

АКСИАЛЬНАЯ МАГНИТОСТАТИКА КОЛЬЦЕВОГО ТОКА В ПОЛЕ КЕРРА

*А. А. Шацкий**

*Астрокосмический центр Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 марта 2001 г.

Найдены электромагнитные поля, создаваемые кольцевым током вокруг керровской черной дыры. В применении к астрофизике квазаров в построенной модели исследован процесс ускорения заряженной частицы силовым электрическим полем вдоль оси вращения.

PACS: 97.60.L

1. ВВЕДЕНИЕ

Для понимания астрофизики квазаров имеет большое значение изучение взаимодействия электромагнитных полей с гравитационным полем вращающейся черной дыры. Квазары проявляют себя как компактные, мощные источники электромагнитного излучения, обладающие в ряде случаев узконаправленными мощными выбросами (джетами) и являющиеся, скорее всего, активными ядрами галактик. Одной из моделей, позволяющей объяснить наблюдательные проявления квазаров, является процесс Блендфорда–Знаека [1]. В его основе лежит магнито-гидродинамическая (МГД) модель плазмы, аккрецирующей на вращающуюся черную дыру. Благодаря процессу Бардина–Петтерсона [2] аккреция может происходить только с экваториальной плоскости, поэтому имеет смысл моделировать аккрецию как суперпозицию кольцевых токов в плоскости экватора. Такое моделирование корректно, если рождение пар индуцированным электрическим полем приводит к токам много меньшим, чем кольцевой ток-источник. Эффект Хоукинга рождения частиц на горизонте в данной модели пренебрежимо мал, поскольку при комптоновской длине волны частицы много меньше, чем радиус кривизны пространства, он дает очень малую поправку. Для электронов это соответствует черной дыре, масса которой больше, чем примерно $10^{-16} M_{\odot}$.

Во всех работах, на которые приведены ссылки,

вычисления проводятся с использованием 3+1-формализма. В отличие от этих работ здесь будет использован общеквариантный формализм общей теории относительности (ОТО) и не будет использовано приближение МГД-вмороженности магнитных силовых линий в плазму, что ведет к условию равенства нулю скалярного произведения электрического и магнитного полей (бессилое поле).

Введем обозначения для электромагнитных и гравитационных величин так же, как в [3] (§ 90)¹⁾.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Определим граничные условия, которые должны быть наложены на компоненты тензора электромагнитного поля, необходимые для нахождения последних.

Во-первых, должны выполняться классические граничные условия: на бесконечности все компоненты поля должны обратиться в нуль.

Во-вторых, к классическим должны добавиться еще граничные условия на горизонте. Они необходимы для того, чтобы в системе отсчета, связанной со свободно падающим наблюдателем (СПН), при полете к горизонту не возникло аномалий в его движении, вызванных ускорением электромагнитным полем (аномалии ведут к нарушению условия пробно-

*E-mail: shatskiy@lukash.asc.rssi.ru

¹⁾ Далее для удобства используем систему единиц $c = 1$ и $G = 1$ — скорость света и гравитационная постоянная.

сти электрического заряда СПН²⁾). Поэтому, для того чтобы найти условия, налагаемые на компоненты полей на горизонте, нужно выписать 4-вектор ускорения СПН и посмотреть: какие его компоненты имеют аномалии на горизонте, связанные с электромагнитным полем.

Далее мы будем работать в координатах, покоящихся относительно бесконечно удаленного, статического наблюдателя.

Компоненты 4-ускорения СПН имеют вид³⁾

$$W^i = w^i + \frac{e}{m} F^{ij} u_j. \quad (1)$$

Здесь e и m — пробные заряд и масса СПН, $w^i = -\Gamma_{km}^i u^k u^m$, где Γ_{km}^i — символы Кристоффеля, F^{ij} — контравариантные компоненты тензора электромагнитного поля, u^k — компоненты 4-скорости СПН. Рассчитаем 4-ускорение для радиально падающего СПН в метрике Шварцшильда. Компоненты символов Кристоффеля и 4-скорости СПН для этой метрики приводятся в [3]. Обозначая шварцшильдовский радиус $r_g = 2M$, где M — масса черной дыры, имеем

$$u^0 = -g_{rr}, \quad u^r = -\sqrt{\frac{r_g}{r}}, \quad w^0 = -\frac{1}{r} \left(\frac{r_g}{r}\right)^{3/2},$$

$$w^1 = \frac{r_g}{2r^2} (2 + g_{rr}).$$

Остальные u^i и w^i равны нулю. При приближении к горизонту ($r \rightarrow r_g$) компонента метрического тензора $g_{rr} \rightarrow -\infty$. Поэтому выпишем асимптотику квадратов наблюдаемых компонент 4-ускорения в главном по g_{rr} порядке, выраженную через контравариантные компоненты поля:

$$W_0 W^0 \rightarrow -g_{rr} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{r_g}{r} (F^{r0})^2,$$

$$W_r W^r \rightarrow g_{rr} \left(\frac{r_g}{2r^2} g_{rr} + \frac{e}{m} F^{r0}\right)^2,$$

$$W_\theta W^\theta \rightarrow g_{rr}^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{r_g}{r} g_{\theta\theta} (F^{r\theta})^2,$$

$$W_\varphi W^\varphi \rightarrow g_{rr}^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{r_g}{r} g_{\varphi\varphi} (F^{r\varphi})^2. \quad (2)$$

Отсюда видно, что особенность в радиальной компоненте ускорения не приведет к нарушению условия пробности заряда, так как гравитация вблизи горизонта в радиальном направлении действует сильнее

в g_{rr} раз, чем электромагнитное поле, нулевая компонента W имеет слабую особенность, а тангенциальные компоненты ускорения имеют сильную особенность, которая может существенно изменить траекторию СПН вблизи горизонта и нарушить условие пробности заряда СПН: $e \ll m$. Чтобы этого не случилось, нужно на горизонте положить контравариантные компоненты тангенциального магнитного поля равными нулю. Аналогично, асимптотика квадратов компонент 4-ускорения, зависящая от ковариантных компонент поля имеет вид

$$W_0 W^0 \rightarrow -g_{rr} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{r_g}{r} (F_{r0})^2,$$

$$W_r W^r \rightarrow g_{rr} \left(\frac{r_g}{2r^2} g_{rr} + \frac{e}{m} F_{r0}\right)^2,$$

$$W_\theta W^\theta \rightarrow g_{rr}^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 g^{\theta\theta} (F_{\theta 0})^2,$$

$$W_\varphi W^\varphi \rightarrow g_{rr}^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 g^{\varphi\varphi} (F_{\varphi 0})^2. \quad (3)$$

Отсюда видно, что ковариантные компоненты тангенциального электрического поля, имеющие наиболее сильную особенность, на горизонте должны обращаться в нуль. Однако физически интересным является не поле Шварцшильда, а поле Керра. Выпишем метрику Керра и ее детерминант в невращающейся (относительно удаленных звезд) системе:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 -$$

$$- \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 +$$

$$+ \frac{2r_g r a}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi dt,$$

$$- g = \rho^4 \sin^2 \theta \quad (4)$$

(здесь $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 + a^2 - r_g r$, a — параметр Керра). При этом в поле Керра как само пространство, так и СПН вовлекаются во вращение при приближении к черной дыре. Тогда условия для тангенциальных компонент электромагнитного поля в поле Шварцшильда заменятся на условия для тех же компонент в системе отсчета опорных наблюдателей в поле Керра⁴⁾. Выражения (2) и (3) дают свод-

²⁾ Более подробно обсуждение этого требования можно найти в работах [4] и [5].

³⁾ Там, где не оговорено особо, латинские индексы пробегуют ряд 0, 1, 2, 3, греческие индексы — ряд 1, 2, 3.

⁴⁾ Здесь и далее под опорной системой отсчета мы подразумеваем систему, в которой $g''_{0\varphi} = 0$ (см. [4] или [5]). Это система, в которой опорные наблюдатели вращаются с угловой скоростью $\Omega = -g_{0\varphi}/g_{\varphi\varphi}$ относительно удаленных звезд и имеют при этом нулевой угловой момент количества движения.

ку граничных условий для электромагнитного поля на горизонте в поле Керра:

$$\begin{aligned} F''_{\theta 0} &\rightarrow 0, & F''_{\varphi 0} &\rightarrow 0, \\ F''^{r\theta} &\rightarrow 0, & F''^{r\varphi} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Выпишем некоторые формулы, которые могут оказаться полезными в дальнейшем. Введем обозначения

$$\kappa = -g_{00}/g_{\varphi\varphi}, \quad \kappa + \Omega^2 = \Delta \sin^2 \theta / g_{\varphi\varphi}^2,$$

тогда

$$\begin{aligned} g^{\theta\theta} &= 1/g_{\theta\theta}, & g^{rr} &= 1/g_{rr}, & g^{00} &= -\frac{g_{\varphi\varphi}}{\Delta \sin^2 \theta}, \\ g^{\varphi\varphi} &= -\frac{g_{00}}{\Delta \sin^2 \theta}, & g^{0\varphi} &= \frac{g_{0\varphi}}{\Delta \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

3. ПЕРЕХОД К ОПОРНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Ввиду аксиальной симметрии и стационарности тока система обладает двумя векторами Киллинга: вдоль трансляций по времени и вдоль трансляций по углу φ . Поэтому все поля в системе (4) будут стационарными. В общем случае эта стационарность не сохраняется при переходе к системе отсчета, вращающейся с произвольной угловой скоростью. Чтобы показать это, выпишем необходимые в дальнейшем преобразования координат во вращающуюся с неоднородной в пространстве угловой скоростью $\omega(r, \theta)$ систему отсчета:

$$dx^i = dx'^k [\delta_k^i + \omega \delta_\varphi^i \delta_k^0 + t \delta_\varphi^i \delta_k^\beta \partial_\beta \omega]. \quad (7)$$

Соответствующие преобразования контравариантных компонент поля (см. [3]) имеют вид

$$\begin{aligned} F'^{\alpha 0} &= F^{\alpha 0}, & F'^{0\varphi} &= F^{0\varphi} + t F^{\alpha 0} \partial_\alpha \omega, \\ F'^{\alpha\varphi} &= F^{\alpha\varphi} - \omega F^{\alpha 0}, & F'^{r\theta} &= F^{r\theta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для ковариантных компонент получаем⁵⁾

$$\begin{aligned} F'_{\alpha\varphi} &= F_{\alpha\varphi}, & F'_{\alpha 0} &= F_{\alpha 0} + \omega F_{\alpha\varphi}, \\ F'_{0\varphi} &= F_{0\varphi}, & F'_{r\theta} &= F_{r\theta} + t e^{\alpha\beta\varphi} F_{\alpha\varphi} \partial_\beta \omega. \end{aligned} \quad (9)$$

В выражениях (8) и (9) индекс α пробегает значения r и θ . Из этих выражений видно, что стационарными являются только системы отсчета, вращающиеся твердотельно относительно другой стационарной системы (относительно далеких звезд). При этом

⁵⁾ $e^{\alpha\beta\gamma} = e_{\alpha\beta\gamma}$ — символ Леви-Чивита.

стационарная система отсчета, вращающаяся с угловой скоростью горизонта Ω_H совпадает на горизонте с системой опорного наблюдателя, поэтому граничные условия в этой системе горизонта, которая далее будет отмечена тильдой⁶⁾, такие же, как (5):

$$\tilde{F}_{\theta 0} \rightarrow 0, \quad \tilde{F}_{\varphi 0} \rightarrow 0, \quad \tilde{F}^{r\theta} \rightarrow 0, \quad \tilde{F}^{r\varphi} \rightarrow 0. \quad (10)$$

4. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Предположим, что ток имеет плотность с дельта-образной функцией распределения в меридиональной плоскости:

$$j^i(r, \theta) = J^\varphi \delta_\varphi^i [\delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0)] / \sqrt{-g}. \quad (11)$$

Поскольку другие токи предполагаются пренебрежимо малыми и система стационарна, тороидальные компоненты электромагнитного поля будут равны нулю. Поэтому в пространстве вне горизонта аксиально-симметричные уравнения Максвелла для ковариантных компонент поля имеют вид

$$\begin{aligned} e^{\alpha\beta\varphi} \partial_\beta F_{\alpha\varphi} &= 0, \\ e^{\alpha\beta\varphi} \partial_\beta F_{\alpha 0} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда видно, что ковариантные компоненты тензора электромагнитного поля можно представить в виде

$$F_{\alpha\varphi} = \partial_\alpha A_\varphi, \quad F_{\alpha 0} = \partial_\alpha A_0. \quad (13)$$

Здесь A_i — ковариантные компоненты 4-вектор-потенциала электромагнитного поля. Запишем теперь уравнения Максвелла для контравариантных компонент поля в аксиальном случае с учетом отсутствия электрических зарядов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} F^{\alpha 0}) &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} F^{\alpha\varphi}) &= 4\pi j^\varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Правая часть второго уравнения в (14) определяется выражением (11).

5. НАХОЖДЕНИЕ КОМПОНЕНТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Найдем магнитное поле в метрике Шварцшильда ($a = 0$ в (4)). Ввиду аксиальной симметрии век-

⁶⁾ Тильдой обозначены компоненты электромагнитного поля в стационарной системе отсчета, переходящей в опорную на горизонте, т. е. вращающуюся с угловой скоростью опорных наблюдателей на горизонте, $\Omega_H = a/r_H r g$.

тор-потенциал магнитного поля имеет только тороидальную компоненту. Согласно (13), для ее ковариантной части имеем

$$F^{\gamma\varphi} = g^{\gamma\beta} g^{\varphi\varphi} \partial_\beta A_\varphi. \quad (15)$$

Тогда, обозначая индексом «0» компоненты тензоров в евклидовом пространстве, согласно (6) имеем

$$F^{\gamma\varphi} = g_0^{\gamma\beta} \left(\delta_\beta^\gamma - \frac{r_g}{r} \delta_\beta^r \delta_r^\gamma \right) g_0^{\varphi\varphi} \partial_\beta A_\varphi = F_0^{\beta\varphi} \left(\delta_\beta^\gamma - \frac{r_g}{r} \delta_\beta^r \delta_r^\gamma \right). \quad (16)$$

Из (15) и (16) видно, что если функция A_φ гладкая и не имеет особенностей, то граничные условия (5) выполняются с нужной асимптотикой (2). Тогда второе уравнение (14) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} F_0^{\alpha\varphi}) = 4\pi j_{tot}^\varphi, \quad (17)$$

где обозначено

$$j_{tot}^\varphi = j^\varphi + \frac{r_g}{4\pi r^2} \partial_r (r F_0^{r\varphi}).$$

Далее, введем физические компоненты векторов согласно определению (см. [3])

$$\hat{B}^\alpha = B^\beta \sqrt{|g_{\alpha\beta}|}. \quad (18)$$

В этих компонентах уравнение (17) имеет вид уравнения Пуассона в евклидовом пространстве для вектор-потенциала \hat{A}^γ с источником \hat{j}_{tot}^γ . Как известно, решение этого уравнения имеет вид (см. [3])

$$\hat{A}^\alpha(r, \theta) = \delta_\varphi^\alpha \hat{e}^\varphi \int_{r_g}^\infty \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi dr' d\theta' d\varphi' \frac{\hat{j}_{tot}^\gamma \hat{e}_\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} r'^2 \sin \theta'. \quad (19)$$

Здесь \hat{e}^γ — единичный орт⁷⁾ в направлении угла φ , $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi')$,

θ — угол наклона вектора \mathbf{r} к оси z , θ' — угол наклона вектора \mathbf{r}' к оси z , φ' — угол между проекциями векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' на плоскость, перпендикулярную оси z . Интегрирование проводится в евклидовом пространстве вне шара радиуса r_g . Решение (19) находится итерациями, в начальной итерации полагаем $r_g = 0$.

⁷⁾ При этом $\hat{j}_{tot}^\gamma \hat{e}_\gamma = j_{tot}^\varphi r' \sin \theta' \cos \varphi'$.

Определим вектор магнитного поля:

$$H_\lambda = -\frac{\sqrt{-g}}{2} e_{\lambda\beta\gamma} F^{\beta\gamma}, \quad (20a)$$

или

$$F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} H_\lambda e^{\lambda\alpha\beta}. \quad (20b)$$

Компоненты A_φ , H_r и H_θ находятся согласно (18) и (20):

$$A_\varphi = -r \sin \theta \hat{A}^\varphi, \quad H_r = \frac{\partial_\theta (\sin \theta \hat{A}^\varphi)}{r \sin \theta}, \quad (21)$$

$$\frac{H_\theta}{r} = -\frac{1 - r_g/r}{r} \partial_r (r \hat{A}^\varphi).$$

Для начальной итерации, согласно (21) и благодаря наличию дельта-функций в (11), из (19) можно получить следующие выражения для компонент магнитного поля:

$$H_r^0(r, \theta) = \frac{J^\varphi}{r_0} \int_{-\pi}^\pi d\varphi' \times \frac{\cos \theta \cos^2 \varphi' (1 + x^2 - x \sin \theta \cos \varphi')}{x \sin \theta (1 + x^2 - 2x \sin \theta \cos \varphi')^{3/2}}, \quad (22)$$

$$\frac{H_\theta^0(r, \theta)}{r} = \frac{J^\varphi}{r_0} \int_{-\pi}^\pi d\varphi' \times \frac{x \sin \theta \cos^2 \varphi' - \cos \varphi'}{x(1 + x^2 - 2x \sin \theta \cos \varphi')^{3/2}}.$$

Здесь было обозначено: $x = r/r_0$. В частности, отсюда получаем

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{H_\theta^0}{r} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{H_\theta^0}{r} \right) = \frac{\pi J^\varphi \sin \theta}{r_0 x^3}, \quad (23)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} H_r^0 = \frac{2\pi J^\varphi \cos \theta}{r_0 (1 + x^2)^{3/2}}.$$

6. НАХОЖДЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Для вычисления потенциала A_0 электрического поля воспользуемся формулой

$$F^{\alpha 0} = \{F_{\beta 0} g^{00} + F_{\beta\varphi} g^{0\varphi}\} g^{\alpha\beta}. \quad (24)$$

Однако компоненты $F^{\alpha 0}$ нужно выразить через компоненты $\tilde{F}_{\beta 0}$ и $\tilde{F}^{\beta\varphi}$, поскольку в стационарных системах отсчета только для них мы знаем граничные условия. Для полоидальных компонент электромаг-

нитного поля с помощью формул (6), (8), (9) и с учетом выражения⁸⁾ $g^{\alpha i} g_{\gamma i} = g^{\alpha\beta} g_{\gamma\beta} = \delta_{\gamma}^{\alpha}$ получаем

$$F^{\alpha 0} = L_f \left[g^{00} g^{\alpha\beta} \tilde{A}_{0,\beta} + \tilde{F}^{\alpha\varphi} (\Omega_H - \Omega) / (\kappa + \Omega^2) \right], \quad (25)$$

где $L_f = [1 - (\Omega - \Omega_H)^2 / (\kappa + \Omega^2)]^{-1}$ имеет смысл лоренц-фактора опорного наблюдателя относительно стационарной системы горизонта.

Отсюда во втором приближении по параметру $a^* = a/M = L/M^2$ — безразмерному моменту количества движения черной дыры ($0 < a^* < 1$) — первое уравнение (14) можно привести к виду

$$\Delta \tilde{A}_0 = -4\pi \left(f(H_\alpha) + U(\tilde{A}_0) \right). \quad (26)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа в евклидовом пространстве, H_α — шварцшильдовские компоненты магнитного поля, найденные в предыдущем разделе:

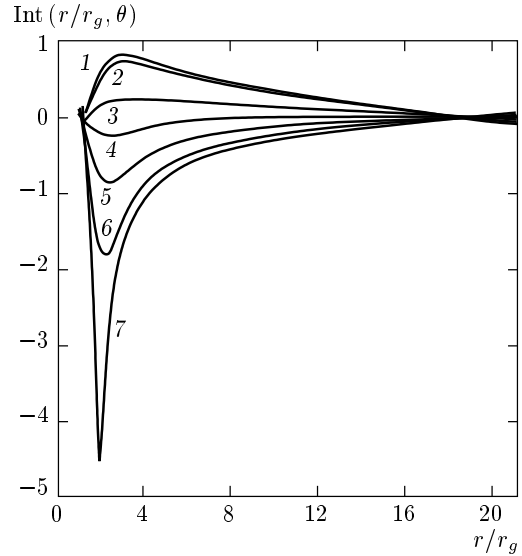
$$U(\tilde{A}_0) = -\frac{r_g}{4\pi r^3} \partial_r (r^2 \partial_r \tilde{A}_0),$$

$$f(H_\alpha) = \frac{a}{4\pi r_g^2} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \times \left[\left(1 + \frac{r_g}{r} + \frac{r_g^2}{r^2} \right) (2H_r \cos \theta - 4\pi j^\varphi r^2 \sin^2 \theta) - \left(2 + \frac{r_g}{r} \right) \frac{H_\theta}{r} \sin \theta \right].$$

Выражение в круглых скобках в правой части (26) представляет собой аналог плотности электрического заряда в уравнении Пуассона. Однако из-за второго слагаемого — функции U , зависящей от \tilde{A}_0 , — решать его можно методом итераций, полагая в начальной итерации $U = 0$. Согласно граничным условиям (10), решение уравнения (26) эквивалентно нахождению потенциала \tilde{A}_0 , создаваемого плотностью электрического заряда $\rho = f + U$ вокруг проводящей сферы радиуса r_g в евклидовом пространстве. Эта внешняя задача для уравнения Пуассона решается с помощью метода изображений [6]. Решение, удовлетворяющее граничным условиям (10), имеет вид

$$\tilde{A}_0(r, \theta) = \int_{r_g}^{\infty} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi dr' d\theta' d\varphi' \rho(r', \theta') \times \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{r_g/r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'r_g^2/r'^2|} \right\} r'^2 \sin \theta'. \quad (27)$$

⁸⁾ Для индекса α , пробегающего значения r и θ , имеем $g^{0\alpha} = 0, g_{0\alpha} = 0$.



Зависимость $\text{Int}(r/r_g, \theta)$ при $r_0/r_g = 2$ и $\theta = 0$ (кривая 1), $\pi/12$ (2), $\pi/6$ (3), $\pi/4$ (4), $\pi/3$ (5), $5\pi/12$ (6) и $\pi/2$ (7)

Интегрирование проводится в евклидовом пространстве вне шара радиуса r_g (см. (19)). Для нахождения из (27) потенциала A_0 , согласно (7), получаем

$$A_0 = \tilde{A}_0 - \Omega_H \tilde{A}_\varphi, \quad A_\varphi = \tilde{A}_\varphi. \quad (28)$$

В качестве общего множителя из-под интеграла (27) можно вынести величину aJ^φ/r_0 . Обозначая через $H_0 = 2\pi J^\varphi/r_0$ величину магнитного поля в центре системы при отсутствии черной дыры (см. (23)), для \tilde{A}_0 и A_0 находим

$$\tilde{A}_0 = \widetilde{\text{Int}} \left(\frac{r}{r_g}, \theta \right) \frac{a^* M H_0}{2\pi}, \quad (29)$$

$$A_0 = \text{Int} \left(\frac{r}{r_g}, \theta \right) \frac{a^* M H_0}{2\pi}.$$

Здесь $\widetilde{\text{Int}}(x)$ и $\text{Int}(x)$ — безразмерные функции, которые находятся численно согласно выражениям (27) и (28). Соответствующие результаты представлены на рисунке. При этом некоторые важные характеристики решения можно увидеть и аналитически.

1. Система имеет зеркальную симметрию относительно инверсии в экваториальной плоскости⁹⁾, поэтому направление электрического поля на оси зависит от совпадения направлений момента количества движения черной дыры и момента кольцевого тока.

⁹⁾ Это видно из (26) и выражения для $f(\sin \theta$ и H_θ четны, а $\cos \theta$ и H_r нечетны относительно зеркальной инверсии).

2. Из (27) видно, что $\tilde{A}_0 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow r_H$ (выражение в фигурных скобках обращается в нуль). Этот важный факт имеет простое объяснение.

Вследствие того что полный заряд под горизонтом равен нулю, электрическое поле должно пронизывать горизонт в разных направлениях. Поэтому должна существовать эквипотенциальная поверхность, разделяющая эти направления, пронизывающая горизонт и уходящая на бесконечность. Поскольку потенциал \tilde{A}_0 не меняется ни на этой поверхности, ни на горизонте (в силу граничных условий), потенциал горизонта равен потенциалу бесконечности — нулю. Этот вывод имеет важное следствие: существование локального экстремума у потенциала \tilde{A}_0 . Аналогичные рассуждения можно применить и для A_0 . Может показаться, что вблизи экстремума должна возникнуть ненулевая плотность электрического заряда, но в действительности это не так: плотность заряда определяется контравариантными компонентами электрического поля ($F^{\alpha 0}$, а не $F_{\alpha 0}$), вывод же выражения (27) основывается на первом уравнении в (14) — нулевой плотности заряда во всем пространстве. Подчеркнем, что в известном решении Уолда [7] для черной дыры, соосно помещенной в однородное магнитное поле, никакого экстремума нет. Это связано с тем, что на бесконечности в этом решении поле не обращается в нуль, и такое нефизичное граничное условие «уничтожает» экстремум.

7. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ВЫЛЕТАЮЩЕЙ ВДОЛЬ ОСИ

Сохраняющаяся масса-энергия заряженной частицы, не имеющей проекции момента количества движения на ось z , определяется выражением [4, 5]

$$E = m_0 \gamma_L \sqrt{\frac{\rho^2 \Delta}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}} - q A_0 = m_0 \gamma_L^\infty, \quad (30)$$

где γ_L — лоренц-фактор частицы, q — ее заряд.

Рассмотрим случай, когда вылетающая заряженная частица ускоряется вдоль оси z электрическим полем. В этом случае $q A_0 = -|q \tilde{A}_0|$, поэтому на бесконечности кинетическая энергия этой частицы с параметрами γ_L , g_{00} и A_0 , заданными в любой точке оси z , есть

$$E_k = E - m_0 = m_0 (\sqrt{g_{00}} \gamma_L - 1) + |q A_0|. \quad (31)$$

Поскольку для квазаров электромагнитная энергия заряженной частицы много больше, чем соответствующая энергия покоя, результат для A_0 удобно представить в виде энергии в электрон-вольтах, которую получает элементарный заряд, вылетающий вдоль оси. При магнитных полях $H_0 \approx 10^4$ Гс и массе $M \approx 10^8 M_\odot$ из (29) и (31) получаем

$$E_k [\text{эВ}] \approx 10^{19} a^* \text{Int} \left(\frac{r}{r_g}, 0 \right).$$

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, было рассчитано электрическое поле, создаваемое вращающейся черной дырой, взаимодействующей с внешним магнитным полем. Как видно из изложенного выше, это поле имеет квадрупольный характер, фактически являясь аналогом электрического поля пульсара (модель униполярного индуктора [8]).

Рассмотрение ситуации на оси z было выбрано не случайно. Из-за сильных магнитных полей ларморовы радиусы заряженной частицы должны быть порядка гравитационного радиуса системы, и механизм ускорения частиц будет эффективно действовать только в направлениях, близких к оси z , где не действует сила Лоренца.

Читатель может задать справедливый вопрос: не возникнет ли вблизи горизонта электрон-позитронная плазма, рожденная сильным электрическим полем, и не уничтожит ли она силовое поле $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \neq 0$? При больших градиентах A_0 это действительно может случиться, и тогда задачу следует решать в приближении бессилового поля (см. на эту тему обзорные работы [9–11]). Однако, как показывают численные оценки, напряженность электрического поля в модели не превышает 10^7 В/см, в то время как для рождения частиц¹⁰⁾ нужна напряженность порядка 10^9 В/см. Кроме того, в приближении бессилового поля частицы не могут ускоряться вдоль оси z — нет электрического поля в этом направлении. Да и в любом направлении в бессиловом поле электрическое и магнитное поля действуют на частицу в равной степени, поэтому если даже ее траектория и уйдет на бесконечность, то частица потеряет при этом большую часть своей энергии. Напомним, что в квазарах наблюдаются выбросы именно в

¹⁰⁾ Рождение частиц эффектами типа обратного комптон-эффекта не рассматривается ввиду предположения малой концентрации частиц вокруг черной дыры.

направлениях вдоль и против оси, поэтому решение данной задачи в приближении силового поля имеет важное значение.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность Н. С. Кардашеву, В. С. Бескину, В. Н. Лукашу, Б. В. Комбергу, М. И. Зельникову, Ю. Ю. Ковалеву, всем остальным сотрудникам теоретических отделов Астрокосмического центра и Физического института им. П. Н. Лебедева, а также участникам семинаров за активное участие при подготовке работы и важные высказанные замечания.

Работа поддержана РФФИ (проекты 001596698 и 010217829).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. D. Blandford and R. L. Znajek, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **179**, 433 (1977).
2. J. M. Bardeen and J. A. Petterson, *Astrophys. J. (Lett.)* **195**, L65 (1975).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
4. К. Торн, Р. Прайс, Д. Макдоналд, *Черные дыры: мембранный подход*, Мир, Москва (1988).
5. И. Д. Новиков, В. П. Фролов, *Физика черных дыр*, Наука, Москва (1986).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
7. R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **10**, 1680 (1974).
8. P. Goldreich and W. Julian, *Astrophys. J.* **157**, 869 (1969).
9. В. С. Бескин, *УФН* **167**, 689 (1997).
10. В. С. Бескин, Я. Н. Истомин, В. И. Парьев, *Астрон. ж.* **69**, 1258 (1992).
11. E-print Archive gr-qc/0012007, gr-qc/0002020.