ЖЭТФ, 2001, том 120, вып. 4 (10), стр. 883–888

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОГО КЛАСТЕРА

А. Л. Черняков *

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 апреля 2001 г.

На основе уравнения Бринкмана рассмотрена задача о гидродинамическом сопротивлении фрактального кластера. Получено аналитическое выражение для силы сопротивления больших и малых кластеров в зависимости от их фрактальной размерности.

PACS: 47.53.+n, 47.55.Mh

1. ВВЕДЕНИЕ

Фрактальные кластеры образуются в различных природных и технологических процессах и их исследованию посвящено много работ [1–4]. Одной из важных характеристик кластеров является гидродинамический радиус R_H, который равен радиусу непроницаемой частицы с таким же коэффициентом гидродинамического сопротивления. Эта характеристика кластеров используется при экспериментальном определении их размерности [2, 3]. Для описания течения жидкости и определения гидродинамического сопротивления фрактального кластера часто используют модель пористого шара, в которой сферически-симметричная плотность частиц, образующих кластер, распределена степенным образом в зависимости от радиуса. Гидродинамика жидкости при этом описывается уравнением Бринкмана [5] с проницаемостью, зависящей от координат. Для аналитических оценок обычно используют результаты Дебая и Бухе [6] для однородного пористого шара. Для получения результатов при произвольной размерности фрактального кластера используются численные методы [7–9]. Гидродинамическое сопротивление неоднородного пористого шара численными методами вычислялось в работе [10]. В данной работе получены аналитические выражения для гидродинамического радиуса R_H и коэффициента протекания жидкости η больших и малых кластеров при произвольной фрактальной размерности.

*E-mail: achern@lukash.asc.rssi.ru

2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БРИНКМАНА

Поле течения жидкости $\mathbf{V}$ вокруг кластера радиуса R при малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = VR/\nu \ll 1$, где ν — кинематическая вязкость, можно описывать уравнениями Бринкмана [5]

$$\Delta\mathbf{V} - \kappa^2(r)\mathbf{V} - \frac{1}{\mu}\nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ — скорость жидкости, p — давление, μ — динамическая вязкость. Будем считать $\kappa^2(r)$ пропорциональным плотности n вещества в кластере (иногда используются более сложные модели [8, 9]). Число частиц N во фрактальном кластере связано с его радиусом R соотношением

$$N = C\left(\frac{R}{a}\right)^D,$$

где a — радиус первичных частиц составляющих кластер, D — размерность кластера, C — коэффициент пропорциональности, который может зависеть от D. Плотность n при этом равна

$$n = \frac{CD}{4\pi a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^{3-D}.$$

При малой плотности мы можем считать величину, обратную проницаемости, пропорциональной плотности частиц

$$\kappa^2 = \alpha 6\pi a n(r) = \kappa_0^2\left(\frac{R}{r}\right)^{3-D},$$

где α — коэффициент порядка единицы, κ_0^{-2} — проницаемость на поверхности кластера. Переходя к безразмерным переменным $r' = r/R, \mathbf{V}' = \mathbf{V}/V_0, p' = pR/\mu V_0$ и опуская в дальнейшем штрихи, запишем уравнение (1) в виде

$$\Delta \mathbf{V} - \frac{\beta^2}{r^s}\mathbf{V} - \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \tag{2}$$

где

$$\beta^2 = \kappa_0^2 R^2 = \frac{2\alpha C D}{3}\left(\frac{R}{a}\right)^{D-1},$$

$s = 3-D$. Решение уравнения (2) будем искать в сферической системе координат с полярной осью, направленной вдоль набегающего на покоящийся кластер потока жидкости. Выразим скорость потока через азимутальную компоненту векторного потенциала $\mathbf{V} = \operatorname{rot}\mathbf{A}_\phi$. Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} &p = \cos\theta \cdot p(r),\\ &A_\phi = \frac{1}{2}\sin\theta \cdot r\chi(r),\\ &V_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot A_\phi) = \cos\theta\cdot\chi(r),\\ &V_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) = -\frac{1}{2}\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\chi(r)). \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя эти выражения в уравнение для радиальной компоненты скорости, получим

$$\chi'' + \frac{4}{r}\chi' - \frac{\beta^2}{r^s}\chi = p'. \tag{4}$$

Взяв дивергенцию от уравнения движения (2) получим второе уравнение

$$p'' + \frac{2}{r}p' - \frac{2}{r^2}p = \frac{\beta^2 s}{r^{s+1}}\chi. \tag{5}$$

Уравнения (4), (5) составляют полную систему уравнений для определения поля течения и распределения давления внутри и вне фрактального кластера. Вне кластера $\beta = 0$ и общее решение уравнений (4), (5), удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности, имеет вид

$$\chi = 1 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^3}, \quad p = \frac{A_1}{r^2}, \tag{6}$$

где A_1, A_2 — неопределенные коэффициенты. Внутри кластера решения уравнений (4), (5) выражаются через элементарные функции только в случаях

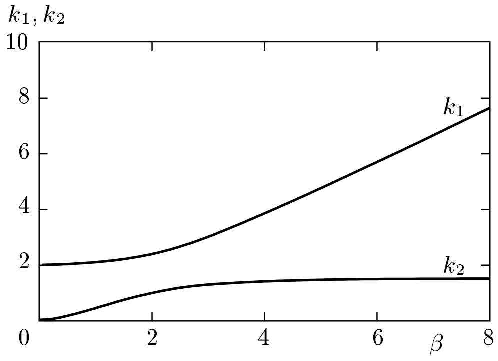

Рис. 1. Зависимость положительных корней уравнения (10) от параметра β

$s = 0, 2$. Для однородного пористого шара с $s = 0$ два регулярных в нуле решения равны

$$\chi_1 = \frac{1}{r^{3/2}}I_{3/2}(\beta r) = \frac{1}{r^2}\left[\operatorname{ch}(\beta r) - \frac{1}{\beta r}\operatorname{sh}(\beta r)\right], \quad p_1 = 0, \tag{7}$$

где $I_{3/2}$ — функция Бесселя мнимого аргумента и

$$\chi_2 = 1, \quad p_2 = -\beta^2 r. \tag{8}$$

Для фрактального кластера с $s = 2$ решения имеют степенной вид

$$\chi = r^k, \quad p = \frac{2\beta^2}{k(k-1)-2}r^{k-1}. \tag{9}$$

Показатель степени удовлетворяет уравнению четвертой степени

$$(k^2 + 3k - \beta^2)(k^2 - k - 2) = 2\beta^2(k-1), \tag{10}$$

из которого находим два положительных корня $k_{1,2}$. Зависимость решения этого уравнения от параметра β приведена на рис. 1. При малых и больших значениях β корни равны

$$\begin{aligned} &k_1 = 2 + \frac{1}{15}\beta^2, \quad k_2 = \frac{2}{3}\beta^2, \quad \beta^2 \ll 1,\\ &k_1 = \beta - \frac{1}{2} + \frac{9}{8\beta}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}, \quad \beta^2 \gg 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Для решения системы уравнений (4), (5) при произвольной размерности кластера $0 < s < 2$ введем новую переменную

$$y = \frac{\beta r^{1-s/2}}{1-s/2} \tag{12}$$

и новую функцию $\tilde{p}(r) = rp(r)$. Тогда уравнения (4), (5) принимают вид

$$\frac{d^2\chi}{dy^2} + \frac{8-s}{(2-s)y}\frac{d\chi}{dy} - \chi = \\ = \frac{2}{(2-s)y}\frac{d\tilde{p}}{dy} - \frac{4}{(2-s)^2y^2}\tilde{p}, \quad (13)$$

$$\frac{d^2\tilde{p}}{dy^2} - \frac{s}{(2-s)y}\frac{d\tilde{p}}{dy} - \frac{8}{(2-s)^2y^2}\tilde{p} = s\chi. \quad (14)$$

Видно, что при $s \neq 2$ особыми точками системы дифференциальных уравнений являются только $y = 0$ и ∞. Как следует из теории линейных дифференциальных уравнений [11], функции $\chi(y)$ и $\tilde{p}$ аналитичны на всей плоскости комплексного переменного y за исключением точек 0 и ∞. Точка $y = 0$ является регулярной особой точкой системы дифференциальных уравнений (13), (14). Вблизи нуля мы можем искать решения в виде рядов по степеням y. Первую пару решений получим, подставляя разложения

$$\chi_1(r) = r^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 \beta^{2n} r^{(2-s)n}, \\ p_1(r) = r^{l-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 \beta^{2n} r^{(2-s)n} \quad (15)$$

в уравнения (4), (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r. В результате найдем уравнение, определяющее l, и систему рекуррентных соотношений для определения коэффициентов a_n^1, b_n^1. Величина l определяется из квадратного уравнения

$$(l-1)l - 2 = 0.$$

При $l = 2$ получим регулярное в нуле решение, а при $l = -1$ получим сингулярное решение. Для $l = 2$ система уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_n^1, b_n^1 имеет вид

$$[(2-s)n+2][(2-s)n+5]a_n^1 - a_{n-1}^1 = \\ = [(2-s)n+1]b_n^1, \\ \{[(2-s)n+1][(2-s)n+2]-2\}b_n^1 = sa_{n-1}^1. \quad (16)$$

Запишем в явном виде полученное решение с точностью до членов, пропорциональных β^2:

$$\chi_1(r) = r^2\left\{1 + \frac{\beta^2 r^{2-s}}{(4-s)(7-s)} \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \frac{s(3-s)}{(3-s)(4-s)-2}\right] + \ldots\right\}, \\ p_1(r) = r\left\{10 + \frac{\beta^2 r^{2-s} s}{(3-s)(4-s)-2} + \ldots\right\}. \quad (17)$$

Второе независимое решение получим, используя разложения вида

$$\chi_2(r) = r^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \beta^{2n} r^{(2-s)n}, \\ p_2(r) = \beta^2 r^{l+1-s} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \beta^{2n} r^{(2-s)n}. \quad (18)$$

Подставляя эти ряды в уравнения (4), (5), опять получим уравнение, определяющее l,

$$l(l+3) = 0.$$

Только решение с $l = 0$ является регулярным в нуле. Рекуррентная система уравнений в этом случае имеет вид:

$$(2-s)n[(2-s)n+3]a_n^2 - a_{n-1}^2 = \\ = [(2-s)(n-1)+1-s]b_{n-1}^2, \\ \{[(2-s)n+1-s](2-s)(n+1)-2\}b_n^2 = sa_n^2. \quad (19)$$

Запишем это решение с точностью до членов, пропорциональных β^2:

$$\chi_2(r) = 1 + \frac{2\beta^2 r^{2-s}}{(2-s)(5-s)(3-s)} + \ldots, \\ p_2(r) = \beta^2 r^{1-s}\left\{\frac{1}{s-3} + \beta^2 r^{2-s} \times \right. \\ \left. \times \frac{2s}{(2-s)(5-s)(3-s)[(3-2s)(4-2s)-2]} + \ldots\right\}. \quad (20)$$

Интересно проследить, как при $\beta^2 \ll 1$ решения (15), (18) переходят в решения (9) при $s \to 2$. В этом пределе рекуррентные соотношения (16), (19) легко решаются:

$$a_n^1 = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{15(2-s)}\right]^n, \quad b_n^1 = 10a_n^1,$$

$$a_n^2 = -b_n^2 = \frac{1}{n!}\left[\frac{2}{3(2-s)}\right]^n.$$

Подставляя эти коэффициенты в ряды (15) и (18) и суммируя, получим

$$\chi_1(r) = r^2 \exp\left[\frac{\beta^2 r^{2-s}}{15(2-s)}\right],$$

$$p_1(r) = 10r \exp\left[\frac{\beta^2 r^{2-s}}{15(2-s)}\right],$$

$$\chi_2(r) = \exp\left[\frac{2\beta^2 r^{2-s}}{3(2-s)}\right],$$

$$p_2(r) = -\frac{1}{r}\exp\left[\frac{2\beta^2 r^{2-s}}{3(2-s)}\right].$$

Из этих выражений видно, что при $\beta^2 \ll 1$ и $s \to 2$ полученные решения отличаются от точных решений (9) только постоянными множителями.

Теперь исследуем поведение решений при $y \gg 1$. Точка $y = \infty$ является нерегулярной особой точкой системы уравнений (14), (15). Для одной пары решений $y = \infty$ является существенной особой точкой, а для другой пары — точкой ветвления. Решения с существенно особой точкой будем искать в виде

$$\begin{aligned} \chi(r) &= r^l \exp\left\{\pm\frac{\beta r^{1-s/2}}{1-s/2}\right\}\times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^{-n} r^{-(1-s/2)n}, \\ p(r) &= s r^{l-1}\exp\left\{\pm\frac{\beta r^{1-s/2}}{1-s/2}\right\}\times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} b_n \beta^{-n} r^{-(1-s/2)n}. \end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя эти разложения в уравнения (4), (5), найдем $l = -(2 - 3s/4)$ и систему уравнений для определения коэффициентов a_n, b_n. Запишем ответ с точностью до членов, пропорциональных β^{-1}, для растущего на бесконечности решения:

$$a_0 = b_0 = 1,$$

$$\begin{aligned} a_1 = -\left[s\left(1-\frac{s}{4}\right) + \left(2-\frac{3s}{4}\right)\left(1+\frac{3s}{4}\right)\right]\times \\ \times(2-s)^{-1}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$b_1 = a_1 + (4 - s).$$

Решения с точкой ветвления на бесконечности получаются из разложения по обратным степеням y:

$$\begin{aligned} \chi_2 &= r^{m+1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^{-2n} r^{-(2-s)n}, \\ p_2 &= r^m \sum_{n=0}^{\infty} b_n \beta^{-2n} r^{-(2-s)n}. \end{aligned} \tag{23}$$

После приравнивания членов с одинаковыми степенями r в уравнениях (4), (5) получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} [m+1-(2-s)n][m+4-(2-s)n]a_n - a_{n+1} = \\ = [m-(2-s)n]b_n, \end{aligned}$$

$$\{[m-(2-s)n][m+1-(2-s)n]-2\}b_n = s a_{n+1}.$$

При $n = 0$, учитывая, что $a_0 = 0$, из этой системы получаем уравнение для определения m:

$$m^2 + (1+s)m - 2 = 0.$$

Одно решение оказывается растущим на бесконечности, а другое стремится к нулю. Заметим, что убывающие на бесконечности решения должны быть сингулярными в нуле, так как у модуля аналитической функции не может быть максимума внутри области аналитичности [12]. Поэтому нас будут интересовать только растущие на бесконечности решения. Для растущей на бесконечности функции

$$m = \sqrt{\left(\frac{1+s}{2}\right)^2 + 2} - \frac{1+s}{2}. \tag{24}$$

Нам в дальнейшем понадобятся лишь первые члены разложения

$$\chi_2 = -m\beta^{-2} r^{m+1-(2-s)}, \quad p_2 = r^m. \tag{25}$$

3. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ РАДИУС ФРАКТАЛЬНОГО КЛАСТЕРА

Общее решение системы уравнений (4), (5) внутри фрактального кластера можно записать в виде

$$\chi(r) = B_1\chi_1(r) + B_2\chi_2(r),$$

$$p(r) = B_1 p_1(r) + B_2 p_2(r),$$

где $(\chi_1(r), p_1(r)), (\chi_2(r), p_2(r))$ — два независимых ограниченных в нуле решения. Зная теперь структуру решения внутри фрактального кластера, мы можем сшить его с внешним решением. На поверхности кластера при $r = 1$ должны быть непрерывны компоненты скорости и компоненты тензора потока импульса [13]

$$\sigma_{rr} = -p + 2\frac{\partial V_r}{\partial r},$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r}.$$

Это приводит к условию непрерывности при $r = 1$ функций χ, χ', χ'' и давления p. Для коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2 получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} &1 + A_1 + A_2 = B_1\chi_1 + B_2\chi_2, \\ &- A_1 - 3A_2 = B_1\chi_1' + B_2\chi_2', \\ &2A_1 + 12A_2 = B_1\chi_1'' + B_2\chi_2'', \\ &A_1 = B_1 p_1 + B_2 p_2. \end{aligned} \tag{26}$$

Из этой системы определяются все коэффициенты разложения через значения в точке $r = 1$ функций χ_1, χ_2 и их производных. Наибольший интерес представляет коэффициент A_1, через который выражается сила сопротивления кластера F и безразмерный гидродинамический радиус R_H

$$R_H = \frac{F}{6\pi\mu V_0 R} = \frac{2}{3}A_1.$$

Из системы уравнений (26) следует

$$A_1 = -\frac{3}{2}\left\{1 - \frac{3\chi_2 + \chi_2'}{2p_2} + \left(1 + \frac{\beta^2\chi_2 + p_2'}{2p_2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{p_2(3\chi_1 + \chi_1') - p_1(3\chi_2 + \chi_2')}{p_2(\beta^2\chi_1 + p_1') - p_1(\beta^2\chi_2 + p_2')}\right\}^{-1}. \quad (27)$$

Другой интересной величиной является коэффициент протекания жидкости η, который равен отношению потока жидкости, проходящего через пористую среду, к потоку жидкости на бесконечности, проходящему через площадь πR^2:

$$\eta = \frac{2}{R^2 V_0}\int_0^{\pi/2} V_r \sin\theta\, d\theta = B_1\chi_1 + B_2\chi_2.$$

Для этой величины получаем выражение

$$\eta =$$
$$= -A_1\left\{\frac{\chi_2}{p_2} + \frac{(p_1\chi_2 - p_2\chi_1)\left(2 + \dfrac{\beta^2\chi_2 + p_2'}{p_2}\right)}{p_2(\beta^2\chi_1 + p_1') - p_1(\beta^2\chi_2 + p_2')}\right\}. \quad (28)$$

В случае однородного пористого шара при $s = 0$, подставляя точные решения (7), (8) в (27), получим известные выражения [6] для гидродинамического радиуса

$$R_H = \left\{\frac{3}{2}\beta^{-2} + \left(1 - \frac{\operatorname{th}\beta}{\beta}\right)^{-1}\right\}^{-1} \quad (29)$$

и коэффициента η

$$\eta = \frac{9}{2\beta^2}R_H. \quad (30)$$

При $\beta \ll 1$ из (29) получаем

$$R_H = \frac{2}{9}\beta^2\left(1 - \frac{4}{15}\beta^2\right),$$

а при $\beta \gg 1$ с точностью до β^{-3} имеем

$$R_H = \left(1 + \beta^{-1} + \frac{5}{2}\beta^{-2} + \beta^{-3}\right)^{-1}.$$

В другом предельном случае, при $s = 2$, подстановка точных решений (9) в (27), (28) дает выражения для гидродинамического радиуса

$$R_H = \left\{1 - \frac{1}{4\beta^2}(k_2+3)(k_2^2 - k_2 - 2) + \frac{k_2(k_2+1)}{4\beta^2} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{[(k_1+3)(k_1^2 - k_1 - 2) - (k_2+3)(k_2^2 - k_2 - 2)]}{k_1(k_1+1) - k_2(k_2+1)}\right\}^{-1}$$

и коэффициента протекания

$$\eta = \frac{3}{4\beta^2}R_H\left\{(2 + k_2 - k_2^2) + k_2(k_2+1) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{k_1(k_1-1) - k_2(k_2-1)}{k_1(k_1+1) - k_2(k_2+1)}\right\},$$

где k_1, k_2 — корни уравнения (10). При $\beta \ll 1$ имеем

$$R_H = \frac{2}{3}\beta^2\left(1 - \frac{4}{3}\beta^2\right),$$

$$\eta = 1 - \frac{8}{9}\beta^2.$$

Для больших кластеров с $\beta \gg 1$ получаем с точностью до β^{-3}

$$R_H = \left\{1 + \beta^{-1} + \frac{\sqrt{17}+3}{4}\beta^{-2} - \frac{23}{8}\beta^{-3}\right\}^{-1}, \quad (31)$$

$$\eta = \beta^{-2}\frac{3}{2}R_H(k_2+1) = \beta^{-2}R_H\frac{3(\sqrt{17}+1)}{4}. \quad (32)$$

На рис. 2 показаны точные зависимости гидродинамического радиуса R_H и коэффициента протекания жидкости η от параметра β для двух предельных значений размерности $D = 3$ и $D = 1$. Штриховыми линиями показаны асимптотические зависимости с точностью до β^{-3}.

Теперь, пользуясь полученными выше решениями при произвольных значениях s, вычислим значение гидродинамического радиуса R_H и величины η при больших и малых значениях β. При $2\beta^2 \ll 2-s$, подставляя разложения (17), (20) в формулы (27), (28), получим

$$R_H = \frac{2\beta^2}{3(3-s)}\left\{1 - \frac{2\beta^2}{3(3-s)} \times \right.$$
$$\left. \times \left[1 + \frac{2s^2 - 15s + 10}{(5-s)[(3-2s)(4-2s)-2]}\right]\right\}, \quad (33)$$

$$\eta = 1 - \frac{2\beta^2}{(3-s)(5-s)} \times$$
$$\times \left[6 - s - \frac{3s}{(3-2s)(4-2s)-2}\right]. \quad (34)$$

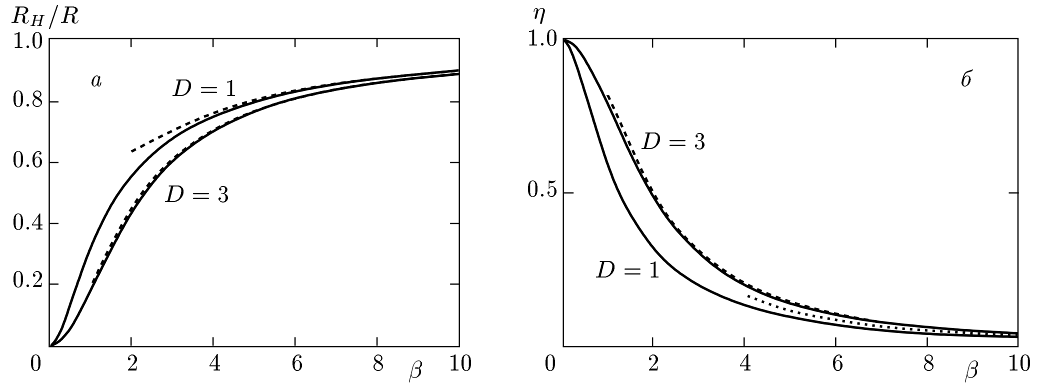

Рис. 2. Зависимости гидродинамического радиуса R_H (a) и коэффициента протекания η ($б$) от β для двух значений размерности фрактального кластера $D = 1, 3$

Эти выражения при $s = 0$ переходят в выражения для однородного пористого шара, а первый член в разложении (33) справедлив для произвольной размерности $0 < s < 2$ и точно совпадает с полученным выражением для $s = 2$.

Для больших кластеров с $\beta \gg 1$ после подстановки решений (21), (25) в выражения (27), (28) найдем

$$R_H = \left\{1+\beta^{-1}+\beta^{-2}\frac{1}{4}\left[\sqrt{(s+1)^2+8}-2s+7\right]+\right.$$
$$\left.+\ \beta^{-3}\left[1-\frac{s}{8}\left(17-\frac{3}{4}s\right)\right]\right\}^{-1}, \quad (35)$$

$$\eta = \beta^{-2}\frac{3}{2}R_H(m+2) =$$
$$= \beta^{-2}\frac{3}{2}R_H\left[\sqrt{\left(\frac{1+s}{2}\right)^2+2}-\frac{1+s}{2}+2\right]. \quad (36)$$

Видно, что полученные асимптотические выражения для гидродинамического радиуса R_H (35) и коэффициента протекания η (36) для фрактального кластера с произвольной размерностью $D = 3 - s$ точно переходят в соответствующие приведенные ранее выражения для $s = 0$ и $s = 2$. Как следует из (35), влияние размерности на гидродинамический радиус при $\beta \gg 1$ начинается только с членов, пропорциональных β^{-2}. Отметим, что кривые $R_H(\beta)$ и $\eta(\beta)$ на рис. 2, построенные для размерностей $D = 3$ и $D = 1$, ограничивают область возможных значений соответствующих величин при изменении размерности в интервале $3 > D > 1$.

В заключение выражаю благодарность А. А. Киршу и И. Б. Стечкиной за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Смирнов, *Физика фрактальных кластеров*, Наука, Москва (1991).
2. Е. П. Емец, А. Э. Новоселова, П. П. Полуэктов, УФН **164**, 959 (1994).
3. S. Nyeki and I. Colbeck, J. Aerosol Sci. **25**, 75 (1994).
4. Е. Ф. Михайлов, С. С. Власенко, УФН **165**, 263 (1995).
5. H. C. Brinkman, Appl. Sci. Res. A **1**, 27 (1947).
6. P. Debye and A. M. Bueche, J. Chem. Phys. **16**, 573 (1948).
7. W. van Saarloos, Physica A **147**, 280 (1987).
8. S. Veerapaneni and M. R. Wiesner, J. Colloid Interface Sci. **177**, 45 (1996).
9. M. Vanni, Chem. Eng. Sci. **55**, 685 (2000).
10. G. Ooms, P. F. Mijnlieff, and H. L. Beckers, J. Chem. Phys. **53**, 4123 (1970).
11. А. Кратцер, В. Франц, *Трансцендентные функции*, Изд-во иностр. лит., Москва (1963).
12. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1973).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).