову, Н. Б. Конюховой и С. В. Курочкину за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-15-96562).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Kovner, M. Shifman, and A. Smilga, Phys. Rev. D **56**, 7978 (1997); G. Dvali and M. Shifman, Phys. Lett. B **396**, 64 (1997); A. Hanany, K. Hori, Nucl. Phys. B **513**, 119 (1998); E. Witten, Nucl. Phys. B **507**, 658 (1997); J. Gauntlett, R. Portugues, D. Tong, and P. Townsend, Phys. Rev. D **63**, 085002 (2001).
2. М. Б. Волошин, ЯФ **21**, 1331 (1975).
3. G. R. Farrar and J. W. McIntosh, Phys. Rev. D **51**, 5889 (1995).
4. G. Dvali, H. Liu, and T. Vachaspati, Phys. Rev. Lett. **80**, 2281 (1998).
5. A. E. Kudryavtsev, B. M. A. G. Piette, and W. J. Zakrzewski, Phys. Rev. D **61**, 025016 (2000).
6. J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlianian, G. M. Sotkov, and A. H. Zimerman, hep-th/0007169.
7. R. Friedberg, T. D. Lee, and A. Sirlin, Phys. Rev. D **13**, 2739 (1976).
8. R. A. Leese, Nucl. Phys. B **366**, 283 (1991).
9. S. Coleman, Nucl. Phys. B **262**, 263 (1985).
10. В. А. Рубаков, *Классические калибровочные поля*, Эдиториал УРСС, Москва (1999).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
12. Я. Б. Зельдович, И. Ю. Кобзарев, Л. Б. Окунь, ЖЭТФ **67**, 3 (1974).
13. V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **155**, 36 (1985); G. Farrar and M. E. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. **70**, 2833 (1993).
14. P. Viciarely, Nuov. Cim. Lett. **4**(16), 905 (1972).
15. W. A. Bardeen, M. S. Chanowitz, S. D. Drell, M. Weinstein, and Tung-Mow Yan, Phys. Rev. D **11**, 1094 (1975).