

ДВУХФОТОННЫЕ СИСТЕМЫ ДЖЕЙНСА–КАММИНГА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ С КЛАССИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

*Р. А. Исмаилов, А. Я. Казаков**

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 30 мая 2001 г.

Если двухуровневый атом находится в двухфотонном резонансе с квантованной модой и одновременно взаимодействует с квазирезонансным классическим полем, то в такой системе наблюдается обмен фотонами между квантованной и классической модами. Показано, что такая физическая система может служить источником сжатого излучения в квантованной моде. При этом степень сжатия может быть сколь угодно близка к единице, а амплитуда излучения может быть относительно велика. Обсуждается ситуация, когда N атомов находятся в двухфотонном резонансе с квантованной модой и одновременно взаимодействуют с классическим полем. Описано явление «экспоненциального» сверхизлучения, когда число фотонов в квантованной моде излучения экспоненциально зависит от числа атомов N .

PACS: 42.50.Dv, 42.50.Fx

1. ВВЕДЕНИЕ

Физические системы, в основе которых лежит взаимодействие атома одновременно с квантованным и классическими полями, активно обсуждаются в последние годы (см. [1–12]). При этом классические поля, параметры которых легко задавать на практике, являются эффективным инструментом для управления процессом взаимодействия атома с квантованной модой.

В таких физических системах имеется естественная иерархия масштабов — обычно классические поля существенно более интенсивны, чем квантованные. Это означает, что если соответствующие константы взаимодействия атома с полями имеют одинаковый порядок величины, то эффективный параметр Раби классического поля существенно превосходит эффективный параметр Раби квантованного поля. Таким образом, динамика системы разделяется на две части: «быструю», связанную с взаимодействием атома (или атомов, если их несколько) с классическим полем, и «медленную», отвечающую взаимодействию атома с квантованным полем. Этот факт приводит к описанию динамики системы, «усредненной» относительно «быстрых» осцил-

ляций. Как будет показано ниже, при этом возможны «замкнутые» и «открытые» резонансы, когда усредненная по «быстрым» осцилляциям динамика является нетривиальной. В настоящей работе мы обсуждаем «открытые» резонансы, так что при выполнении соответствующего резонансного условия в усредненной системе нет закона сохранения возбуждений (в отличие от стандартной модели Джейнса–Каммингса).

Динамика двухфотонной модели Джейнса–Каммингса ранее обсуждалась в работах [13–18]. Изучению динамики двухфотонной модели Джейнса–Каммингса, взаимодействующей с классическим полем, в основном в рамках численных экспериментов посвящены работы [9, 10]. Различные аспекты динамики однофотонных моделей Джейнса–Каммингса, взаимодействующих с классическими полями, изучались в работах [1–5] для «замкнутых» резонансов. Однофотонная система Джейнса–Каммингса для «открытого» резонанса рассматривалась в статье [6], случай N двухуровневых атомов обсуждался в [7], N трехуровневых атомов — в [8]. Работы [11, 12] посвящены изучению динамики двухфотонной системы Джейнса–Каммингса (рассматривался случай одного атома), взаимодействующей с классическим полем.

*E-mail: a_kazak@mail.ru

В настоящей работе мы ограничимся обсуждением двухуровневых атомов. Аналогичные результаты могут быть получены и для трехуровневых атомов. С точки зрения приложений использование трехуровневых атомов может быть даже более привлекательным, так как найти реальный атом с переходами, отвечающими соответствующим резонансным условиям, в трехуровневом случае, по-видимому, легче. Однако технические детали в случае трехуровневых атомов несколько более громоздки, а физика процессов по существу одинакова. Поэтому мы ограничимся здесь случаем двухуровневых атомов. Мы не будем обсуждать при этом возможное влияние промежуточного уровня, считая его (как это обычно делается при обсуждении двухфотонного взаимодействия) исключенным адиабатически. Кроме того, мы не будем принимать во внимание процессы затухания квантованной моды, т. е. считаем соответствующий резонатор идеальным.

Работа построена следующим образом. Во втором разделе мы рассматриваем динамику одного двухуровневого атома, одновременно взаимодействующего с квазирезонансным классическим полем и (в двухфотонном приближении) с квантованной модой. Для «открытого» резонанса с помощью подходящей процедуры усреднения мы получаем «усредненный» по «быстрым» осцилляциям гамильтониан и исследуем соответствующую динамику системы. Наши методы позволяют получить полное аналитическое описание этой динамики и вычислить основные квантостатистические характеристики квантованного поля. Затем на основе этих результатов (частично полученных в [11, 12]) мы обсуждаем взаимодействие N атомов с классическим и квантованным полями. Мы показываем, что возможны ситуации, когда населенность квантованной моды экспоненциально возрастает со временем, причем показатель экспоненты линейно связан с числом атомов N .

2. ОДИН АТОМ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЙ С КВАНТОВАННОЙ МОДОЙ И КЛАССИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Начнем наше рассмотрение со случая, когда с квантованным и классическим полями взаимодействует один атом. Наша цель при этом — получить описание квантостатистических свойств квантованного излучения, а также подготовить необходимый формализм для исследования случая N атомов. Мы будем обсуждать решение начальной за-

дачи для соответствующего уравнения Шредингера, т. е. будем использовать представление Шредингера.

2.1. Основные понятия

Исходным для нас является гамильтониан, описывающий взаимодействие двухуровневого атома с квантованной модой (двухфотонное) и с монохроматическим классическим полем (квазирезонансное). В рамках дипольного приближения и приближения вращающейся волны он имеет вид

$$\mathbf{H} = \omega \mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \kappa \mathbf{J}_0 + \zeta \left\{ (\mathbf{a}^+)^2 \mathbf{J}_- + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+ \right\} + \mu [\mathbf{J}_- \exp(i\Omega t) + \mathbf{J}_+ \exp(-i\Omega t)], \quad (1)$$

где \mathbf{a}^+ и \mathbf{a} — операторы рождения и уничтожения для квантованного поля частоты ω ; Ω обозначает частоту классического поля, операторы

$$\mathbf{J}_0 = \text{diag}\{1, -1\}, \quad \mathbf{J}_- = \mathbf{J}_+^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

описывают двухуровневый атом, взаимодействующий с внешними полями, причем выполняются известные коммутационные соотношения:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] = 1, \quad [\mathbf{J}_0, \mathbf{J}_-] = -2\mathbf{J}_-, \quad [\mathbf{J}_0, \mathbf{J}_+] = 2\mathbf{J}_+,$$

параметр ζ описывает константу связи атома и квантованной моды, μ является (приведенной) амплитудой классического поля. Из стандартных коммутационных соотношений следует, что для любой аналитической функции $q(s)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{a}q(\mathbf{a}^+ \mathbf{a}) &= q(\mathbf{a}^+ \mathbf{a} + 1)\mathbf{a}, \\ \mathbf{a}^+q(\mathbf{a}^+ \mathbf{a}) &= q(\mathbf{a}^+ \mathbf{a} - 1)\mathbf{a}^+, \\ \mathbf{J}_-q(\mathbf{J}_0) &= q(\mathbf{J}_0 + 2)\mathbf{J}_-, \\ \mathbf{J}_+q(\mathbf{J}_0) &= q(\mathbf{J}_0 - 2)\mathbf{J}_+. \end{aligned} \quad (2)$$

Нас интересует динамика волновой функции, которая задается уравнением Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \mathbf{H} \Psi. \quad (3)$$

Как уже упоминалось, гамильтониан (1) выписан в рамках приближения вращающейся волны. Это значит, что оптическая частота намного превосходит все остальные частотные параметры задачи. Подобные гамильтонианы (для однофотонного взаимодействия, при условиях типа $\omega = \Omega$ или $\omega = 2\kappa = \Omega$) использовались в работах [1–3].

Гамильтониан (1) содержит несколько частотных параметров, определяемых характеристиками атома и полей. Это оптические частоты

$\omega \sim \kappa \sim \Omega/2$, параметр Раби классического поля $R \sim \mu$, параметр Раби квантованной моды $R_q \sim \zeta \sqrt{n(t)}$ ($n(t)$ — населенность квантованной моды, т.е. среднее число фотонов в квантованной моде). Мы полагаем в дальнейшем, что

$$R \gg R_q. \quad (4)$$

Отметим, что величина $n(t)$ неизвестна *a priori*. В связи с этим мы должны либо проверить справедливость (4) *a posteriori*, либо ограничиться рассмотрением тех временных интервалов, для которых это условие сохраняется.

Мы называем функции, которые существенно изменяются на временных интервалах R^{-1} (R_q^{-1}), быстрыми (медленными) функциями. Наша ближайшая цель — отделить быстрые осцилляции, вызванные взаимодействием атома с классическим полем, от медленной эволюции, связанной с взаимодействием с квантованной модой. Иными словами, мы выводим гамильтониан, «усредненный» относительно быстрых осцилляций. В качестве первого шага мы используем известное преобразование, отделяющее оптические частоты:

$$\Psi(t) = \exp[-i\omega t(\mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \mathbf{J}_0)] \Phi(t). \quad (5)$$

Оно приводит уравнение Шредингера к виду

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \left\{ (\kappa - \omega) \mathbf{J}_0 + \zeta \left[(\mathbf{a}^+)^2 \mathbf{J}_- + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+ \right] + \mu \left[\mathbf{J}_- \exp[-i(2\omega - \Omega)t] + \mathbf{J}_+ \exp[i(2\omega - \Omega)t] \right] \right\} \Phi. \quad (6)$$

Далее, пусть 2×2 -матричная функция $\Xi(t)$ есть решение следующей вспомогательной начальной задачи:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Xi = \left\{ (\kappa - \omega) \mathbf{J}_0 + \mu \left[\mathbf{J}_- \exp[-i(2\omega - \Omega)t] + \mathbf{J}_+ \exp[i(2\omega - \Omega)t] \right] \right\} \Xi, \quad (7)$$

$$\Xi(0) = I, \quad (8)$$

где I — единичная 2×2 -матрица. Нетрудно показать, что

$$\Xi(t) = \exp[i(2\omega - \Omega)t \mathbf{J}_0/2] \mathbf{U} \exp[-iRt \mathbf{J}_0] \mathbf{U}^{-1},$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mu & \Delta - R \\ R - \Delta & \mu \end{pmatrix}, \\ R = \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}, \quad \Delta = \kappa - \frac{\Omega}{2}.$$

Мы ищем решение уравнения (6) в виде

$$\Phi(t) = \Xi(t) \varphi(t). \quad (9)$$

Как следует из дальнейших результатов, соотношение (9) описывает волновую функцию как произведение быстрого и медленного множителей.

Используя соотношение (7), мы приходим к уравнению для функции $\varphi(t)$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) = \zeta \Xi^{-1}(t) \left[(\mathbf{a}^+)^2 \mathbf{J}_- + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+ \right] \Xi(t) \varphi(t). \quad (10)$$

Таким образом, мы переходим от волновой функции $\Psi(t)$ к $\varphi(t)$ с помощью подстановки

$$\Psi(t) = \exp[-i\omega t(\mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \mathbf{J}_0)] \Xi(t) \varphi(t),$$

причем, как следует из (8),

$$\varphi(0) = \Psi(0).$$

Уравнение (10) «проще», чем уравнение (3), так как его правая часть пропорциональна (относительно) малому параметру R_q . Этот факт дает возможность применить соответствующую асимптотическую процедуру для построения его решения в старшем асимптотическом порядке. Такая процедура обсуждалась ранее в работах [6–8] и аналогична стандартной процедуре усреднения. При этом мы ищем решение уравнения

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) = \zeta \langle \langle \Xi^{-1}(t) \left\{ (\mathbf{a}^+)^2 \mathbf{J}_- + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+ \right\} \Xi(t) \rangle \rangle \varphi(t). \quad (11)$$

Здесь $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ означает, что мы отбросили в правой части уравнения (10) «быстрые» гармоники с частотами порядка R .

Заметим, что операторы $\Xi(t)$ и $\exp[-i\omega t(\mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \mathbf{J}_0)]$ — унитарные матричные операторы. Фоковские операторы \mathbf{a} и \mathbf{a}^+ коммутируют с операторами $\exp(-i\omega t \mathbf{J}_0/2)$ и $\Xi(t)$. Отсюда следует, что если мы вычисляем $\langle G \rangle$, причем G является чисто фоковским оператором, полиномиальным по $\mathbf{a}^+ \mathbf{a}$, то

$$\langle G \rangle = \overline{\langle \Psi(t), G \Psi(t) \rangle} = \overline{\langle \varphi(t), G \varphi(t) \rangle}. \quad (12)$$

Атомы, взаимодействующие с квазирезонансными классическими полями, можно рассматривать как «атомы, одетые полем». В этих терминах нашу задачу можно рассматривать как двухфотонное взаимодействие «атомов, одетых полем» с квантованной модой. Соотношение (9) можно понимать как переход в базис состояний «атомов, одетых полем».

2.2. Усредненный гамильтониан

Простые выкладки с учетом наших результатов приводят к заключению, что оператор

$$\Xi^{-1}(t) \left[(\mathbf{a}^+)^2 \mathbf{J}_- + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+ \right] \Xi(t)$$

содержит следующие гармоники:

$$\pm(2\omega - \Omega), \quad \pm(2\omega - \Omega \pm 2R).$$

Таким образом, имеются три ситуации, когда усреднение приводит к нетривиальному (т. е. ненулевому в старшем асимптотическом порядке) результату.

1. $|R - (2\omega - \Omega)/2| = |\sigma| \ll R$. В этом случае усредненный гамильтониан имеет вид

$$\mathbf{H}_1 = \zeta \mu^2 D^{-1} \mathbf{U} \times \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a}^2 \exp[2i\sigma t] \\ (\mathbf{a}^+)^2 \exp[-2i\sigma t] & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1},$$

$$D = \det \mathbf{U} = \mu^2 + (R - \Delta)^2.$$

2. $|R + (2\omega - \Omega)/2| = |\eta| \ll R$. В этом случае усредненный гамильтониан в правой части (11) имеет вид

$$\mathbf{H}_2 = -\zeta(R - \Delta)^2 D^{-1} \mathbf{U} \times \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{a}^+)^2 \exp[2i\eta t] \\ \mathbf{a}^2 \exp[-2i\eta t] & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}.$$

В этих случаях мы приходим к гамильтониану, совпадающему (после тривиальных преобразований) с обычным гамильтонианом двухфотонной модели Джейнса–Каммингса. При этом, как хорошо известно, имеет место закон сохранения возбуждений в системе. В связи с этим мы называем эти резонансные условия замкнутыми.

3. $|2\omega - \Omega|/2 = |\nu| \ll R$. Усреднение правой части соотношения (11) дает

$$\mathbf{H}_3 = \zeta \mu(R - \Delta) D^{-1} \left((\mathbf{a}^+)^2 e^{2i\nu t} + \mathbf{a}^2 e^{-2i\nu t} \right) \mathbf{U} \mathbf{J}_0 \mathbf{U}^{-1}.$$

Как следует из дальнейших результатов, для данного гамильтониана нет закона сохранения возбуждений (как и для исходного гамильтониана). Этот факт отражает резкие отличия динамики этой системы от динамики систем, управляемых обычным двухфотонным гамильтонианом Джейнса–Каммингса. В связи с данным обстоятельством можно называть такое резонансное условие открытым. В дальнейшей части работы мы детально обсудим характерные особенности именно этого случая.

Отметим, что выполнение условий 1–3 может быть реализовано с помощью подбора соответствующих значений частот внешних полей и амплитуды классического поля.

Построенный в этом случае усредненный гамильтониан является произведением фоковского и матричного операторов. Это позволяет сделать дальнейшие упрощения. Заметим, что собственные векторы матричного оператора $\mathbf{U} \mathbf{J}_0 \mathbf{U}^{-1}$ есть

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{pmatrix} \mu \\ R - \Delta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{pmatrix} \Delta - R \\ \mu \end{pmatrix},$$

а $\varepsilon_k = (-1)^{k+1}$, $k = 1, 2$, — соответствующие собственные значения. Как следует из последнего соотношения, в этом случае гамильтониан системы расщепляется (с точностью до элементарного поворота) на два одномерных гамильтониана, различающихся только знаком. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением системы, управляемой гамильтонианом

$$\mathbf{H}_4 = \rho \left((\mathbf{a}^+)^2 e^{2i\nu t} + \mathbf{a}^2 e^{-2i\nu t} \right), \quad (13)$$

где $\rho = \zeta \mu(R - \Delta)/D$, что соответствует решению начальной задачи со специальной векторной структурой начального условия. Это позволит нам вычислить основные квантостатистические характеристики квантованного излучения, соответствующие специальному начальному условию. Полученные при этом соотношения позволяют также описать волновую функцию и в случае произвольного начального условия. Эти результаты позволят нам в дальнейшем изучить ситуацию, когда с квантованным и классическим полями одновременно взаимодействуют N идентичных двухуровневых атомов.

2.3. Решение начальной задачи

Перепишем уравнение Шредингера, соответствующее гамильтониану (13), в представлении Фокка–Баргманна (см., например, [19]), полагая выполненными замены $\mathbf{a} \rightarrow d/dz$, $\mathbf{a}^+ \rightarrow z$:

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho \left(z^2 e^{2i\nu t} \varphi + e^{-2i\nu t} \varphi_{zz} \right). \quad (14)$$

После замены переменных

$$\tau = t, \quad y = z \exp(i\nu t)$$

мы приходим к уравнению

$$i\varphi_\tau = \rho \left[\varphi_{yy} + y^2 \varphi \right] + \nu y \varphi_y. \quad (15)$$

Это уравнение можно решить, разделяя переменные (см. [11]). Однако мы будем использовать более удобный формализм, связанный с использованием подходящего интегрального преобразования. Де-

тально этот подход описан в работе [12]. Опуская громоздкие детали, решение уравнения (15) можно записать в виде

$$\varphi(z, t) = \exp \left[\frac{\beta z^2}{2} \exp(2i\nu t) + i(\nu + \beta\rho)t \right] \int ds \exp \left[iz \exp(i\nu t)s - \frac{\rho s^2}{2(\nu + 2\beta\rho)} \right] \Pi(s \exp[i(\nu + 2\beta\rho)t]), \quad (16)$$

где

$$\beta = - \left(\nu + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} \right) (2\rho)^{-1},$$

а функция $\Pi(x)$ определяется начальными данными, т. е. с помощью уравнения

$$\exp \left[\frac{\beta z^2}{2} \right] \int ds \exp \left[izs - \frac{\rho s^2}{2(\nu + 2\beta\rho)} \right] \Pi(s) = \varphi(0, z) = Q(z). \quad (17)$$

Если в начальный момент времени квантованная мода была в когерентном состоянии, $Q(z) = \exp(\alpha z)$, то мы получаем

$$\exp \left[\frac{\beta z^2}{2} \right] \int ds \exp \left[izs - \frac{\rho s^2}{2(\nu + 2\beta\rho)} \right] \Pi(s) = \exp(\alpha z).$$

Простые вычисления приводят к следующему соотношению для данной начальной задачи:

$$\Pi(s) = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{\alpha^2}{2\beta} - \frac{i\alpha s}{\beta} - \frac{s^2}{2\beta} + \rho \frac{s^2}{2(\nu + 2\beta\rho)} \right],$$

и, соответственно,

$$\varphi(z, t) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}}{\kappa(t)}} \exp \left\{ \frac{i\nu t}{2} + \frac{2\alpha z \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} \exp(i\nu t) - \alpha^2 \rho \chi(t) - \rho z^2 \exp(2i\nu t) \chi(t)}{\kappa(t)} \right\}, \quad (18)$$

где

$$\chi(t) = \exp \left(i\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}t \right) - \exp \left(-i\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}t \right),$$

$$\kappa(t) = \left(\nu + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} \right) \exp \left(i\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}t \right) - \left(\nu - \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} \right) \exp \left(-i\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}t \right).$$

2.4. Квантостатистические характеристики генерируемого квантованного излучения

Мы будем рассматривать в качестве начального состояния поля только вакуумное состояние, полагая $\alpha = 0$, поскольку случай произвольного когерентного состояния приводит к существенно более громоздким результатам. Более точно, наше начальное состояние описывается волновой функцией

$$\Psi(0) = |0\rangle \mathbf{e}_1,$$

где $|0\rangle$ — вакуумное состояние квантованной моды, а \mathbf{e}_1 — определенный выше собственный вектор матрицы \mathbf{U} (т. е. мы рассматриваем начальное условие со специальной векторной структурой). Нас интересуют значения чисто фоковских физических пере-

менных, вычисленных с помощью соответствующей волновой функции, так что учет векторной структуры волновой функции, как это отмечалось выше, тривиален. Мы вычислим число фотонов в квантованной моде

$$n(t) = \langle \mathbf{a}^+ \mathbf{a} \rangle$$

и величины

$$D_{\pm}(t) = \langle (\Delta X_{\pm}(t))^2 \rangle,$$

где

$$X_+(t) = \frac{\mathbf{a} \exp(i\omega t) + \mathbf{a}^+ \exp(-i\omega t)}{2},$$

$$X_-(t) = \frac{\mathbf{a} \exp(i\omega t) - \mathbf{a}^+ \exp(-i\omega t)}{2i}$$

являются квадратурными компонентами квантованного поля [20]. Более точно,

$$D_+(t) = \frac{1}{4} [2\langle \mathbf{a}^+ \mathbf{a} \rangle + 1 + \langle \mathbf{a}^2 \exp(2i\omega t) \rangle + \langle (\mathbf{a}^+)^2 \exp(-2i\omega t) \rangle - \langle [\mathbf{a} \exp(i\omega t) + \mathbf{a}^+ \exp(-i\omega t)]^2 \rangle], \quad (19)$$

$$D_-(t) = \frac{1}{4} [2\langle \mathbf{a}^+ \mathbf{a} \rangle + 1 - \langle \mathbf{a}^2 \exp(2i\omega t) \rangle - \langle (\mathbf{a}^+)^2 \exp(-2i\omega t) \rangle - \langle i[\mathbf{a} \exp(i\omega t) - \mathbf{a}^+ \exp(-i\omega t)]^2 \rangle]. \quad (20)$$

Значения этих физических величин описывают степень сжатия квантованного поля. Нетрудно проверить, что соответствующее неравенство Гейзенберга сводится к неравенству

$$D_-(t)D_+(t) \geq 1/16.$$

Если одна из этих величин меньше 1/4, то соответствующее квантованное поле называют сжатым. При вычислении этих величин мы будем использовать результаты предыдущих разделов, учитывая коммутационное соотношение (2). Таким образом,

$$n(t) = \int dz d\bar{z} \exp(-z\bar{z}) \overline{\varphi(z, t)} z \frac{d}{dz} \varphi(z, t) = \int dz d\bar{z} (z\bar{z} - 1) \exp(-z\bar{z}) \overline{\varphi(z, t)} \varphi(z, t),$$

$$D_{\pm}(t) = \frac{1}{4} \int dz d\bar{z} [2z\bar{z} - 1 \pm (z^2 + \bar{z}^2)] \times \exp(-z\bar{z}) \overline{\varphi(z, t)} \varphi(z, t).$$

Учитывая соотношение (18), можно свести эти интегралы к гауссовым. В итоге получаем следующие результаты.

А) Если выполняется условие $|\nu| > 2\rho$, то

$$n(t) = \frac{4\rho^2}{\nu^2 - 4\rho^2} \sin^2 \left(\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} t \right), \quad (21)$$

$$D_{\pm}(t) = \frac{1}{4} \pm \frac{\rho}{4(\nu^2 - 4\rho^2)} \times \left\{ \left(\nu + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} \right) \cos \left[2 \left(\nu + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} \right) t \right] + \left(\nu - \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} \right) \cos \left[2 \left(\nu - \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} \right) t \right] - 2\nu \cos(2\nu t) \right\} + \frac{2\rho^2}{\nu^2 - 4\rho^2} \sin^2 \left(\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} t \right). \quad (22)$$

Б) Если выполняется условие $|\nu| < 2\rho$, то

$$n(t) = \frac{4\rho^2}{4\rho^2 - \nu^2} \left\{ \operatorname{sh} \left(\sqrt{4\rho^2 - \nu^2} t \right) \right\}^2, \quad (23)$$

$$D_{\pm}(t) = \frac{1}{4} + \frac{2\rho^2}{4\rho^2 - \nu^2} \left\{ \operatorname{sh} \left(\sqrt{4\rho^2 - \nu^2} t \right) \right\}^2 \mp \frac{\rho \operatorname{sh} \left(\sqrt{4\rho^2 - \nu^2} t \right)}{4\rho^2 - \nu^2} \times \left\{ \sqrt{4\rho^2 - \nu^2} \operatorname{ch} \left(\sqrt{4\rho^2 - \nu^2} t \right) \sin 2\nu t + \nu \operatorname{sh} \left(\sqrt{4\rho^2 - \nu^2} t \right) \cos 2\nu t \right\}. \quad (24)$$

Как следует из соотношений (21), (23), при $|\nu| > 2\rho$ населенность квантованной моды осциллирует и ее амплитуда может принимать произвольно большие значения, при $|\nu| < 2\rho$ населенность растет со временем экспоненциально. При этом, однако, надо иметь в виду ограничение (4). Другими словами, эти результаты справедливы на временных интервалах, на которых выполняется ограничение (4). Поведение величины $D_+(t)$ при различных значениях параметра $\zeta = |\rho/\nu|$ представлено на рис. 1. Из этих графиков следует, что квантованное излучение является сжатым ($D_+(t) < 0.25$) в определенных временных интервалах и при ζ , стремящемся сверху и снизу к 1/2, максимальная степень сжатия увеличивается вплоть до 1. Поведение величины $D_-(t)$ имеет аналогичный характер. Отметим, что, как следует из полученных соотношений, сжатое излучение может быть одновременно интенсивным (т. е. $n(t)$ для сжатого излучения может принимать произвольно большие значения).

Величина ρ отличается от параметра ζ , описывающего связь квантованной моды и атомного перехода в двухфотонном резонансе, лишь множителем порядка единицы. Поэтому она принимает достаточно малые значения и на практике условие Б) весьма трудно выполнить. Условие Б) можно воспринимать как условие «точной настройки» частот квантованной и классической мод, в то время как условие «открытого резонанса», выписанное выше (условие 3), при этом имеет смысл условия «грубой настройки» для этих частот. Возможность существенно ослабить условие Б) возникает при рассмотрении случая N атомов, который мы обсудим ниже.

2.5. Специальный случай

Особая ситуация возникает, когда $\nu = 2\varepsilon\rho$, $\varepsilon = \pm 1$. Напомним, что параметр ν связан с частотой

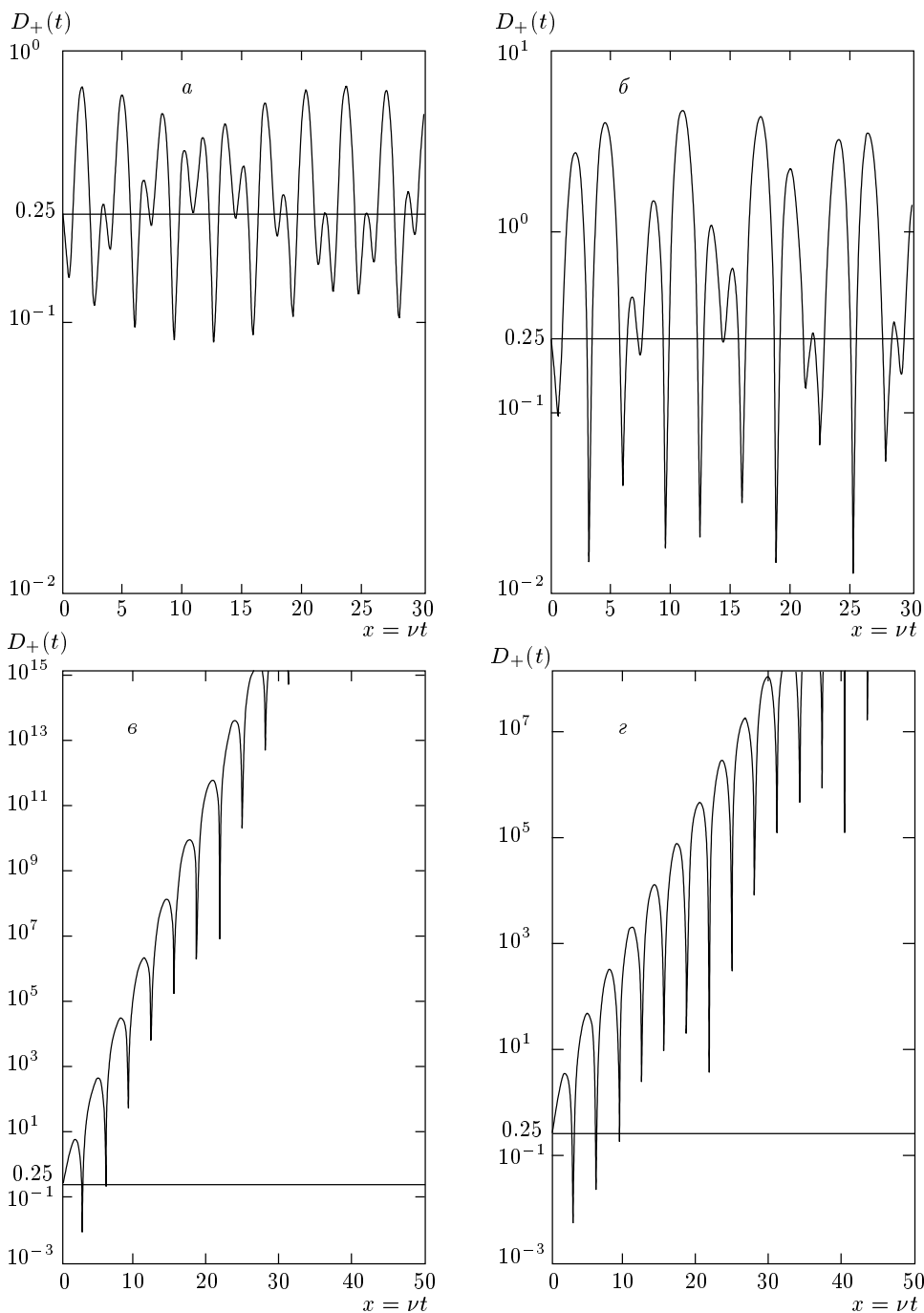


Рис. 1. Динамика квадратурной компоненты $D_+(t)$ для различных значений параметра $\zeta = 0.25$ (а), 0.45 (б), 0.60 (в), 0.52 (г)

той классического поля и может быть выбран, вообще говоря, произвольным. Этот случай может быть рассмотрен с помощью соответствующего предельного перехода $\zeta \rightarrow 1/2$. Однако можно использовать и прямой подход. Повторяя предыдущие рассуждения, мы получаем в данном случае для решения на-

чальной задачи интегральное представление

$$\varphi(z, t) = \exp \left[\frac{\varepsilon z^2 \exp(2i\nu t)}{2} \right] \times \int \exp \left[izs \exp(i\nu t) + i\rho t s^2 - \frac{i\nu t}{2} \right] \Pi(s) ds,$$

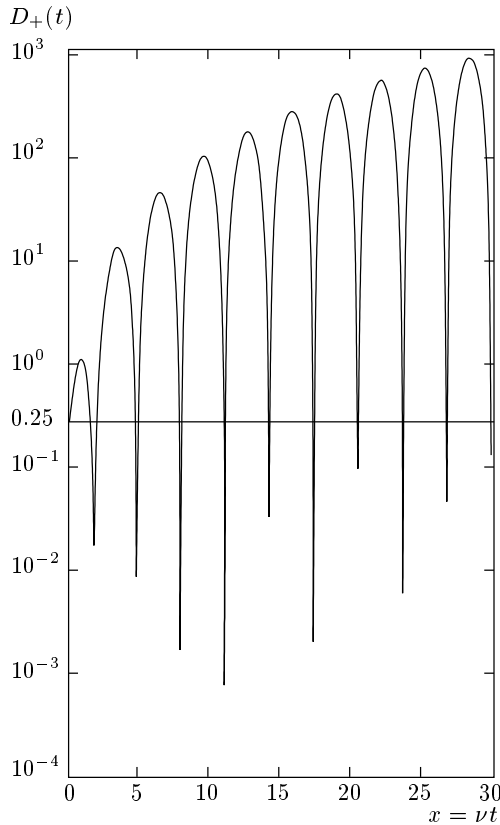


Рис. 2. Динамика квадратурной компоненты $D_+(t)$ для случая $\nu = 2\varepsilon\rho$, $\varepsilon = \pm 1$; параметр $\zeta = 0.50$

где функция $\Pi(s)$ определяется из начальных данных. Если в начальный момент времени квантованная мода находилась в когерентном состоянии, $\varphi(z, 0) = \exp(\alpha z)$, то

$$\varphi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - i\nu t}} \times \exp \left\{ \frac{2\alpha z \exp(i\nu t) - i\nu t z^2 \exp(2i\nu t) - i\nu \alpha^2 t}{2(1 - i\nu t)} - \frac{i\nu t}{2} \right\}$$

(для определенности мы выбираем здесь $\varepsilon = 1$). Простые вычисления приводят в случае $\alpha = 0$ к следующим результатам:

$$\begin{aligned} N(t) &= \nu^2 t^2, \\ D_{\pm}(t) &= \frac{1}{4} + \frac{\nu^2 t^2}{2} \mp \frac{1}{2} [\nu^2 t^2 \cos(2\nu t) + \nu t \sin(2\nu t)]. \end{aligned} \tag{25}$$

Отметим, что населенность квантованной моды растет со временем неограниченно, так что мы должны использовать соответствующую оговорку относительно временных интервалов, на которых справедливы наши результаты. Поведение величины $D_+(t)$

в этом случае представлено на рис. 2. И в этом случае степень сжатия генерируемого квантованного излучения может быть сколь угодно близка к 1. Нетрудно проверить, что выражения (22) и (24) при $\zeta \rightarrow 1/2$ стремятся к выражению (25).

С помощью наших результатов нетрудно описать решение начальной задачи для $\Psi(0) = |0\rangle \mathbf{e}$, где \mathbf{e} — произвольный вектор, описывающий начальное состояние атома. Этот факт будет использован ниже при обсуждении динамики в случае N атомов.

3. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ

3.1. Основные обозначения

Как было показано в предыдущем разделе, в случае одновременного взаимодействия атома с квантованным и классическим полями соответствующие моды обмениваются фотонами, причем атом играет роль своеобразного передатчика фотонов. При этом существует область параметров, когда число фотонов в квантованной моде растет экспоненциально. Как отмечалось выше, условие Б), при котором это явление происходит, накладывает ограничения при практической реализации. В данном разделе мы рассмотрим ситуацию, когда N идентичных двухуровневых атомов одновременно взаимодействуют с квантованной модой и классическим полем, причем с квантованной модой имеется двухфотонный резонанс, а классическое поле квазирезонансно атомному переходу. Мы предполагаем, что атомы находятся на расстояниях, малых по сравнению с длинами волн наших мод, так что все атомы одинаково взаимодействуют с оптическими полями. При этом нас интересуют кооперативные эффекты в данной системе. Мы покажем, что в данном случае условие Б) может быть существенно смягчено.

Итак, в данном случае волновая функция принимает значения в пространстве

$$L = F \otimes C^2 \otimes C^2 \dots \otimes C^2,$$

где фоксовское пространство F описывает состояния квантованной моды и N экземпляров пространства C^2 описывают состояния атомов. Пространство L можно представить как линейную оболочку векторов

$$n = f |e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_N}\rangle,$$

где e_{k_n} — описанные выше собственные векторы матрицы $\mathbf{U} \mathbf{J}_0 \mathbf{U}^{-1}$, $k_m = 1, 2$.

Определим операторы $\mathbf{J}_0^{(m)}, \mathbf{J}_-^{(m)}, \mathbf{J}_+^{(m)}$ и $\Xi^{(m)}(t)$, $1 \leq m \leq N$, следующим образом: они действуют на

m -ую компоненту вектора $|v_1 v_2, \dots, v_N\rangle$ как операторы $\mathbf{J}_0, \mathbf{J}_-, \mathbf{J}_+$ и $\Xi(t)$, соответственно, и не влияют на другие компоненты. Тогда гамильтониан системы, описывающий взаимодействие N атомов с квантованным и классическим полями, в наших предположениях (в рамках приближения вращающейся волны) может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_N = & \omega \mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \kappa \sum_{m=1}^N \mathbf{J}_0^{(m)} + \\ & + \zeta \sum_{m=1}^N \left\{ (\mathbf{a}^+)^2 \mathbf{J}_-^{(m)} + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+^{(m)} \right\} + \\ & + \mu \sum_{m=1}^N \left[\mathbf{J}_-^{(m)} \exp(i\Omega t) + \mathbf{J}_+^{(m)} \exp(-i\Omega t) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Нас интересует эволюция волновой функции $\Psi(t)$, решение соответствующего уравнения Шредингера. Отделим оптическую частоту с помощью аналога соотношения (5):

$$\Psi(t) = \exp \left[-i\omega t \left(\mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \sum_{m=1}^N \mathbf{J}_0^{(m)} \right) \right] \Phi(t).$$

Для функции $\Phi(t)$ мы получим уравнение

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = & \left\{ (\kappa - \omega) \sum_{m=1}^N \mathbf{J}_0^{(m)} + \right. \\ & + \zeta \sum_{m=1}^N \left[(\mathbf{a}^+)^2 \mathbf{J}_-^{(m)} + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+^{(m)} \right] + \\ & + \mu \sum_{m=1}^N \left[\mathbf{J}_-^{(m)} \exp(i(\Omega - 2\omega)t) + \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{J}_+^{(m)} \exp(i(2\omega - \Omega)t) \right] \right\} \Phi(t). \end{aligned}$$

Матрицы $\Xi^{(m)}(t)$, $m = 1, 2, \dots, N$, коммутируют. Введем матрицу

$$\Xi_N(t) = \prod_{m=1}^N \Xi^{(m)}(t).$$

При этом $\Xi_N(0)$ — единичная матрица в

$$C^2 \otimes C^2 \dots \otimes C^2,$$

а $\Xi_N(t)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \Xi_N(t) = & \left\{ (\kappa - \omega) \sum_{m=1}^N \mathbf{J}_0^{(m)} + \right. \\ & + \mu \sum_{m=1}^N \left[\mathbf{J}_-^{(m)} \exp(i(\Omega - 2\omega)t) + \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{J}_+^{(m)} \exp(i(2\omega - \Omega)t) \right] \right\} \Xi_N(t). \end{aligned}$$

Подставляя $\Phi(t) = \Xi_N(t)\varphi(t)$, мы приходим к уравнению для функции $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = & \zeta \Xi_N^{-1}(t) \times \\ & \times \sum_{m=1}^N \left[(\mathbf{a}^+)^2 \mathbf{J}_-^{(m)} + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+^{(m)} \right] \Xi_N(t) \varphi(t). \end{aligned} \quad (27)$$

При этом $\varphi(0) = \Phi(0)$. Оператор

$$\exp \left[-i\omega t \left(\mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \sum_{m=1}^N \mathbf{J}_0^{(m)} \right) \right] \Xi_N(t)$$

унитарен и коммутирует с оператором $\mathbf{a}^+ \mathbf{a}$. Таким образом, для чисто фоковского оператора $G = (\mathbf{a}^+ \mathbf{a})^m$ мы получаем

$$\langle G \rangle = \langle \overline{\Psi(t)}, G \Psi(t) \rangle = \langle \overline{\varphi(t)}, G \varphi(t) \rangle.$$

3.2. Медленная динамика

Как и в случае одного атома, правая часть уравнения (27) содержит быстрые и медленные осцилляции. Отбрасывая быстрые осцилляции, мы получим уравнение, описывающее медленную эволюцию системы в результате взаимодействия атомов с квантованным полем:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = & \zeta \langle \langle \Xi_N^{-1}(t) \sum_{m=1}^N \left[(\mathbf{a}^+)^2 \mathbf{J}_-^{(m)} + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+^{(m)} \right] \Xi_N(t) \varphi(t) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Как и ранее, мы обсуждаем здесь случай

$$|2\omega - \Omega| = 2|\nu| \ll R,$$

где R — параметр Раби классического поля. Это условие налагает ограничение на разность частот классической и квантованной мод. Процедура усреднения в данном случае приводит к нетривиальному

(т. е. ненулевому в старшем асимптотическом порядке) вкладу, и мы получаем

$$\mathbf{H}_{av} = \rho \left[(\mathbf{a}^+)^2 \exp(2ivt) + \mathbf{a}^2 \exp(-2ivt) \right] \times \sum_{m=1}^N \mathbf{U}_m \mathbf{J}_0^{(m)} \mathbf{U}_m^{-1},$$

где матрица \mathbf{U}_m действует как матрица \mathbf{U} на m -ю компоненту волновой функции и не изменяет других компонент. Этот гамильтониан управляет эволюцией системы, состоящей из «одетых полем атомов» и квантованной компоненты. Как и для одного атома, этот гамильтониан представляет собой произведение фоковского оператора

$$(\mathbf{a}^+)^2 \exp(2ivt) + \mathbf{a}^2 \exp(-2ivt)$$

и матричного оператора. Таким образом, после перехода к разложению по базису векторов $|\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_N}\rangle$, которые являются собственными векторами матрицы

$$\sum_{m=1}^N \mathbf{U}_m \mathbf{J}_0^{(m)} \mathbf{U}_m^{-1},$$

усредненный гамильтониан расщепляется на набор одномерных гамильтонианов. В соответствии с этим мы представляем искомую волновую функцию в следующем виде:

$$\varphi(t) = \sum_{\sigma} \eta_{\sigma}(t) |\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_N}\rangle,$$

где функции $\eta_{\sigma}(t)$ принимают значения в фоковском пространстве, σ обозначает набор из N чисел k_1, k_2, \dots, k_N , каждое из которых принимает значение либо 1, либо 2, а суммирование происходит по всем таким наборам σ . Для каждого $\eta_{\sigma}(t)$ мы получаем

$$i \frac{\partial \eta_{\sigma}(t)}{\partial t} = \rho S_{\sigma} \times \left[(\mathbf{a}^+)^2 \exp(2ivt) + \mathbf{a}^2 \exp(-2ivt) \right] \eta_{\sigma}(t), \quad (28)$$

где

$$S_{\sigma} = \sum_{m=1}^N (-1)^{k_{m+1}},$$

суммирование включает все числа k_m , образующие набор σ . Таким образом, S_{σ} означает суммирование по m собственным значениям операторов $\mathbf{U}_m \mathbf{J}_0^{(m)} \mathbf{U}_m^{-1}$, причем эти собственные значения равны ± 1 . Заметим, что в уравнении (28) только множитель S_{σ} зависит от σ . Решение начальной задачи для

уравнения (28) с $\eta_{\sigma}(z, 0) = Q_{\sigma}(z)$ описывается с помощью очевидной модификации соотношений (16), (17). Таким образом, и в случае N атомов в рамках принятых нами предположений можно решить начальную задачу для любых начальных данных в аналитических терминах.

3.3. Кооперативное поведение

Обсудим следующую начальную задачу: квантованная мода находится в начальный момент времени в вакуумном состоянии, все атомы находятся в одном и том же начальном состоянии $v \in C^2$, причем

$$v = \mathbf{e}_1 \cos \chi + \mathbf{e}_2 \sin \chi.$$

Разлагая волновую функцию системы в описанном выше базисе, мы приходим к следующим начальным значениям для отдельных компонент этого разложения:

$$\eta_{\sigma}(z, 0) = (\cos \chi)^{N-k} (\sin \chi)^k$$

(здесь k означает число «двоек» в наборе σ). Для данного набора σ мы обозначим это число $|\sigma|$. Тогда

$$\eta_{\sigma}(z, t) = (\cos \chi)^{N-k} (\sin \chi)^k \varphi_{\sigma}(z, t),$$

причем функция $\varphi_{\sigma}(z, t)$ задается соотношением (18) с учетом подстановки $\rho \rightarrow \rho S_{\sigma}$. Отметим, что если $|\sigma| = k$, то $S_{\sigma} = N - 2k$ и для заданного k имеется $\binom{N}{k}$ различных наборов σ с фиксированным значением $|\sigma|$. В соответствии с предыдущими результатами для фоковского оператора $G = (\mathbf{a}^+ \mathbf{a})^m$ мы получаем в рамках представления Фока–Баргманна

$$\begin{aligned} \langle G \rangle &= \langle \overline{\varphi(z, t)}, G \varphi(z, t) \rangle = \\ &= \sum_{\sigma} \int dz d\bar{z} \exp(-z\bar{z}) \overline{\eta_{\sigma}(z, t)} G \eta_{\sigma}(z, t) = \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{|\sigma|=k} \int dz d\bar{z} \exp(-z\bar{z}) \overline{\eta_{\sigma}(z, t)} G \eta_{\sigma}(z, t) = \\ &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (\cos \chi)^{2N-2k} (\sin \chi)^{2k} \times \\ &\quad \times \int dz d\bar{z} \exp(-z\bar{z}) \overline{\varphi_{\sigma}(z, t)} G \varphi_{\sigma}(z, t) |_{|\sigma|=k}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что коэффициенты $\eta_{\sigma}(z, t)$ с одинаковыми S_{σ} совпадают.

Найдем с помощью наших результатов число фотонов в квантованной моде. Соответствующие интегралы были уже вычислены ранее, и мы находим

$$\langle n(t) \rangle = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (\cos \chi)^{2N-2k} (\sin \chi)^{2k} \times \frac{4\rho^2 (N-2k)^2}{4\rho^2 (N-2k)^2 - \nu^2} \times \left[\operatorname{sh} \left(\sqrt{4\rho^2 (N-2k)^2 - \nu^2 t} \right) \right]^2. \quad (29)$$

Отметим, что мы использовали соотношение (23), которое соответствует случаю

$$4\rho^2 (N-2k)^2 - \nu^2 > 0.$$

Как следует из наших результатов, другие ситуации могут быть рассмотрены с помощью процедуры аналитического продолжения этого соотношения.

Аналитическое исследование суммы в правой части последней формулы весьма затруднительно. Однако эту задачу можно упростить, когда число N велико. В этом случае мы можем переписать сумму в виде интеграла после следующих подстановок:

$$k = N \left(\frac{1-\xi}{2} \right), \quad d\xi \approx \frac{1}{N}, \quad \nu = 2N\rho\theta.$$

При этом преобразовании главный член асимптотики по большому числу N сохраняется. Учитывая формулу Стирлинга для гамма-функции, при $N \gg 1$ находим

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2N}{\pi}} |\sin \chi \cos \chi|^N \times \\ &\times \int_{-1}^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(\xi^2 - \theta^2) \sqrt{1 - \xi^2}} \times \\ &\times \{ \exp [N\mu_+(\xi, t)] + \exp [N\mu_-(\xi, t)] - \\ &- 2 \exp [N\mu_-(\xi, 0)] \}, \quad (30) \\ \mu_{\pm}(\xi, t) &= -\frac{1}{2} \left[(1 + \xi) \ln \left(\frac{1 + \xi}{2} \right) + \right. \\ &+ (1 - \xi) \ln \left(\frac{1 - \xi}{2} \right) \left. \right] + \\ &+ \eta\xi \pm 4\rho t \sqrt{\xi^2 - \theta^2}, \end{aligned}$$

$\eta = \ln |\operatorname{ctg} \chi|$. Итак, нам следует вычислить три интеграла с большим параметром в аргументе экспоненты, содержащейся в подынтегральном выражении. Для этого мы можем использовать метод Лапласа. В данной работе мы ограничимся рассмотрением ситуации, когда параметр θ принимает малые значения. Напомним, что именно в подобном случае для

одного атома наблюдалось экспоненциальное возрастание населенности квантованной моды.

Дифференцируя функции $\mu_{\pm}(\xi, t)$ по ξ , мы находим уравнения для критических точек $\xi_{\pm}(t)$:

$$\frac{d}{d\xi} \mu_{\pm}(\xi_{\pm}, t) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \xi_{\pm}}{1 - \xi_{\pm}} \right) \pm \frac{4t\rho\xi_{\pm}}{\sqrt{\xi_{\pm}^2 - \theta^2}} + \eta = 0. \quad (31)$$

Это трансцендентные уравнения, которые в общем случае решить в явных терминах нельзя. Однако можно исследовать их решения при малых значениях параметра θ . Положим для определенности $\eta > 0$ и рассмотрим сначала уравнение для $\xi_+(t)$. Пренебрегая поправками порядка θ^2 , получаем

$$\xi_+(t) \approx \frac{\exp(2\eta + 8t\rho) - 1}{\exp(2\eta + 8t\rho) + 1}.$$

При увеличении t величина $\xi_+(t)$ увеличивается, стремясь к 1. Отметим, что

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \mu_+(\xi_+, t) \approx \frac{-1}{1 - \xi_+^2} < 0,$$

так что точка ξ_+ дает максимальное значение для функции $\mu_+(\xi, t)$ и, согласно методу Лапласа, определяет асимптотику по N соответствующего интеграла.

Далее рассмотрим поведение решения $\xi_-(t)$ при увеличении t . Расчеты показывают, что эта величина, стартуя со значения $\xi_-(0) = \eta$, уменьшается, при значениях порядка $t \sim \eta/4\rho$ она становится комплексной, а при дальнейшем увеличении t стремится к нулю. При комплексных значениях $\xi_-(t)$ следует применять метод перевала вместо метода Лапласа. Однако и из этих качественных рассуждений следует, что основной вклад в соотношение (33) дает первый интеграл. Пренебрегая поправками порядка θ^2 , мы можем с достаточной точностью считать, что

$$\begin{aligned} \mu_{\pm}(\xi_{\pm}, t) &\approx -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \xi_{\pm}^2}{4} \right) = \\ &= \ln [\exp(\eta \pm 4t\rho) + \exp(-\eta \mp 4t\rho)]. \end{aligned}$$

В итоге находим

$$\langle n(t) \rangle \approx \frac{1}{2} \left\{ [\exp(4t\rho) \cos^2 \chi + \exp(-4t\rho) \sin^2 \chi]^N \times \right. \\ \times \frac{\xi_+^2(t)}{\xi_+^2(t) - \theta^2} + \\ \left. + [\exp(-4t\rho) \cos^2 \chi + \exp(4t\rho) \sin^2 \chi]^N \times \right. \\ \left. \times \left| \frac{\xi_-^2(t)}{\xi_-^2(t) - \theta^2} \right| - \frac{2\xi_-^2(0)}{\xi_-^2(0) - \theta^2} \right\}. \quad (32)$$

Напомним, что этот результат мы получили при $\eta > 0$, т. е. при

$$\cos^2 \chi > \sin^2 \chi,$$

противоположный случай исследуется аналогично. Параметр χ определяется начальным состоянием атомов и параметрами классического поля — его амплитудой и отстройкой его частоты от частоты атомного перехода. Таким образом, величину χ легко задавать и контролировать в эксперименте.

Из соотношения (32) следует, что число фотонов в квантованной моде экспоненциально зависит от числа двухуровневых атомов N и при достаточно больших t ведет себя как $\exp(4N\rho t)$, т. е. мы наблюдаем в данном случае «экспоненциальное» сверхизлучение. Разумеется, при этом наши результаты справедливы лишь на тех временных интервалах, пока выполняется наше основное условие (4), т. е. в предположении, что классическое поле намного более интенсивное, чем квантованное.

Происхождение этого явления на формальном уровне довольно прозрачно. Нетрудно заметить, что параметр ρ входит в аргумент синуса в соотношении (21) и его аналогов для одного атома. Этот факт приводит, с учетом замены $\rho \rightarrow \rho S_\sigma$ (которая соответствует переходу от одного атома к N атомам), к появлению параметра N в аргументе синуса в выражении (29) для населенности квантованной моды для случая N атомов. Это контрастирует с ситуацией для однофотонного взаимодействия атомов с квантованной модой и классическими полями, обсуждавшейся в работах [7, 8], когда от параметра N зависел только коэффициент при осциллирующей гармонике.

С физической точки зрения источник этого явления заключается в кооперативном поведении «одетых полей атомов», которые начинают совместно перебрасывать фотоны из классической моды в квантованную. Как показано выше, при $\theta \ll 1$ этот процесс приобретает экспоненциальный характер, причем практически достаточно рассматривать условие

типа $\theta \sim 0.1$. Напомним, что $\theta = \nu(2N\rho)^{-1}$, так что последнее условие означает

$$|\nu| = |\omega - \Omega/2| \leq 0.2N\rho. \quad (33)$$

Очевидно, что это ограничение (при больших N) существенно слабее, чем условие $|\nu| < 2\rho$, при котором происходит экспоненциальный рост населенности квантованной моды в случае одного атома. Напомним, что это условие фиксирует «тонкую» настройку частот полей, «грубая» настройка описывается условием (4).

Кроме того, для реальных систем выполнение ограничения (4) необходимо лишь на временах, сравнимых с временем релаксации нашей физической системы τ_{rel} , которое определяется временем жизни фотона в резонаторе и временем распада используемых атомных состояний. Если это условие не выполняется на протяжении τ_{rel} , то мы можем наблюдать только начальную фазу экспоненциального роста населенности квантованной моды до тех значений времени, когда это ограничение нарушится (в предположении, что время наблюдения превосходит τ_{rel}).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем наши результаты. Мы обсудили динамику систем, содержащих один или много ($N \gg 1$) двухуровневых атомов, одновременно взаимодействующих с квазирезонансным классическим полем и находящимся в двухфотонном резонансе с квантованной модой. При этом предполагалось, что классическое поле существенно более интенсивное, чем квантованное. Исследовалась ситуация открытых резонансов, когда обмен фотонами между классической и квантованной модами происходит без выполнения закона сохранения числа возбуждений.

Было показано, что при взаимодействии одного атома с квантованным и классическим полями является возможность создания в квантованной моде сжатого излучения, причем степень сжатия может быть сделана сколь угодно близкой к единице. При этом амплитуда квантованной моды может быть (относительно) велика. Кроме того, возможны режимы, когда амплитуда квантованной моды экспоненциально растет со временем. Однако для одного атома это связано с выполнением довольно тонкого условия на настройку частот оптических полей. Для случая $N \gg 1$ идентичных двухуровневых атомов, взаимодействующих одновременно с квантованным и классическим полями, также возможна ситуация, когда амплитуда квантованной моды

экспоненциально растет со временем. При этом показатель экспоненты линейно связан с числом N , а соответствующее условие (33) для частот полей является в N раз менее ограничительным. Этот факт дает основания назвать данный феномен «экспоненциальным» сверхизлучением. Напомним, что для «обычного» сверхизлучения число фотонов возбуждаемого поля пропорционально N^2 (см. [21], а также обсуждение однофотонного варианта нашей задачи в [7, 8]).

Отметим в заключение, что тензорная структура волновой функции и квантовая интерференция, которые по существу являются основой описанного выше явления «экспоненциального сверхизлучения», играют также определяющую роль в «экспоненциально быстрых» алгоритмах квантовых вычислений [22].

ЛИТЕРАТУРА

1. C. K. Law and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **45**, 6337 (1991).
2. P. Alsing, D. S. Guo, and H. J. Carmichael, Phys. Rev. A **45**, 5135 (1992).
3. I. V. Jyotsna and G. S. Agarwal, Opt. Commun. **99**, 344 (1993).
4. М. Э. Смирнов, ЖЭТФ **112**, 818 (1997).
5. M. Z. Smirnov, Quant. Semicl. Opt. **10**, 765 (1998).
6. А. Я. Казаков, Quant. Semicl. Opt. **10**, 753 (1998).
7. Р. А. Исмаилов, А. Я. Казаков, ЖЭТФ **116**, 858 (1999).
8. Р. А. Исмаилов, А. Я. Казаков, ЖЭТФ **118**, 798 (2000).
9. F.-L. Li and S.-Y. Gao, Phys. Rev. A **62**, 043809 (2000).
10. A. Joshi, Phys. Rev. A **62**, 043812 (2000).
11. А. Я. Казаков, J. Opt. B **3**, 97 (2001).
12. А. Я. Казаков, submitted to Int. J. Theor. Phys. Groups Theory and Nonl. Opt. (2001).
13. B. Buck and C. V. Sukumar, Phys. Lett. A **81**, 132 (1981).
14. Fam Le Kien and M. Kozierowski, Trang Quang. Phys. Rev. A **38**, 263 (1988).
15. S. J. Phoenix and P. L. Knight, JOSA B **7**, 116 (1990).
16. T. Nasreen and M. S. K. Razmi, JOSA B **10**, 1292 (1993).
17. M. Kozierowski, Phys. Rev. A **47**, 723 (1993).
18. T. Nasreen and K. Zaheer, Phys. Rev. A **47**, 616 (1994).
19. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их приложения*, Наука, Москва (1987).
20. Е. И. Алискендеров, А. С. Шумовский, Хо Чунг Зунг, Физика ЭЧАЯ **24**, 409 (1993).
21. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
22. P. W. Shor, SIAM J. Comput. **26**, 1484 (1997).