

ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В СИЛЬНОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ

А. А. Балакин, Г. М. Фрайман*

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603600, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 31 января 2001 г.

Рассмотрено тормозное излучение электронов при столкновении с ионами в сильном лазерном поле. Обнаружено обогащение спектра тормозного излучения в достаточно сильных полях. Особое внимание уделено исследованию когерентной составляющей излучения. Предложена качественная модель, поясняющая полученные результаты. Обсуждается возможность экспериментального наблюдения когерентной составляющей излучения в сильном поле.

PACS: 34.80, 52.20.Dq, 52.20.Fs

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционный интерес к проблеме парных электрон-ионных соударений в сильных электромагнитных полях, наблюдаемый в течение уже около 40 лет [1–10], стал особенно актуальным в последние годы в связи с изобретением мощных короткоимпульсных лазеров с плотностями энергии до 10^{18} – 10^{21} Вт/см², соответствующими ультрарелятивистским осцилляторным энергиям электронов.

Возникающие при этом физические явления при исследовании взаимодействия подобных полей с обычной и кластерной плазмой и возможные приложения (от лазерного управляемого термоядерного синтеза до преобразования оптического излучения в излучение рентгеновского диапазона длин волн) привели к тому, что проблема парных соударений в плазме из чисто академической превратилась в важную прикладную проблему.

Традиционно теоретическое исследование электрон-ионных соударений проводят на основе трех моделей. Все эти модели базируются на приближении парных соударений в теории плазмы, т. е. полагается, что все характеристики интеграла столкновений для одночастичной функции распределения могут быть найдены из решения задачи рассеяния пучка невзаимодействующих электронов на одном ионе. Наибольшее распространение получила модель малоуглового рассеяния [3–7], когда в качестве невоз-

мущенной траектории электрона выбирается прямолинейная и все эффекты оцениваются в рамках теории возмущений вдоль этой траектории. Очевидно, что в рамках этого приближения столкновения электронов с ионами происходят в различные некоррелированные между собой моменты времени. А именно, в случае исходно равномерно распределенного по фазам поля пучка моменты столкновения также будут равномерно распределены по фазе поля. Кроме того, в рамках этого приближения не учитывается возможность притяжения электрона к иону в процессе рассеяния, т. е. электрон не может сильно изменить свой прицельный параметр. Квантовая модификация этой модели (борновское приближение [7]) не дает квантовых поправок в силу учета только первого порядка в квазиклассическом разложении.

Другая модель — низкочастотное приближение [8–18] — описывает сильные столкновения с большими углами рассеяния. При этом предполагается, что внешнее достаточно сильное электрическое поле ускоряет электрон до и после столкновения, а в процессе мгновенного рассеяния существенно только статическое поле ближайшего иона. Как и в модели малоуглового рассеяния, считается, что столкновения происходят в случайные моменты времени.

Во всех перечисленных выше приближениях получались результаты, различающиеся только логарифмическим множителем. Основной причиной этого, по-видимому, были общие для всех предположения о некоррелированности столкновений и о том,

*E-mail: abal@appl.sci-nnov.ru

что электрон не может менять свой прицельный параметр в процессе осцилляций около иона. Особенно наглядно это продемонстрировано в недавней работе [4], где непосредственно из интеграла столкновений в форме Ландау снова с логарифмической точностью получаются те же результаты, что и в цитированных работах. По-видимому, совпадение результатов, даваемых тремя различными на первый взгляд приближениями было причиной угасания интереса к этой тематике более чем на тридцать лет.

Понять, что учет изменения прицельного параметра в процессе осцилляций важен, можно из следующих соображений. Пусть электрон налетает на ион вдоль электрического поля волны, имея прицельный параметр ρ . Пролетая мимо иона на этом расстоянии с большой скоростью

$$v_{osc} = \frac{eE}{m\omega},$$

он рассеивается на малый угол

$$\delta\theta \sim \frac{2e^2Z}{m\rho v_{osc}^2} \equiv \frac{2b_{osc}}{\rho} \ll 1,$$

где e и eZ — заряды электрона и иона,

$$b_{osc} = e^2Z/mv_{osc}^2$$

— резерфордовский радиус, оцененный по осцилляторной скорости¹⁾. В результате электрон приобретает поперечную скорость и к следующему прохождению мимо иона через половину периода лазерного поля уменьшает прицельное расстояние на величину

$$(\pi/\omega)v_{osc}\delta\theta = 2\pi r_{osc}b_{osc}/\rho \gg b_{osc},$$

где $r_{osc} = eE/m\omega^2$ — осцилляторный радиус электрона. В частности, если это поперечное смещение совпадает с начальным значением прицельного параметра,

$$\sqrt{2\pi r_{osc}b_{osc}} \equiv \sqrt{2\pi}r_E \gg b_{osc},$$

то электрон испытывает сильное рассеяние с большим изменением дрейфовой энергии. При больших осцилляторных скоростях и осцилляторных радиусах электрона соответствующее сечение $r_E b_{osc}$ существенно превосходит сечение рассеяния, значение которого оценивается во всех указанных моделях через квадрат резерфордовского радиуса b_{osc}^2 .

¹⁾ Напомним, что резерфордовским радиусом для заданного значения скорости v обычно называют то значение прицельного параметра, при котором электрон, налетающий на ион с этой скоростью, рассеивается на угол $\pi/2$.

Учет же многократных осцилляций электрона вблизи иона и, как следствие, более заметное изменение прицельного параметра в процессе рассеяния, приводит, как показано в наших работах [11], к еще более существенным эффектам. Таким образом, основной элемент новизны как данной работы, так и наших предыдущих работ, состоит в следующем. Само понятие сильного поля для процесса рассеяния электронов на ионах определяется не только отношением осцилляторной скорости к дрейфовой, но и еще одним параметром: отношением осцилляторного радиуса электрона к размеру области, в которой кулоновское поле иона является доминирующим, r_{osc}/r_E :

$$\begin{aligned} \frac{v_{osc}}{v} &\approx 810 \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{T}\omega} \approx 130 \frac{\sqrt{P}\lambda}{T}, \\ \frac{r_{osc}}{r_E} &\approx 1.3 \cdot 10^4 \frac{P^{3/4}}{\omega^2} \approx 3.5 \cdot 10^2 P^{3/4} \lambda^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь частота ω измеряется в 10^{15} Гц, мощность P — в 10^{18} Вт/см², температура электронов T — в эВ, длина волны λ в мкм. А именно, если оба параметра, определяемых выражением (1), велики, то мы будем говорить о сильных полях. Если же это не так, то имеют место другие режимы. Если осцилляторная скорость велика по сравнению с дрейфовой, но осцилляторный радиус мал по сравнению с r_E (например, в случае высокой частоты излучения), то следует развить усредненное пондеромоторное описание. Аналогично, если велик второй параметр, а первый мал, то получатся результаты, аналогичные результатам для случая слабого поля, поскольку дрейф за период существенно превышает радиус осцилляций.

В предыдущих работах основное внимание было сосредоточено на эффектах, обусловленных заметным изменением прицельного параметра в процессе рассеяния²⁾. В настоящей работе мы остановимся на более тонких следствиях подобного процесса рассеяния, затронутых в [11] лишь поверхностно. Речь пойдет о механизме «сепарирования» электронов по фазам. Дело в том, что из-за различной эффективности притяжения электронов, имеющих разные полные скорости, определяемые как раз фазой поля в момент ближайшего нахождения электрона вблизи иона в течение каждой осцилляции, возможна группировка электронов. Это в свою очередь может как усилить энергообмен и увеличить эффективное се-

²⁾ Идея важности учета многократных возвратов электрона к одному и тому же иону получила свое развитие в недавней работе [15] при вычислении вероятности многократной ионизации.

чение, так и привести к новым, а порой и неожиданным результатам. К сожалению, аналитическая модель такого притяжения достаточно сложна. Поэтому в данной работе мы в основном будем опираться на результаты численного моделирования и простейшие оценки.

Проведенное нами численное исследование соударений электронов и ионов показало важную роль корреляционных эффектов при столкновениях в сильных полях [11]. При этом осциллирующий электрон многократно возвращается к одному и тому же иону, сохраняя и накапливая «память» о фазах предыдущих столкновений. Результатом этих коррелированных возвратов является, с одной стороны, увеличение притяжения электрона ионом, а с другой стороны, «группировка» электронов в определенных фазах поля с последующим сильным рассеянием образовавшихся сгустков электронов на кулоновском центре. Следствием увеличения притяжения должно быть усиление интенсивности тормозного излучения, а эффект группировки приводит к возможности появления когерентного излучения из плазмы. Именно исследование особенностей спектров тормозного излучения является основной целью настоящей работы.

Все непосредственные расчеты спектров тормозного излучения при электрон-ионных соударениях были выполнены в дипольном приближении. Это означает, что мы ограничиваемся нерелятивистскими уровнями интенсивностей лазерного поля. В этом случае поле накачки можно считать однородным на масштабах области, существенной для столкновений, не превосходящих осцилляторный радиус электрона [11], т. е.

$$r_{osc} k_0 \ll 1,$$

где $k_0 = \omega_0/c$, ω_0 — частота поля. Как и во всех цитированных выше работах, предполагается выполненным условие приближения парных столкновений, т. е. плазма считается достаточно разреженной. Такой подход позволяет определить основные характеристики столкновений в плазме через данные рассеяния на одном ионе потока невзаимодействующих осциллирующих в сильном поле электронов. Как правило, если это не оговорено особо, мы будем рассматривать случай прозрачной для лазерного излучения плазмы ($\omega_0 \gg \omega_p$).

Работа построена следующим образом. Сначала мы вводим общие выражения для характеристик некогерентного и когерентного излучений при электрон-ионных столкновениях в сильном лазерном поле (разд. 2). В разд. 3 представлены результаты чис-

ленного моделирования этих характеристик и показано, что интенсивность некогерентного излучения существенно возрастает по сравнению с излучением плазмы той же температуры без внешнего поля. Здесь же представлены результаты по спектрам когерентной компоненты столкновительного тока. В заключении на качественном уровне обсуждаются основные особенности найденных спектров. В частности, показано, что как рост интенсивности некогерентной компоненты, так и основной вклад в излучение на гармониках лазерного поля определяется малой долей электронов, в основном рассеиваемых назад (по отношению к лазерному полю) и, как следствие этого, существенно изменяющих величину дрейфовой скорости. Там же даны оценки условий применимости полученных результатов и интерпретация возможных особенностей экспериментального обнаружения обсуждаемых эффектов.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Если использовать приближение парных столкновений для определения характеристик рассеяния электронов на ионе, то достаточно рассмотреть задачу о рассеянии на ионе отдельного электрона (рис. 1) с зарядом e , имеющего дрейфовую скорость \mathbf{v}_- , в сильном однородном электрическом поле волны, поляризованной вдоль оси z

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = E \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}) \mathbf{z}_0, \quad (2)$$

в рамках классического уравнения движения. Ограничимся нерелятивистским пределом. В этом случае излучение электрона можно считать дипольным,

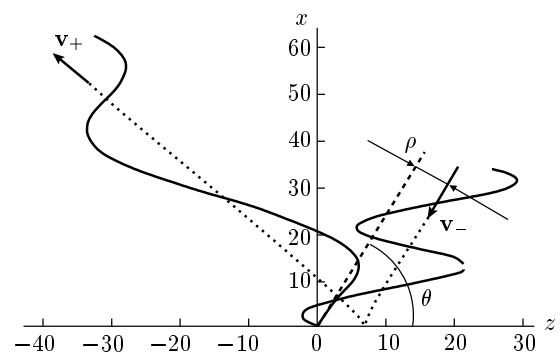


Рис. 1. Типичная траектория электрона (сплошная линия), дрейфовая траектория (пунктир) и параметры рассеиваемого электрона (ρ — прицельный параметр, θ — угол между скоростью и полем E)

кроме того, при рассмотрении движения нерелятивистского электрона, в силу условия $k_0 r_{osc} \ll 1$, можно считать поле волны однородным на масштабах столкновения и заменить координату электрона R в (2) на координату ближайшего иона. При этом уравнение движения электрона имеет следующий вид:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{Ze^2\mathbf{R}}{R^3} + \mathbf{z}_0 eE \cos \omega t. \quad (3)$$

Уравнение движения (3) имеет следующие характерные масштабы:

$$r_E = \sqrt{\frac{eZ}{E}} = \sqrt{b_{osc} r_{osc}}, \quad (4)$$

$$\omega_E = \sqrt[4]{\frac{eE^3}{m^2 Z}}, \quad v_E = \sqrt[4]{\frac{Ze^3 E}{m^2}}. \quad (5)$$

В безразмерных переменных с масштабами (4) уравнение движения имеет вид (обозначения прежние)

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \mathbf{z}_0 \cos \Omega t. \quad (6)$$

Как и в [11], удобно перейти в осциллирующую систему координат:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \frac{\mathbf{z}_0}{\Omega^2} \cos \Omega t. \quad (7)$$

Тогда уравнение движения для дрейфовой координаты электрона \mathbf{r} (7) примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{z}_0}{\Omega^2} \cos \Omega t \right|}. \quad (8)$$

В отсутствие кулоновского потенциала дрейфовая траектория представляет собой прямую. Разумеется, в периодически осциллирующем потенциале эта траектория может стать весьма сложной [11], чем и объясняются анализируемые в работе эффекты.

В уравнения (6), (8) входит всего один безразмерный параметр — безразмерная частота

$$\Omega = \omega \sqrt[4]{\frac{m^2 Z}{eE^3}} = \frac{\omega_0}{\omega_E} = \sqrt[4]{\frac{b_{osc}}{r_{osc}}} = \sqrt{\frac{r_E}{r_{osc}}}. \quad (9)$$

Другим параметром задачи является отношение начальной дрейфовой скорости рассеиваемого электрона к v_E из (5).

Согласно (1), мы будем в дальнейшем называть областью сильного поля область, в которой одновременно выполнены следующие условия. 1) Дрейфовая скорость электронов по сравнению с их осцилляторной скоростью мала. 2) Амплитуда поля достаточно велика [11], т. е., с учетом (9),

$$\frac{v}{v_{osc}} = \Omega v \ll 1, \quad \frac{\omega}{\omega_E} = \Omega \ll 1. \quad (10)$$

Первое условие соответствует тому, что электрон может совершать многократные осцилляции при движении около иона в поле волны. Второе условие — это условие малости размера области, в которой кулоновское поле иона существенно, по сравнению с амплитудой осцилляций электрона.

Найдем в рамках указанных приближений излучение электронов при столкновениях. В отсутствие лазерного поля традиционно анализируется «эффективное излучение», оцениваемое как спектральная плотность интенсивности некогерентного излучения пучка электронов, рассеиваемого одним ионом [13]. Мы воспользуемся естественным обобщением этой характеристики, рассматривая излучение, обусловленное дрейфовым движением частиц, т. е. спектральную плотность интенсивности некогерентного излучения пучка осциллирующих электронов с заданной начальной дрейфовой скоростью:

$$\chi_\omega = \frac{2e^2\omega^4}{3c^3} \int \langle |\mathbf{r}_\omega|^2 \rangle_\varphi d^2\rho, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{r}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

— фурье-спектр дипольного момента отдельного электрона, φ — фаза «влета», определяемая как фаза поля в момент пролета электроном плоскости прицельных параметров ρ ; $\langle \dots \rangle_\varphi$ здесь и ниже означает усреднение по фазе влета. Плоскость прицельных параметров ρ (рис. 1) перпендикулярна вектору начальной скорости электронов и находится настолько далеко от иона, что влиянием кулоновского поля на движение в этой области можно пренебречь.

В частности, используя эту характеристику для плазмы с плотностью электронов n_e и ионов n_i , для спектральной плотности интенсивности некогерентного излучения из единицы объема плазмы имеем

$$dI_{inc} = \chi_\omega n_e n_i v_T d\omega. \quad (12)$$

Для численного моделирования удобно ввести безразмерную величину χ_{inc} :

$$\chi_{inc}(\omega) = \chi_\omega \frac{3c^3}{2e^2} \frac{1}{r_E^4 \omega_E^2}. \quad (13)$$

В качестве характеристики когерентного излучения можно выбрать величину сечения когерентного излучения χ_{coh} , пропорциональную когерентной компоненте плотности столкновительного тока. Выпишем выражение для амплитуды n -ой гармоники этого тока (см. Приложение):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_n^{col} &= en_e n_i v_- \frac{2\pi}{\omega} \chi_{coh}(n\omega_0), \\ \chi_{coh}(\omega) &= \int \omega^2 \langle \mathbf{r}_\omega \rangle_\varphi d\rho. \end{aligned} \quad (14)$$

Введенная нами величина χ_{coh} имеет размерность площади, умноженной на скорость, и именно через нее выражаются все характеристики когерентного излучения. Как ясно из (14), плотность столкновительного тока пропорциональна произведению концентраций электронов и ионов. Качественно это объясняется тем, что сам электронный ток пропорционален произведению концентрации электронов на усредненное по начальным условиям изменение скорости электронов, которое в свою очередь пропорционально частоте столкновений и, следовательно, концентрации ионов.

Отметим, что, в отличие от сечения некогерентного рассеяния (11), введенное нами «сечение когерентного рассеяния» χ_{coh} на гармониках поля накачки является комплексной величиной. Фаза этой величины соответствует сдвигу фаз между полем накачки и когерентной компонентой гармоники столкновительного тока. Аналогично для расчетов удобно ввести безразмерную величину χ_{coh}^{new} :

$$\chi_{coh}^{new} = \frac{\chi_{coh}}{r_E^3 \omega_E}.$$

В дальнейшем индекс «new» будет опущен.

Ниже основное внимание будет уделено вычислению спектральных характеристик χ_{inc} (13) и χ_{coh} (14).

3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для определения спектральных характеристик проводились вычисления сечений излучения, определяемых соотношениями (11), (14) для когерентного и некогерентного случаев. В ходе численного эксперимента рассчитывался дипольный момент пучков электронов с дрейфовыми скоростями от $0.03v_{osc}$ до $3v_{osc}$ и прицельными параметрами до $5r_{osc}$. Вычисления проводились для пяти значений частот $\Omega = 0.1, 0.2, 0.32, 1, 3.2$. Электроны считались исходно равномерно распределенными по фазе влета. Начальное расстояние от кулоновской особенности до ведущего центра частиц выбиралось равным

$3r_{osc}$; частица считалась покинувшей область взаимодействия при удалении ведущего центра от кулоновской особенности на расстояние более $3r_{osc}$. Особое внимание уделялось выбору достаточного числа частиц на периоде поля. Расчеты проводились для продольного ($\mathbf{v}_- \parallel \mathbf{E}$) и поперечного ($\mathbf{v}_- \perp \mathbf{E}$) рассеивающихся пучков. В расчетах вычислялись характеристики излучения при рассеянии электронов на ионе вплоть до 20-ой гармоники лазерного поля накачки.

Как было показано в [11], главным отличием столкновений в сильных полях является появление заметной доли электронов, рассеивающихся на большие углы. Их появление связано с сильным притяжением электрона вследствие его многократных коррелированных осцилляций около иона (рис. 1). Результатом этого адиабатического подтягивания (мы называем его эффектом «парашюта») является попадание электронов в малую окрестность иона и их последующее рассеяние на большие углы.

На рис. 2 приведены зависимости энергии и фазы столкновения от прицельного параметра и начальной фазы рассеивающихся электронов. Очевидно, что эти зависимости периодичны по начальной фазе в силу периодичности поля накачки. Отметим важную особенность зависимости изменения дрейфовой энергии частиц от прицельного расстояния, $\Delta w(\rho)$. В сильных полях вследствие эффекта парашюта электрон может сильно изменить свою энергию (более темный цвет на рис. 2a), даже если он изначально имел прицельный параметр, много больший резерфордского радиуса b_{osc} , оцененного по осцилляторной скорости частицы. Аналогично, рис. 2b демонстрирует эффект группировки. Здесь одинаковому цвету соответствует одинаковая фаза момента последнего (наиближайшего) прохождения электрона вблизи иона. Видно, что оба эффекта имеют место только в области существенного изменения прицельного параметра в процессе рассеяния.

Граница этой области может быть легко оценена из простых аналитических соображений. Действительно, в осциллирующей системе координат (7), (8) ион осциллирует, а невозмущенная траектория для электрона представляет собой прямую линию. При каждом возврате иона дрейфовая траектория слегка изменяет свой наклон (мгновенный удар) и приближается к иону. Для того чтобы набрать большую дрейфовую энергию (существенно изменить свой продольный импульс), электрону необходимо попасть в малую окрестность иона, такую что

$$r \leq b_{osc} \ll b_v \ll r_{osc}$$

Рис. 2. Зависимости изменения энергии (*a*) и фазы столкновения (*b*) от прицельного параметра и начальной фазы влета рассеивающихся электронов для $v = 1$ и $\Omega = 0.1$ (продольное рассеяние, $\mathbf{v}_- \parallel \mathbf{E}$)

(здесь $b_v = e^2 Z/mv^2$ — резерфордский радиус электрона, имеющего скорость v).

Оценим максимальный прицельный параметр, при котором это возможно. Ограничимся случаем продольного рассеяния. Пусть электрон рассеялся на ионе на малый угол

$$\delta\theta \sim b_v/\rho_{att} \ll 1.$$

Тогда для сильного изменения энергии он должен успеть пролететь в малой окрестности иона. Это возможно, если он за время пролета радиуса осцилляций иона сможет приблизиться на расстояние, равное его начальному прицельному параметру ρ , т. е. должно выполниться условие

$$\rho_{att}/2r_{osc} \approx \delta\theta$$

или

$$\rho_{att} \approx \sqrt{2b_v r_{osc}} = \frac{\sqrt{2}}{\Omega v}. \quad (15)$$

Таким образом, эффект парашюта увеличивает площадь, с которой частицы могут рассеяться на большой угол и, соответственно, сильнее излучать (рис. 3).

Прежде всего, на рис. 3 видно существенное возрастание спектральной плотности энергии излучения в сильных полях. Так, если в традиционных моделях в области плато справедлива оценка

$$\chi \propto \frac{1}{v^2},$$

то наши результаты хорошо аппроксимируются зависимостью

$$\chi \propto \frac{\pi}{2\Omega^2 v^2}$$

для продольного падения. Мы видим нарастание тормозного излучения с ростом интенсивности поля накачки, а не его убывание, как в традиционных моделях.

Этот результат можно истолковать следующим образом. Он означает, что основное излучение дают не все электроны плазмы, а лишь относительно небольшая их часть, рассеивающаяся на большие углы. Ранее [11] эти электроны были названы нами «представительными» электронами. Действительно, среднее изменение их скорости имеет порядок осцилляторной скорости $1/\Omega$, они собираются с площади

$$\rho_{att}^2 \sim \frac{1}{\Omega^2 v^2},$$

их доля — порядка Ω^2 . Движение их представляет собой [11] плавное подтягивание к иону и мгновенное столкновение с резким изменением импульса (и энергии) частицы. Таким образом, они излучают энергию со спектральной плотностью порядка

$$\chi \approx \left(\frac{1}{\Omega}\right)^2 \frac{1}{\Omega^2 v^2} \Omega^2 = \frac{1}{\Omega^2 v^2}, \quad (16)$$

что сравнимо с величиной, найденной нами в результате численного моделирования.

Рис. 3. Зависимости спектральной плотности энергии излучения от прицельного параметра: результат численного моделирования (а) и традиционные представления (б)

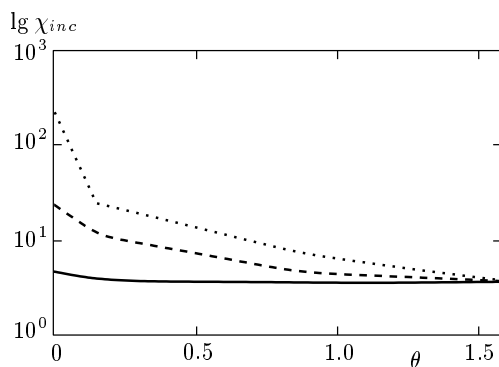


Рис. 4. Зависимость сечения некогерентного излучения от угла между начальной скоростью пучка и полем для $v = 1$ при разных частотах волны накачки: $\Omega = 1$ (случай слабого поля) — сплошная линия, $\Omega = 0.316$ — крупные штрихи, $\Omega = 0.1$ — мелкие штрихи

Отметим, что, согласно [13], излучение частицы, движущейся описанным выше образом, должно равняться квадрату от изменения скорости. Для представительных электронов эта величина примерно равна изменению энергии частицы. Другими словами, сечение некогерентного излучения должно совпадать с интегральным изменением энергии пучка, что и демонстрируют расчеты. Для пучка частиц, имеющего начальную скорость, перпендикулярную вектору электрического поля, изменение энергии значительно меньше [11]. Соответственно и спектральная плотность энергии излучения таких частиц меньше:

$$\chi \approx \frac{1}{v^2}. \tag{17}$$

После интегрирования по телесному углу в про-

странстве скоростей налетающих частиц мы получим зависимость сечения некогерентного излучения вида (17). Таким образом, остается справедливой формула для традиционных моделей из области слабого поля, хотя существует доля частиц, излучающих значительно сильнее. Ситуация здесь аналогична ситуации с энергообменом [11] (рис. 4).

Другую важную особенность рассеяния электронов в сильных полях отражает рис. 2б. На нем изображена фаза поля в момент столкновения электронов с ионом, φ_{col} , взятая по модулю 2π — периоду поля накачки, в зависимости от их прицельных параметров и начальной фазы. Области одного цвета соответствуют одинаковой фазе столкновения. На рисунке мы видим чередующиеся области (темные и светлые) с резкими переходами, соответствующими представительным электронам, между ними. Это означает, что почти все электроны плазмы приходят в малую окрестность иона³⁾ в одной из этих двух фаз поля накачки. Указанная группировка по фазам подготавливается адиабатическим дрейфом электронов (эффектом парашюта). Напомним, что в традиционных моделях [2–10] столкновения считаются равно распределенными по фазам поля.

Более детально эффект группировки демонстрирует рис. 5. На нем приведены распределения частиц по фазам столкновения в зависимости от параметров Ω и v .

Легко видеть, что с ростом отношения v_{osc}/v_T все электроны собираются в два достаточно узких максимума вблизи максимумов осциляторной скорости. Ширина этих максимумов пропорциональна

³⁾ Более детальное рассмотрение показывает, что все электроны из области притяжения к моменту столкновения стягиваются в окрестности иона размером r_E .

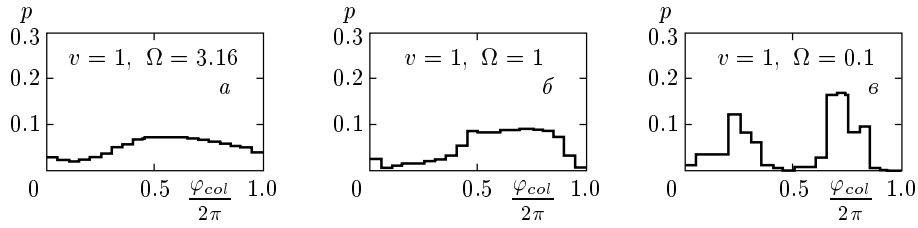


Рис. 5. Распределение частиц по фазам столкновения для продольного падения в зависимости от параметров v и Ω

отношению v_T/v_{osc} . Из рис. 5а видно, что при большой тепловой скорости электронов $v_T > v_{osc}$ эффект фазовой группировки пропадает и становится применима традиционная модель столкновений для слабого поля.

Ширина пиков на функции распределения электронов по фазе столкновения определяет ширину спектра когерентного излучения. Чем уже пики на функции распределения, тем шире спектр когерентного излучения (ср. рис. 6). В соответствии со сказанным выше количество пиков растет с ростом отношения v_{osc}/v_T . Когерентное излучение, как и ожидалось, полностью пропадает при $v_T > v_{osc}$.

Наличие в спектре когерентной компоненты тока в основном нечетных гармоник обусловлено тем, что группировка реализуется дважды в течение одного полупериода в фазах поля, сдвинутых по отношению друг к другу на половину периода (рис. 5). Это означает, что в течение каждого пика группировки электроны рассеиваются в направлении, антипараллельном мгновенной осцилляторной скорости. Таким образом, столкновительный ток на каждом периоде представляется в виде двух пиков противоположной полярности, сдвинутых на половину периода.

Результаты численного моделирования сечения когерентного излучения на n -ой гармонике в сильных полях можно аппроксимировать следующей зависимостью:

$$\chi_{coh} \propto \frac{1}{\Omega v^2 n}. \quad (18)$$

Эта величина может быть оценена (ср. оценку интенсивности некогерентного излучения (16)) по току представительных электронов как произведение их скорости v_{osc} на сечение, с которого они собираются $\pi \rho_{att}^2$, на их долю из общего числа электронов Ω^2 и на множитель Φ , характеризующий степень группи-

ровки частиц по фазам столкновения:

$$\chi \approx v_{osc} \rho_{att}^2 \Omega^2 \Phi_n(\Omega v) = \frac{\Phi_n(\Omega v)}{\Omega v^2}. \quad (19)$$

Заметим, что величина $\Phi(v\Omega)$ имеет колоколообразный вид: равна единице при $v\Omega \ll 1$ и быстро уменьшается при $v\Omega \geq 1$. К сожалению, область параметров при расчете излучения была выбрана так, что мы не можем установить однозначной зависимости сечения χ_{coh} от скорости, в силу того что параметр $v\Omega$ попадал на область перегиба функции $\Phi(v\Omega)$, а расчет с очень малыми дрейфовыми скоростями значительно затруднен. Мы приводим зависимость от скорости в (18) как $\propto 1/\Omega v^2$, поскольку как простые, так и более сложные модели дают значения для сечения χ_{coh} , хорошо согласующиеся с полученными в ходе расчетов.

В заключение этого раздела следует отметить две важные особенности когерентного излучения (18):

- 1) излучение имеет довольно широкий спектр, убывающий как $1/n$, где n — номер излучаемой гармоники;
- 2) основной вклад в когерентное излучение дает малая доля представительных электронов.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим в заключение те важные особенности, которые были обнаружены нами при численном моделировании.

Прежде всего, это уменьшение прицельного расстояния (минимального расстояния до иона на каждом периоде поля) вследствие того, что электрон имеет возможность притянуться к иону в процессе нескольких последовательных осцилляций вблизи него. В силу того что при каждом пролете электрон приближается к иону и, следовательно, кулоновское поле возрастает, угол рассеяния на каждой

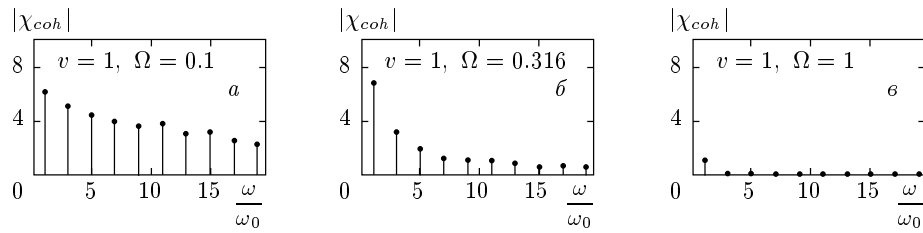


Рис. 6. Зависимости сечения когерентного излучения от номера излучаемой гармоники для разных частот поля накачки Ω

последующей осцилляции будет больше предыдущего. Здесь необходимо заметить, что хотя почти все рассеяния при пролете электрона мимо иона можно считать малоугловыми, суммарное рассеяние малоугловым может уже и не быть (прежде всего для представительных электронов). Другими словами, при моделировании столкновений электронов с ионами нельзя ограничиваться малоугловым приближением [11], а необходимо учесть и возможность большого изменения угла, и малые прицельные расстояния при последнем столкновении.

Это замечание особенно существенно для понимания эффектов, связанных с тормозным излучением. Дело в том, что вклад в излучение отдельного электрона определяется изменением его импульса, а не энергии. В частности, на частотах, малых по сравнению со временем столкновения, амплитуда поля излучения и его интенсивность пропорциональны соответственно изменению самого импульса и квадрату этого изменения [13]. Именно поэтому основной вклад в излучение в нашем случае вносят частицы с большим изменением продольного импульса (вдоль лазерного поля), хотя их доля и мала. Таковыми являются представительные электроны. Значительная доля таких частиц рассеивается с большой компонентой изменения импульса (порядка mv_{osc}) в направлении, противоположном направлению осцилляторной скорости в момент последнего удара. Если теперь учесть, что сечение некогерентного излучения в модели мгновенного удара (на низких частотах), согласно [13], пропорционально сумме квадратов изменений импульсов вдоль и поперек поля накачки, усредненной по фазе поля и проинтегрированной по прицельным параметрам, то мы немедленно приходим к оценкам (16), хорошо согласующимся с численными результатами.

Прежде чем переходить к анализу излучения на гармониках, сделаем еще два полезных замечания, связанных с результатами исследований по некогерентному излучению.

Первое замечание состоит в том, что спектр излучения в сильных полях соответствует спектру белого шума, т. е. практически не зависит от частоты, в том числе и на низких частотах (рис. 5). Это связано с тем, что представительные электроны, ответственные за это излучение, могут появиться только из ограниченной области прицельных параметров (области парашюта). Эта область имеет очень резкую границу [12], так что пропадает эффект «кулоновского логарифма», с которым и связана логарифмическая расходимость спектра тормозного излучения в традиционных моделях.

Известно, что логарифмическая расходимость в интеграле столкновений Ландау и в теории тормозного излучения связана с вычислением транспортного сечения столкновений в плазме. При этом при интегрировании по прицельным параметрам ограничиваются размером зоны неадиабатического взаимодействия $\rho = v/\omega$. В сильных полях (10) область парашюта заведомо больше [11], чем эта величина, и резко очерчена (с больших расстояний электрон не может притянуться к иону на расстояние порядка резерфордовского радиуса, оцениваемого по осцилляторной скорости). А именно, это необходимо для существенного энергообмена. Именно поэтому и не наблюдается увеличение спектра тормозного излучения на низких частотах. Однако при поперечном влете электронов при не слишком малых скоростях (больших порядка $r_E\omega$) эффект парашюта не наблюдается и излучение получается таким же, как и в задаче без поля. Именно оно определяет полное излучение (после интегрирования по углу влета). Следует отметить, что и в сильных полях при оценке $\delta v dp$ мы снова приходим к выражению, аналогичному результату, полученному без учета поля. При этом кулоновский логарифм следует заменить на большую величину. Таким образом, решение задачи без учета поля дает для данной величины оценку снизу.

Второе замечание сводится к тому, что, как было обнаружено нами, спектр излучения практически не

зависит от поляризации поля накачки (рис. 4). Это обусловлено тем, что эффект парашюта не чувствителен к поляризации [12], поскольку теперь осцилляторное движение сводится к движению по окружности, и электрон, находясь на ближайшем расстоянии около иона, снова испытывает рассеяние. В результате при следующем прохождении (осцилляции) он оказывается еще ближе к иону. Подробнее исследование задачи рассеяния в поле с циркулярной поляризацией требует отдельного рассмотрения.

Еще более показательна роль представительных электронов в когерентном излучении на гармониках. Дело в том, что в силу изотропии задачи излучение, связанное с изменением поперечной по отношению к полю накачки компоненты импульса, в дипольном приближении отсутствует. Поэтому когерентное излучение целиком связано с изменением импульса вдоль поля. При этом, поскольку электроны, испытывающие малый энергообмен, изменяют свой продольный импульс только во втором порядке по углу рассеяния, основной вклад в излучение должны вносить и вносят представительные электроны. Исходя из этого, для амплитуды сечения когерентного рассеяния была получена оценка (19). Первый множитель v_{osc} соответствует характерной величине изменения продольного импульса представительных электронов, второй — площади области парашюта, а третий — доле представительных электронов. По зависимости от интенсивности лазерного поля и по порядку величины эта оценка согласуется с полученными результатами. Разумеется, претендовать на большее вряд ли возможно, поскольку для детального сопоставления нужна более точная модель эффектов группировки, информация о которых заключена в функции Φ . В оценке же (19) мы ограничились пределом дельта-аппроксимации, т. е. полагали, что все последние рассеяния происходят точно в фазах, соответствующих максимумам осцилляторной скорости (фазах нулей поля накачки). К сожалению, нам пока не удалось построить убедительную аналитическую модель эффекта группировки (рис. 5). Поэтому во всех приведенных оценках мы принимали эту предпосылку как экспериментальный результат.

Относительно качественной стороны вопроса можно лишь заметить, что поскольку угол рассеяния электрона на каждом пролете зависит от его скорости, которая в свою очередь зависит от фазы поля в момент пролета электрона на ближайшем расстоянии от иона, эффективность энергообмена, определяемая фазой поля в момент столкновения (последнего прохождения вблизи иона), целиком зависит от фазы поля. По сути это и есть механизм

разделения электронов по фазам поля. Результатом его действия является приход почти всех электронов к иону в определенных фазах внешнего поля, т. е. эффект группировки по фазам!

Из сказанного выше следует, что появление слабого внешнего высокочастотного поля не приводит к заметной модификации сечения тормозного излучения при тепловой скорости электронов, большей их осцилляторной скорости. В сильных полях тормозное излучение возрастает, в силу того что внешнее ВЧ поле, с одной стороны, стягивает электроны в малую окрестность иона (эффект парашюта), а с другой стороны, разгоняет их до больших, по сравнению с тепловой, скоростей, повышая тем самым величину ускорений и, соответственно, излучение частиц. Оба эти эффекта в сумме дают увеличение тормозного излучения в сильных полях.

В заключение приведем оценки для интенсивностей некогерентного и когерентного излучений, а также условий применимости полученных результатов в размерном виде. В дальнейших формулах температура электронов T будет измеряться в эВ, мощность P — в 10^{18} Вт/см², частота — в 10^{15} Гц, длина волны λ — в мкм, концентрация n — в 10^{18} см⁻³, полная интенсивность излучения I_{coh} — в Вт, длительность импульса τ — в 10^{-15} с.

Оценим вначале характерные величины излучения. Начнем с некогерентного излучения. Из формул (11) и (18) находим, что интенсивность некогерентного излучения в единице объема приблизительно равна следующей величине:

$$dI_{inc} \approx 9 \cdot 10^{-6} \frac{n^2 Z^2}{\sqrt{T}} d\omega. \quad (20)$$

Приведенное выражение является оценкой снизу. При малых температурах $v_T \ll r_E \omega$ интенсивность излучения, по-видимому, выходит на уровень

$$dI_{inc} \approx 0.4 \frac{n^2 P^{3/4}}{\sqrt{T} \omega^2} d\omega. \quad (21)$$

Аналогично из формул (14), (34) и (18) можно получить выражение для оценки снизу для когерентной составляющей излучения на k -ой гармонике:

$$(I_{coh})_k \approx 2 \cdot 10^2 \frac{L n^2 \omega Z^4}{k^2 P T} \delta_n \left(\frac{\omega_p a}{c} \right). \quad (22)$$

Здесь δ_n — фактор, связанный с геометрическими размерами пучка (см. формулу (35) Приложения), L — длина области сильного поля в мкм (рис. 7). Коэффициент преобразования в k -ую гармонику запишется в виде

$$\eta_k \approx 5 \cdot 10^{-8} \frac{n^2 Z^4}{a k^2 P^2 T \lambda^5}, \delta_n \left(\frac{\omega_p a}{c} \right), \quad (23)$$

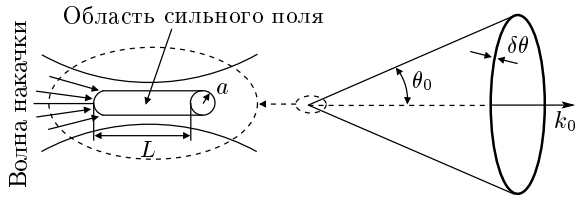


Рис. 7. Допустимые значения углов излучаемых волн

где a — радиус области сильного поля в мкм (рис. 7). Отметим, что в силу того что когерентная компонента плотности столкновительного тока пропорциональна квадрату концентрации (14), интенсивность когерентного излучения (34), на первый взгляд, должна быть пропорциональна четвертой степени концентрации. Фактически, в результате решения электродинамической задачи об излучении столкновительного тока (см. Приложение) мы получили только вторую степень концентрации. Точнее говоря, результат оказывается еще более сложным, поскольку множитель δ_n сам является сложной функцией концентрации.

Выпишем теперь условия применимости полученных результатов. Очевидно, что должны выполняться условия сильного поля (10), которые в размерном виде записываются как

$$v \ll v_{osc} \Leftrightarrow T \ll 6.67 \cdot 10^5 \frac{P}{\omega^2}, \quad (24)$$

$$\omega \ll \omega_E \Leftrightarrow \omega \ll 1.12 \cdot 10^2 P^{3/8}. \quad (25)$$

Другим важным условием является условие, накладываемое на величину длительности импульса τ_{imp} : она должна быть больше времени пролета характерной области взаимодействия с ионом (порядка двух осцилляторных радиусов) с дрейфовой скоростью:

$$\tau_{imp} \gg \frac{v_{osc}}{v} \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \tau_{imp} \gg 5.12 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{P}{T}} \frac{1}{\omega^2}. \quad (26)$$

Необходимо заметить, что в результате численных расчетов получалась заметная доля «захваченных» электронов — частиц, не покидающих область взаимодействия r_{osc} в течение времени, существенно большего, чем время пролета этой области $2r_{osc}/v_T$. При возрастании поля доля таких электронов увеличивается.

Еще одно условие возникает из использованного нами классического описания. Можно показать [12], что оно эквивалентно условию

$$r_E \gg \lambda_{osc} = \frac{h}{mv_{osc}} \Leftrightarrow P \gg 2.4 \cdot 10^{-8} \frac{\omega^4}{Z^2}. \quad (27)$$

Таким образом, с ростом поля условия применимости классического описания в задаче о парных столкновениях становятся менее строгими. Качественное объяснение этого заключается в том, что собственно энергообмен происходит в области с размером r_E , обратно пропорциональным корню из амплитуды поля (4). Поскольку длина волны де-Бройля электрона, оцененная по его осцилляторной скорости, уменьшается еще быстрее (обратно пропорционально первой степени поля), квантовые поправки должны быть несущественными.

Условие, накладываемое на концентрацию, является наиболее жестким. Формально приведенные результаты справедливы только в достаточно разреженной плазме, где $N \ll (\lambda v/c)^{-3}$ (λ — длина волны излучения в мкм). Однако можно ожидать, что аналогичные эффекты имеют место и в более плотной плазме. Действительно, существенным является только то, что в объеме, определяющем область притяжения, $r_{osc} \rho_{att}^2$ было бы не более одного иона, так как нахождение другого иона на данном пути электрона, рассеивающегося на ионе, может существенным образом нарушить динамику и свести все корреляционные эффекты к минимуму. В размерных переменных это условие имеет вид

$$n \leq 3 \cdot 10^{15} \frac{T \omega^4}{PZ} \approx 4 \cdot 10^{16} \frac{T}{\lambda^4 PZ}. \quad (28)$$

В более плотной плазме описанные в настоящей работе эффекты будут проявляться не полностью (они будут ослаблены, изменится зависимость от параметров), однако они будут иметь место вплоть до концентраций

$$N b_{osc}^2 r_{osc} \leq 1.$$

В такой плазме соседние ионы не влияют на траекторию электрона за период изменения внешнего поля и позволяют ему совершить одну осцилляцию и притянуться к иону с расстояний порядка

$$r_E = \sqrt{b_{osc} r_{osc}}.$$

Детальные расчеты этого случая нами не проводились, но из общих соображений мы полагаем, что по сравнению с традиционными моделями должны наблюдаться усиление некогерентного тормозного излучения в r_{osc}/b_{osc} раз (по аналогии с увеличением эффективного сечения [11]) и появление слабого когерентного излучения. В еще более плотной плазме, где

$$N b_{osc}^3 \sim 1,$$

корреляционные эффекты полностью пропадают и начинают работать традиционные модели [16].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-02-16443).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Характеристики когерентного излучения

Выведем соотношение (14). Поскольку имеет место эффект группировки электронов по фазам, о котором говорилось выше, представляет интерес исследование когерентного излучения электронов. Коррелированность моментов столкновений и фазы внешнего поля приводит к тому, что дипольный момент зависит не просто от времени, а от

$$t - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{k}_0 / \omega_0, \tag{29}$$

где r_i — координата столкновения. Другими словами, в плазме возбуждается волна «вспышек» тормозного излучения, бегущая вместе с волной поля накачки.

Для определения интенсивности излучения найдем столкновительный ток электронов (током ионов пренебрегаем вследствие малости параметра m_e/M_i). Прежде всего, в соответствии с общей идеологией приближения парных соударений, рассмотрим дрейфовый ток \mathbf{j}_{eff} , соответствующий рассеянию пучка электронов с концентрацией n_e с невозмущенной скоростью \mathbf{v}_- на одном неподвижном ионе:

$$\mathbf{j}_{eff} = en_e \langle \int (\mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}, t, t_0) - \mathbf{v}_-) d\boldsymbol{\rho} \rangle_{\varphi}. \tag{30}$$

Определенная таким образом величина имеет размерность тока. Усреднение по начальной фазе φ соответствует периодичности внешнего поля во времени. Из этой периодичности вытекает, что ток \mathbf{j}_{eff} также является периодической функцией и может быть представлен в виде ряда Фурье с гармониками \mathbf{j}_n , такими что

$$\mathbf{j}_n = en_e \chi_{coh}(n\omega_0). \tag{31}$$

Величина χ_{coh} (см. (14)) имеет размерность площади, умноженной на скорость, и именно через нее выражается мощность когерентного излучения.

Действительно, с помощью (30), (31) плотность столкновительного тока в плазме записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_n^{col} &= \frac{2\pi n_i v_-}{\omega} \mathbf{j}_{eff} = \sum_n \mathbf{j}_n^{col} \exp(in\omega_0 t) = \\ &= \frac{2\pi en_e n_i v_-}{\omega} \chi_{coh}(n\omega_0). \end{aligned} \tag{32}$$

Для определения величины интенсивности излучения из плазмы необходимо решить электродинамическую задачу об излучении столкновительного тока (32) с учетом конкретной геометрии профиля плазмы и ее концентрации. Интенсивность излучения тока на частоте $n\omega_0$ в телесный угол do можно найти, используя хорошо известное решение уравнения Гельмгольца, подставив в него ток \mathbf{j}_n^{col} :

$$I_n = \frac{1}{2\pi c} \left| \mathbf{k}_{n\omega_0} \times \int \mathbf{j}_n^{col} \exp(-i\mathbf{k}_{n\omega_0} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 do. \tag{33}$$

В заключение приведем оценку интенсивности полного излучения на n -ой гармонике I_n в предположении, что распределение столкновительного тока (область сильного поля) однородно внутри цилиндрического стержня радиуса a и длины L (ось z направлена вдоль волнового вектора поля накачки \mathbf{k}_{ω_0}):

$$I_n = \frac{(j_n^{col})^2}{2\pi c} (k_{n\omega_0})^2 \delta_n. \tag{34}$$

Здесь

$$\delta_n = \left| \int \exp[i(n\mathbf{k}_{\omega_0} - \mathbf{k}_{n\omega}) \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r} \right|^2$$

— множитель, отвечающий за направление излучения, который равен

$$\delta_n = \left| \frac{4\pi a^2}{k_{\perp} a} J_1(k_{\perp} a) \int_0^L \exp[i(nk_0 - k_z)z] dz \right|^2, \tag{35}$$

где $J_1(k_{\perp} a)$ — функция Бесселя первого порядка.

Легко видеть, что величина δ_n (а следовательно, и интенсивность) максимальна, если выполнено условие для направления волнового вектора излучаемой волны $\mathbf{k}_{n\omega_0}$ [14]:

$$\frac{\mathbf{k}_{n\omega_0} \mathbf{k}_{\omega_0}}{n\mathbf{k}_{\omega_0}^2} = \frac{k_z}{nk_0} = 1. \tag{36}$$

В этом случае поля от всех «вспышек» (столкновений в плазме) будут складываться по амплитуде, а не по мощности, как в случае обычного некогерентного тормозного излучения. Для плазмы это условие эквивалентно распространению волн под углом θ_0 к направлению распространения волны накачки, таким что

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 &= \frac{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega_0^2}}{\sqrt{1 - \omega_p^2/(n\omega_0)^2}} = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \right) \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}, \quad \omega_0 \gg \omega_p. \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь

$$\omega_p^2 = 2\pi e^2 n / m$$

— электронная плазменная частота. Таким образом, для k_{\perp} имеем

$$k_{\perp} \approx \omega_p / c. \quad (38)$$

Из этого соотношения сразу же видно, что в (35) зависимость от $k_{\perp} a = \omega_p a / c$ немонотонная, следовательно, в (34) зависимость от концентрации является более сложной. В частности, максимум достигается, когда $a \sim c / \omega_p$. В этом случае полная интенсивность излучения пропорциональна квадрату концентрации.

«Толщину» конуса (рис. 7) легко оценить из условия

$$\delta\theta_{\omega} \approx \frac{1}{\sqrt{k_{\omega} a}}. \quad (39)$$

Необходимо также заметить, что поскольку сами размеры a и L (рис. 7) зависят от поля и концентрации плазмы, итоговая зависимость от интенсивности накачки и концентрации может существенно отличаться от зависимости, полученной с помощью сечения когерентного излучения (31). В частности, учет эффектов самовоздействия может приводить к зависимости от интенсивности поля вида

$$I \propto E^4 \chi_{coh}(E). \quad (40)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. I. P. Christov, M. M. Murnake, and H. C. Kapteyn, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1251 (1997); P. B. Corcum, M. H. Burnett, and M. Yu. Ivanov, *Opt. Lett.* **19**, 1 (1994).
2. М. В. Федоров, *Электрон в сильном световом поле*, Наука, Москва (1991).
3. В. П. Силин, *ЖЭТФ* **47**, 2254 (1964).
4. В. П. Силин, *ЖЭТФ* **114**, 864 (1998).
5. Ф. В. Бункин, А. Е. Казаков, М. В. Федоров, *УФН* **107**, 559 (1972); Ф. В. Бункин, М. В. Федоров, *ЖЭТФ* **49**, 1215 (1965).
6. G. Shvets and N. J. Fisch, *Phys. Plasmas* **4**, 428 (1997).
7. G. J. Pert, *J. Phys. B* **12**, 2756 (1979).
8. J. Dawson and C. Oberman, *Phys. Fluids* **5**, 517 (1962).
9. N. M. Kroll and K. M. Watson, *Phys. Rev. A* **8**, 804 (1973).
10. М. Н. Миттлеман, *Introduction to the Theory of Laser-Atom Interactions*, Plenum Press, New York and London (1993).
11. G. M. Fraiman, V. A. Mironov, and A. A. Balakin, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 319 (1999); Г. М. Фрайман, В. А. Миронов, А. А. Балакин, *ЖЭТФ* **115**, 463 (1999).
12. А. А. Балакин, Г. М. Фрайман, *Прикладная физика* **3**, 154 (2000); G. M. Fraiman and A. A. Balakin, *Physica D* **152–153**, 731 (2001).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
14. S.-Y. Chen, A. Maksimchuk, and D. Umstadter, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5528 (2000).
15. G. L. Yudin and M. Yu. Ivanov, *Phys. Rev. A* **63**, 033404-1 (2001).
16. S. Pfalzner and P. Gibbon, *Phys. Rev. E* **57**, 4698 (1998).