ЖЭТФ, 2001, том 120, вып. 6 (12), стр. 1396–1403

О ТИПАХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННО ОГРАНИЧЕННЫХ СИСТЕМ

Д. Н. Клочков, А. А. Рухадзе *

Институт общей физики Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 мая 2001 г.

Дается классификация неустойчивостей в пространственно ограниченных системах, обобщающая приведенную в книге [1]. Показано, что если в системе нет активных границ, а в неограниченной однородной среде нет усиления волн, что соответствует отсутствию решений дисперсионного уравнения с отрицательной мнимой частью волнового вектора при вещественной частоте, то возможно развитие только безусилительных неустойчивостей с нелокальным резонансом. На примере пространственно ограниченной системы, пронизываемой потоком, рассматривается развитие безусилительной неустойчивости, когда наряду с собственными волнами учитывается возбуждение волн потоков, играющих принципиальную роль в развитии неустойчивости.

PACS: 52.35.-g

Традиционно считается, что генератор — это усилитель с обратной связью [2]. Если обратиться к распределенным пространственно ограниченным системам, то обратную связь здесь осуществляет отраженная от границ системы собственная волна, а под словом «усилитель» подразумевается усиление в среде по крайней мере одной из собственных волн. Это означает, что для неограниченной однородной среды дисперсионное уравнение собственных волн $D(\omega, k) = 0$ имеет комплексные корни $k = k_\nu(\omega)$ при действительных значениях частоты ω, причем часть корней лежит в нижней части комплексной k-плоскости. Из этого следует, что в случае неограниченной среды также имеет место неустойчивость: конвективная или абсолютная [1]. В качестве примера для пучковых систем можно привести широко известную черенковскую неустойчивость [3, 4].

Тем не менее в пространственно ограниченных системах существует по меньшей мере еще один класс неустойчивостей, когда все корни $k = k_\nu(\omega)$ реальны при действительных ω; более того, точка ветвления решений $k_\nu(\omega)$ лежит на действительной оси комплексной ω-плоскости. Это исключает развитие глобальной неустойчивости в конечной системе, конвективной и абсолютной — в неограниченной [1, 5]. Более того, инкремент этих неустойчивостей обратно пропорционален длине системы L, т. е.

$$\gamma_\omega^+ \propto L^{-1}.$$

Так как при анализе неустойчивостей в конечной области пространства обычно рассматривался асимптотический вид условия устойчивости при $L \to \infty$, часть неустойчивостей, встречающихся в ограниченных плазменных средах, просто выпадала из рассмотрения. В связи с этим назрела необходимость обобщить принятую классификацию неустойчивостей в ограниченных системах, изложение которой можно найти в книгах [1, 4], а также в оригинальной статье [5]. Вначале мы исследуем двухволновые неустойчивости и получим критерии, когда можно говорить о генераторе как об усилителе с обратной связью. Далее исследуем на примере четырех волн класс многоволновых неустойчивостей, которые не укладываются в традиционную схему, и покажем, что в ограниченной системе возможна генерация на четырех волнах в отсутствие усиления волн.

Рассмотрим пространственно ограниченную систему, в которой волны распространяются вдоль оси z, испытывая трансформацию на границах $z = 0$ и $z = L$. Пусть для соответствующей неограниченной однородной среды соответствующее линеаризованное волновое уравнение содержит полином сте-

*E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

пени N относительно пространственной производной $\partial/\partial z$. Тогда волновое дисперсионное уравнение $D(\omega, k) = 0$ определяет законы дисперсии волн

$$k_\nu = k_\nu(\omega), \quad \nu = 1, \ldots, N.$$

В этом случае волновые возмущения в системе конечной длины можно представить как суперпозицию нормальных волн ($\nu = 1, \ldots, N$) неограниченной однородной среды и переходного поля вблизи границ системы

$$A(t,z) = \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu \exp\left[-i\omega t + ik_\nu(\omega)z\right] + \\ + \sum_s B_s \exp\left[-i\omega t + ik_s(\omega)z\right]. \quad (1)$$

Здесь отдельно выделена сумма затухающих мод B_s, которые определяют переходное поле вблизи границ $z = 0$ и $z = L$ для случая поперечно неоднородных систем и которыми в случае бесконечно протяженной среды пренебрегают. В качестве примеров приведем случаи, когда в резонатор инжектируется тонкостенный трубчатый пучок электронов или в резонатор помещается трубчатая плазма. В этих случаях вблизи границ $z = 0$ и $z = L$ имеется переходное поле, описываемое второй суммой в (1), где индекс s нумерует поперечные волновые числа $k_{\perp s}$. Учет этих волн приводит к так называемым односторонним решениям [5]. В дальнейшем при составлении дисперсионного уравнения для пространственно ограниченной среды мы опустим волны $B_s \exp(-i\omega t + ik_s z)$, считая систему достаточно длинной, а моды B_s настолько быстро затухающими, что амплитуды этих волн, отраженных от другого конца системы, стремятся к нулю в окрестности рассматриваемой границы. Математически условие пренебрежения затухающими вглубь системы модами может быть выражено неравенством

$$\min\{L \,\mathrm{Im}\, k_s\} \gg 1, \quad (2)$$

которое мы считаем в дальнейшем всегда выполненным.

Волну вида $\exp\left[-i\omega t + ik_\nu(\omega)z\right]$, задаваемую ветвью $k_\nu(\omega)$, будем называть идущей в некотором направлении, если при $\mathrm{Im}\,\omega \to \infty$ она убывает при изменении z в этом направлении. Так, если при $\mathrm{Im}\,\omega \to \infty$ имеем $\mathrm{Im}\, k_\nu(\omega) \to \infty$, то волна распространяется в положительном направлении оси z, если же $\mathrm{Im}\, k_\nu(\omega) \to -\infty$, то волна распространяется в противоположную сторону. Можно показать, что для волн, близких к гармоническим, такое определение распространения волны совпадает с определением с помощью их групповой скорости.

Разобьем волны на две группы: группу волн, распространяющихся в положительном направлении оси z (им соответствует индекс «$+$»), и группу волн, идущих в противоположном направлении (им соответствует индекс «$-$»). На границах $z = 0$ и $z = L$ происходит взаимная трансформация каждой волны одной группы в волны другой. Пусть решена соответствующая дифракционная задача, т. е. найдены коэффициенты трансформации волн $A_\nu^\pm$ с учетом волн B_s переходного поля. Тогда на границе $z = 0$ будет справедливо следующее соотношение:

$$A_p^+ = \sum_{j=1}^{n^-} T_{pj}^{(in)} A_j^-, \quad p = 1, \ldots, n^+, \quad (3)$$

описывающее трансформацию волн k_j^- в волны k_p^+. Аналогично на границе $z = L$ трансформация волн k_μ^+ в волну k_n^- описывается уравнением

$$A_n^- \exp(ik_n^- L) = \sum_{j=1}^{n^+} T_{nj}^{(out)} A_j^+ \exp(ik_j^+ L), \\ n = 1, \ldots, n^-. \quad (4)$$

Здесь $n^+ + n^- = N$.

Система однородных линейных уравнений (3), (4) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Отсюда получается дисперсионное уравнение для пространственно ограниченной системы

$$\det\left\{\sum_{p=1}^{n^-} T_{jp}^{(in)} T_{pn}^{(out)} \times \\ \times \exp(i(k_n^+ - k_p^-)L) - \delta_{jn}\right\} = 0, \quad (5)$$

определяющее дискретный спектр частот ω системы.

В частном случае возможна такая ситуация, когда кроме волн k_1^+ и k_1^- других волн в системе нет, т. е. $N = 2$. Если $N > 2$, то для ω, лежащей в верхней части комплексной плоскости, выделим такие $k_{n^*}^+$ и $k_{p^*}^-$, мнимая часть разности которых минимальна, т. е.

$$\min_{\mathrm{Im}\,\omega > 0} \{\mathrm{Im}(k_n^+ - k_p^-)\} = \mathrm{Im}(k_{n^*}^+ - k_{p^*}^-). \quad (6)$$

Будем называть «основным волновым состоянием» состояние, соответствующее возбуждению волн $k_{n^*}^+$

и $k^-_{p^*}$. Для каждого волнового состояния, описываемого слагаемым $\{k^+_n - k^-_p\}$ в экспоненциальном множителе, определим «волновую щель» Δk_{np} от основного волнового состояния, т. е. вычислим величину

$$\Delta k_{np} = \mathrm{Im}(k^+_n - k^-_p) - \mathrm{Im}(k^+_{n^*} - k^-_{p^*}). \qquad (7)$$

Если длина системы L достаточно велика, т. е. если выполняется неравенство

$$L \min\{\Delta k_{np}\} > 1, \qquad (8)$$

то в уравнении (5) основной вклад дает слагаемое с $\exp[i(k^+_{n^*} - k^-_{p^*})L]$, описывающее основное волновое состояние. Заметим, что условие (8) не эквивалентно условию (2). Может оказаться, что условие (8) просто невыполнимо, а может быть и наоборот. Так, для резонансных неустойчивостей (таких, например, как черенковская) условие (8) выполняется и оказывается более сильным, чем условие (2). Будем считать, что условие (8) выполнено. В этом случае уравнение (5) существенно упрощается и принимает вид

$$T^{(in)}_{n^*p^*} T^{(out)}_{p^*n^*} e^{i(k^+_{n^*} - k^-_{p^*})L} = 1. \qquad (9)$$

Дадим теперь классификацию возможных неустойчивостей, описываемых уравнением (9). Для этого возьмем уравнение (9) по модулю

$$|T^{(in)}_{n^*p^*} T^{(out)}_{p^*n^*}| \exp[-\mathrm{Im}(k^+_{n^*} - k^-_{p^*})L] = 1. \qquad (10)$$

Если $\mathrm{Im}(k^+_{n^*} - k^-_{p^*}) > 0$, то экспоненциальный множитель в уравнении (10) меньше единицы. В этом случае неустойчивость может развиваться только, если

$$|T^{(in)}_{n^*p^*}||T^{(out)}_{p^*n^*}| > 1,$$

т. е. если имеет место сверхотражение хотя бы от одной из границ системы. В качестве примера можно привести явление развития акустических колебаний в резонаторе Гельмгольца, над открытой горловиной которого движется плоскопараллельный воздушный поток [6].

Если $\mathrm{Im}(k^+_{n^*} - k^-_{p^*}) < 0$, то экспоненциальный множитель в уравнении (10) больше единицы. В этом случае неустойчивость может развиваться даже в условиях потерь на границах системы.

Рассмотрим асимптотику $L \to \infty$. В зависимости от знака разности $\mathrm{Im}(k^+_{n^*} - k^-_{p^*})$ экспоненциальный множитель в уравнении (10) стремится либо к нулю, либо к бесконечности. Поэтому уравнение (10) выполняется для $L \to \infty$ только при условии

$$\mathrm{Im}(k^+_{n^*} - k^-_{p^*}) = 0. \qquad (11)$$

Уравнение (11), записанное относительно ω, представляет собой частный случай уравнения (10), когда влияние границ системы исключается. Фактически мы написали условие развития неустойчивости в безграничной среде, а конечность системы учли через отраженную волну. Неустойчивости данного типа получили название глобальных [1, 4, 5].

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда имеет место $\mathrm{Im}(k^+_n - k^-_p) \le 0$ при $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, т. е. когда развивается неустойчивость в отсутствие активных границ. Пусть при вещественном ω ($\mathrm{Im}\,\omega = 0$) волновое число имеет вид

$$k(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega).$$

При этом мы считаем что нет апериодического усиления в системе, т. е. выполняется условие

$$k''(\omega) \ll k'(\omega).$$

Пусть имеет место сдвиг частоты в верхнюю часть комплексной плоскости

$$\omega = \omega' + i\omega'', \quad \omega'' > 0.$$

Полагая $\omega'' \ll \omega'$, для волнового числа получим

$$k(\omega) = k'(\omega') + i\left(k'' + \frac{\omega''}{v_{gr}}\right). \qquad (12)$$

Здесь

$$v_{gr} = \frac{d\omega'}{dk'} = \left(\frac{dk'(\omega')}{d\omega'}\right)^{-1}$$

— групповая скорость волны. Условие пространственного усиления $\mathrm{Im}\,k < 0$ волны принимает вид

$$k'' < -\frac{\omega''}{v_{gr}}. \qquad (13)$$

Откуда видно, что усиление в среде возможно, если распространяется волна обратной дисперсии с $k = \alpha/\omega$ и групповой скоростью $v_{gr} = -\omega^2/\alpha < 0$, или если $|k''|$ настолько велико, что выполняется условие (13) при отрицательной правой части.

Пусть для волн $k^+_{n^*}$ и $k^-_{p^*}$ выполняется закон дисперсии вида (12). Опуская индексы n^* и p^*, ставшие уже ненужными, мы можем написать

$$k^+ - k^- = k'_+(\omega') - k'_-(\omega') + \\ + i\left[k''_+ - k''_- + \omega''\left(\frac{1}{v^+_{gr}} - \frac{1}{v^-_{gr}}\right)\right], \qquad (14)$$

откуда следует искомое неравенство

$$k''_+ - k''_- + \omega''\left(\frac{1}{v^+_{gr}} - \frac{1}{v^-_{gr}}\right) \le 0. \qquad (15a)$$

Таким образом, в отсутствие активных границ неустойчивость на двух волнах в конечной системе развивается при выполнении неравенства (15а), при этом знак равенства соответствует развитию глобальной неустойчивости с инкрементом

$$\omega'' = \frac{k''_- - k''_+}{1/v_{gr}^+ - 1/v_{gr}^-}.$$

Появление в формуле для инкремента групповой скорости имеет простое объяснение: обратная связь в системе осуществляется с групповой скоростью, так как именно с этой скоростью происходит перенос энергии волной. Если в системе нет усиления, но имеются активные границы, то уравнение (10) имеет решение при

$$|T^{(in)}_{n^*p^*}||T^{(out)}_{p^*n^*}| > 1. \tag{15б}$$

В этом случае усиление волн происходит вне рассматриваемой системы. Расширив область пространства и тем самым включив в систему область, где происходит усиление, мы приходим к случаю, когда в системе происходит усиление.

Итак, в пространственно ограниченной системе развитие неустойчивости на двух волнах возможно, если наряду с условием (8) выполняется хотя бы одно из условий (15). В этом случае неустойчивость является усилительной неустойчивостью с обратной связью в том смысле, что в системе имеет место усиление хотя бы одной волны и при этом одна или две волны осуществляют обратную связь с групповой скоростью. Все эти неустойчивости укладываются в традиционные представления о том, что генератор — это усилитель с обратной связью [2].

Если не выполняется ни одно из условий (15) и в системе нет больше волн, кроме двух рассматриваемых, то система устойчива относительно начальных возмущений. Если же в системе больше двух волн, то вопрос об устойчивости системы на основе невыполнения критериев (15) решить нельзя. Более того, может оказаться так, что волновая щель Δk_{np} невелика или отсутствует вовсе, или же система настолько коротка, что во всех перечисленных случаях условие (8) не выполняется. Тогда нельзя выделить две волны согласно условию (6) и тем самым редуцировать уравнение (5) к виду (10). В этом случае все волны, для которых выражение $L\,\mathrm{Im}(k_n^+ - k_p^-)$ имеет примерно одинаковую величину, равноправно входят в уравнение (5). Подстановка в уравнение (5) законов дисперсии $k_\nu = k_\nu(\omega)$ приводит к трансцендентному комплексному уравнению относительно ω. Если в результате решения полученного уравнения окажется, что ω имеет положительную мнимую часть ($\mathrm{Im}\,\omega > 0$), то система является неустойчивой. При этом выполнение условий (15) не обязательно, т. е. в системе может не быть ни активных границ, ни волн с обратной дисперсией, ни локального пространственного усиления волн ($k'' = 0$). Этот класс неустойчивостей, которые назовем «безусилительными», не укладывается в традиционные представления о том, что генератор — это усилитель с обратной связью. При этом число волн N в системе может быть любым, $N > 2$.

Наиболее простой и часто встречающейся ситуацией является случай четырех волн. Это происходит, когда систему пронизывает поток (например, пучок электронов или ионов, стабилизированный магнитным полем). Будем предполагать, что поток движется в положительном направлении оси z. Тогда в системе три волны движутся в том же направлении, что и поток (это собственная волна системы с волновым числом k_1 и две волны потока с волновыми числами k_3 и k_4), и только одна отраженная собственная волна системы с $k_2 = k^-$ распространяется в противоположном направлении.

Если на правой границе системы $z = L$ сопутствующие потоку волны A_1, A_3 и A_4 частично трансформируются во встречную волну A_2 и частично в волны, покидающие систему, то данный процесс можно записать в следующем виде:

$$\exp(ik_2L) = \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq 2}}^{4} T^{(out)}_{2\nu} T^{(in)}_{\nu 2} \exp(ik_\nu L). \tag{16}$$

Уравнение (16) является частным случаем уравнения (5) для четырех волн.

Будем считать, что в отсутствие потока среда системы является изотропной (симметричной относительно инверсии $z \to -z$), тогда волновые числа собственных волн системы без потока имеют вид $k_{1,2} = \pm a$, где a принимает дискретный набор значений в силу конечности системы (резонатора). Так как условие (8) не выполняется, это исключает возможность локального резонанса в системе, т. е. $\omega \neq au$, где u — скорость потока. Будем считать плотность потока настолько малой, что его можно учесть по теории возмущений. В этом случае для собственных волн системы имеем

$$k_{1,2} = \pm a + \delta k_{1,2}, \tag{17а}$$

а для волн потока

$$k_{3,4} = \frac{\omega}{u} \pm \delta k_3. \tag{17б}$$

Здесь

$$\delta k_1 = O(\omega_b^2), \quad \delta k_2 = O(\omega_b^2), \quad \delta k_3 = -\delta k_4 = O(\omega_b),$$

где ω_b — малый параметр, характеризующий невозмущенную плотность потока. Для пучков заряженных частиц ω_b — это ленгмюровская частота частиц пучка, а малым безразмерным параметром в этом случае является безразмерная величина ω_b/ω_0, где ω_0 — характерная частота системы. В плазмоподобных средах наличие пучка приводит к поправке $\delta\varepsilon$ в тензоре диэлектрической проницаемости, которая оказывается пропорциональной величине $\omega_b^2/(\omega-ku)^2$. Появление потокового выражения $\omega-ku$ в знаменателе следует из уравнения движения частиц пучка. В результате из возмущенной части $\delta\varepsilon$ тензора диэлектрической проницаемости получаем поправки δk_i в законе дисперсии волны. Так, если в пустой металлический резонатор круглого сечения инжектируется однородный моноэнергетический пучок электронов, то

$$\varepsilon_\parallel = -\frac{\omega_b^2\gamma^{-3}}{(\omega-ku)^2},$$

а

$$\delta k_{1,2} = \mp\frac{k_\perp^2\gamma^{-3}}{2a(\omega\mp au)^2}\omega_b^2 \tag{18а}$$

$$\delta k_{3,4} = \frac{\omega}{u}\,\frac{\gamma^{-5/2}}{\sqrt{\omega^2-a^2u^2}}\omega_b. \tag{18б}$$

Здесь $k_\perp$ — поперечное волновое число,

$$\gamma = (1-u^2/c^2)^{-1/2}$$

— релятивистский фактор.

Будем предполагать, что на входной границе $z=0$ влетающий поток не возмущен ни по скорости, ни по плотности. Чтобы удовлетворить этому условию, будем полагать, что на этой границе происходит зеркальное отражение волн, т. е. через границу $z=0$ волны систему не покидают. Условие зеркального отражения волн может быть представлено в виде

$$\sum_{\nu=1}^{4} k_\nu A_\nu + \sum_s k_s B_s = 0. \tag{19а}$$

Отсутствие возмущений потока по скорости дает [7]

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{A_\nu}{\omega-k_\nu u} + \sum_s \frac{B_s}{\omega-k_\nu u} = 0, \tag{19б}$$

а отсутствие возмущений по плотности —

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{A_\nu}{(\omega-k_\nu u)^2} + \sum_s \frac{B_s}{(\omega-k_\nu u)^2} = 0. \tag{19в}$$

Для потоков малой плотности, когда $B_s = O(\omega_b^2)$, или для поперечно однородных систем коэффициенты трансформации имеют вид [7]

$$T_{12}^{(in)} = 1 + O(\omega_b^2), \tag{20а}$$

$$T_{32}^{(in)} = \alpha\omega_b, \tag{20б}$$

$$T_{42}^{(in)} = -\alpha\omega_b. \tag{20в}$$

Коэффициенты трансформации $T_{2\nu}^{(out)}$ могут быть представлены в наиболее общем виде:

$$T_{21}^{(out)} = \varkappa_1 + g_1\omega_b^2, \tag{21а}$$

$$T_{23}^{(out)} = \varkappa_b + g_b\omega_b^2, \tag{21б}$$

$$T_{24}^{(out)} = \varkappa_b - g_b\omega_b^2. \tag{21в}$$

Здесь $\varkappa_1$ — коэффициент отражения попутной волны от плоскости $z=L$ в отсутствие потока, $\varkappa_b$ — коэффициент трансформации потоковых волн. В результате в общем виде можно положить

$$T_{21}^{(out)}T_{12}^{(in)} = \varkappa_1 + q_1\omega_b^2, \tag{22а}$$

$$T_{23}^{(out)}T_{32}^{(in)} = -b\omega_b + F\omega_b^2, \tag{22б}$$

$$T_{24}^{(out)}T_{42}^{(in)} = b\omega_b + F\omega_b^2. \tag{22в}$$

Величины q, b, F зависят от геометрии системы и являются функциями частоты и волновых чисел (подробнее см. [7]). Так, если в вакуумный металлический идеальный (нет ни омических, ни излучательных потерь, $\varkappa_1 = 1$) резонатор круглого сечения инжектируется однородный моноэнергетический пучок электронов, то

$$b = \frac{\omega}{au}\,\frac{k_\perp^2u^2\gamma^{-1/2}}{(\omega^2-a^2u^2)^{3/2}}, \tag{23а}$$

$$F = 2\frac{\omega}{au}\,\frac{\omega^2+a^2u^2}{(\omega^2-a^2u^2)^3}k_\perp^2u^2\gamma^{-3}, \tag{23б}$$

$$q_1 = -2F. \tag{23в}$$

Полагая

$$L\delta k_1 \ll 1, \quad L\delta k_2 \ll 1, \quad L\delta k_3 \sim 1,$$

получаем окончательный вид дисперсионного уравнения неустойчивости, линеаризованного по малому параметру($\sim\omega_b/\omega$):

$$\mathcal{D}(a) \equiv \mathcal{D}_0(a) + \mathcal{D}_1(a) = 0. \tag{24}$$

Здесь

$$\mathcal{D}_0(a) = e^{-iaL} - \varkappa_1 e^{iaL} \tag{25}$$

— невозмущенная часть дисперсионного уравнения, которая определяет дискретный набор значений невозмущенного параметра a:

$$a = \frac{\pi n}{L} - \frac{1}{2L}\arg \varkappa_1 - \frac{i}{2L}\ln\frac{1}{|\varkappa_1|}, \tag{26}$$

а следовательно, и дискретный спектр собственных колебаний системы $\omega = \omega(\mathrm{Re}\, a)$. Мнимая часть параметра a определяет потери на излучение:

$$\gamma_\omega^- = -\frac{d\omega}{da}\,\mathrm{Im}\, a = \frac{1}{2L}\frac{d\omega}{da}\ln\frac{1}{|\varkappa_1|}. \tag{27}$$

Здесь

$$\frac{d\omega}{da} = v_{gr}$$

— групповая скорость собственной волны системы.

Учет возмущения пучка дает второе слагаемое $\mathcal{D}_1(a)$ в дисперсионном уравнении:

$$\mathcal{D}_1(a) = iL\delta k_2 e^{-iaL} - (iL\delta k_1\varkappa_1 + q_1\omega_b^2)e^{iaL} + \\ + 2ib\omega_b\sin(L\delta k_3)e^{i\theta} - 2F\omega_b^2\cos(L\delta k_3)e^{i\theta}. \tag{28}$$

Здесь

$$\theta = \frac{\omega L}{u}$$

— пролетный угол (фаза) частиц потока. Соответствующее этому члену возмущение $\delta\omega$ собственной частоты системы равно

$$\begin{aligned}\delta\omega = -\frac{d\omega}{da}\frac{\mathcal{D}_1(a)}{\partial\mathcal{D}_0(a)/\partial a} = \\ = \frac{1}{2}\frac{d\omega}{da}(\delta k_2 - \delta k_1) + (-1)^n\frac{\omega_b b}{L\sqrt{|\varkappa_1|}}\times \\ \times\frac{d\omega}{da}\sin(L\delta k_3)\exp\left(i\theta - \frac{i}{2}\arg\varkappa_1\right) + \\ + i\frac{\omega_b^2}{L}\frac{d\omega}{da}\left[\frac{q_1}{2\varkappa_1} + (-1)^n\frac{F}{\sqrt{|\varkappa_1|}}\cos(L\delta k_3)\times\right. \\ \left.\times\exp\left(i\theta - \frac{i}{2}\arg\varkappa_1\right)\right].\end{aligned} \tag{29}$$

Отсюда находим инкремент неустойчивости системы с учетом потерь на излучение:

$$\begin{aligned}\gamma_\omega = \mathrm{Im}\,\delta\omega - \gamma_\omega^- = \\ = \frac{1}{2}v_{gr}\,\mathrm{Im}(\delta k_2 - \delta k_1) + (-1)^n\frac{\omega_b v_{gr}}{L}\times \\ \times\mathrm{Im}\left[\frac{b}{\sqrt{\varkappa_1}}\sin(L\delta k_3)\exp\left(i\theta - \frac{i}{2}\arg\varkappa_1\right)\right] + \\ + \frac{\omega_b^2 v_{gr}}{L}\,\mathrm{Re}\left[\frac{q_1}{2\varkappa_1} + (-1)^n\frac{F}{\sqrt{|\varkappa_1|}}\cos(L\delta k_3)\times\right. \\ \left.\times\exp\left(i\theta - \frac{i}{2}\arg\varkappa_1\right)\right] - \frac{v_{gr}}{2L}\ln\frac{1}{|\varkappa_1|}.\end{aligned} \tag{30}$$

Если в системе есть усиление, т. е. выполняется условие (15а), то существует ненулевая «волновая щель» Δk_{np}. В этом случае, начиная с некоторого значения длины системы L^*, для всех $L > L^*$ будет выполнятся условие (8). Таким образом, в длинных системах, $L > L^*$, будет иметь место двухволновая генерация, описываемая уравнением (9). Действительно, устремляя длину системы $L \to \infty$ в формуле (30), мы получаем инкремент глобальной неустойчивости

$$\gamma_\omega = \frac{1}{2}v_{gr}\,\mathrm{Im}(\delta k_2 - \delta k_1). \tag{31}$$

Если все δk_i действительны (в этом случае комплексными могут быть только $T_{np}^{(out)}$), то условие (8) не выполняется ни при каких длинах L, а инкремент (декремент) неустойчивости равен

$$\begin{aligned}\gamma_\omega = (-1)^n\frac{\omega_b v_{gr}}{L}\frac{|b|}{\sqrt{|\varkappa_1|}}\sin(L\delta k_3)\times \\ \times\sin\left(\theta - \frac{1}{2}\arg\varkappa_1 + \arg\varkappa_b\right) + \\ + \frac{\omega_b^2 v_{gr}}{L}\left[\frac{|q_1|}{2|\varkappa_1|}\cos(\arg q_1 - \arg\varkappa_1) + \right. \\ + (-1)^n\frac{|F|}{\sqrt{|\varkappa_1|}}\cos(L\delta k_3)\times \\ \left.\times\cos\left(\theta - \frac{1}{2}\arg\varkappa_1 + \arg F\right)\right] - \\ - \frac{v_{gr}}{2L}\ln\frac{1}{|\varkappa_1|}.\end{aligned} \tag{32}$$

Если $\gamma_\omega > 0$, то в системе возникает безусилительная неустойчивость, так как для реальных $k_\nu = k_\nu(\omega)$ при $\mathrm{Im}\,\omega = 0$ ни одно из условий (8), (15) не выполнено. При $L \to \infty$ инкремент безусилительной неустойчивости стремится к нулю, поэтому данная неустойчивость возникает только в пространственно ограниченных средах.

По отношению к величине $L\delta k_3$ системы можно разбить на короткие и длинные. В коротких системах $L\delta k_3 \ll 1$, поэтому

$$\sin(L\delta k_3) \sim L\delta k_3 \sim \omega_b L.$$

В результате оба первых члена в (32) одного порядка, а инкремент в системе без потерь $\gamma_\omega \propto \omega_b^2$, т. е. пропорционален плотности потока. Так, если в вакуумный металлический идеальный (нет ни омических, ни излучательных потерь) резонатор круглого сечения инжектируется однородный моноэнергетический пучок электронов, то инкремент равен

$$\gamma_\omega^+ = \frac{k_\perp^2 c^2 \gamma^{-3}}{(\omega^2 - a^2u^2)^2} \frac{u}{L} \omega_b^2 \times \times \left[(-1)^n \theta \sin\theta + 2\frac{\omega^2 + a^2u^2}{\omega^2 - a^2u^2} \left((-1)^n \cos\theta - 1\right)\right]. \quad (33)$$

Условие развития неустойчивости имеет вид

$$(-1)^n \theta \sin\theta + 2\frac{\omega^2 + a^2u^2}{\omega^2 - a^2u^2} \times \times \left((-1)^n \cos\theta - 1\right) > 0. \quad (34)$$

В длинных системах, когда $L\delta k_3 \geq 1$, второй член в (32) имеет более высокий порядок малости по параметру ω_b в сравнении с первым слагаемым. Поэтому для длинных систем выражение для инкремента упрощается и становится равным

$$\gamma_\omega = \frac{v_{gr}}{L} \left[(-1)^n \omega_b \frac{|b|}{\sqrt{|\varkappa_1|}} \sin(L\delta k_3) \times \times \sin\left(\theta - \frac{1}{2}\arg\varkappa_1 + \arg\varkappa_b\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{|\varkappa_1|}\right]. \quad (35)$$

Условие развития неустойчивости, $\gamma_\omega > 0$, для длинных систем принимает вид

$$(-1)^n \omega_b |b| \sin(L\delta k_3) \times \times \sin\left(\theta - \frac{1}{2}\arg\varkappa_1 + \arg\varkappa_b\right) > \frac{\sqrt{|\varkappa_1|}}{2}\ln\frac{1}{|\varkappa_1|}. \quad (36)$$

Как видно из (36), выполнение неравенства сильно зависит от пролетного угла θ. В этом смысле можно говорить, что безусилительные неустойчивости определяются нелокальным резонансом, в выражение для которого входят параметры потока и линейные размеры системы. Кроме того, анализ (36) показывает, что безусилительная неустойчивость развивается в достаточно высокодобротных системах, когда

$$2\omega_b|b| > \sqrt{|\varkappa_1|}\ln|\varkappa_1|^{-1}.$$

Для идеального резонатора условие (36) существенно упрощается:

$$(-1)^n \sin(L\delta k_3)\sin\theta > 0. \quad (37)$$

При выводе формулы для инкремента γ_ω предполагался произвольный закон дисперсии $a = a(\omega)$ собственных волн системы. Поэтому безусилительная неустойчивость является универсальной в том смысле, что проявляется на волнах с любым законом дисперсии и ненулевой групповой скоростью. В отличие от резонансных неустойчивостей, таких как черенковская, развитие безусилительной неустойчивости не требует, чтобы собственные волны системы были замедленными. В качестве примеров приведем эффект возбуждения различных свистков с резонатором [6] (флейт, органных труб и т. д.), а также возбуждение акустоэлектрического генератора при скоростях электронного потока, меньших скорости звука в сегнетоэлектрике. В электронике — это возбуждение монотрона, а также генерация СВЧ-излучения на косой ленгмюровской волне в плазменном резонаторе при плотностях плазмы ниже критической, когда развитие резонансной черенковской неустойчивости невозможно [8], возбуждение потенциальных ленгмюровских волн в плоском слое плазмы при непрерывной инжекции моноэнергетического пучка электронов [9].

К описанному типу неустойчивостей относятся и неизлучательные неустойчивости, такие как апериодическая неустойчивость Пирса [1]. Закон дисперсии волн в наиболее общей форме представим в виде

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_2 = -\frac{\omega}{v_2}, \quad (38а)$$

$$k_{3,4} = \frac{\omega \pm \eta}{v_{gr}}. \quad (38б)$$

Здесь η — параметр, характеризующий поток, — уже не является малой величиной; v_{gr} — групповая скорость пучковых волн. При условии $\omega < \eta$ фазовая скорость медленной пучковой волны направлена навстречу потоку, в то время как ее групповая скорость сонаправлена ему. И хотя в этом случае медленная пучковая волна ведет себя как волна с обратной дисперсией, условие (15а) здесь не выполняется, так как $v_{gr} > 0$, а $k_4'' = 0$.

Потенциальная волна k_1 и две пучковые волны k_3 и k_4 сонаправлены потоку, а волна k_2 распространяется навстречу ему и поэтому осуществляет обратную связь в системе. Обозначим

$$T_{2\nu}^{(out)} T_{\nu 2}^{(in)} = \alpha_\nu$$

и перепишем уравнение (16) для данного случая в виде

$$\alpha_1 \exp\left(i\frac{\omega L}{v_1}\right) - \exp\left(-i\frac{\omega L}{v_2}\right) + + \left[(\alpha_3 + \alpha_4)\cos\left(\frac{\eta L}{v_{gr}}\right) + i(\alpha_3 - \alpha_4)\sin\left(\frac{\eta L}{v_{gr}}\right)\right] \times \times \exp\left(i\frac{\omega L}{v_{gr}}\right) = 0. \quad (39)$$

В общем виде данное уравнение решить нельзя, так как нет малого параметра, по которому можно было бы раскладывать решение. Частные случаи уравнения (39) довольно детально разобраны в литературе (см., например, [10–12]), поэтому на них мы останавливаться не будем. Отметим здесь только два важных момента.

Обычно предполагают, что на границах $z = 0$ и $z = L$ находятся металлические электроды. На границе $z = L$ без потери внутренней самосогласованности задачи можно поставить более общие условия. Если считать, что в области $z > L$ находится однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + \varepsilon''(\omega),$$

то из граничных условий для поля при $z = L$ получаем коэффициенты $T_{2\nu}^{(out)}$, хотя говорить в этом случае про волны, покидающие систему, можно только условно. При $\varepsilon \to \infty$ мы приходим к частному случаю зеркальных граничных условий на металле.

Рассмотрим очень длинные системы в асимптотике $L \to \infty$. Тогда при условии $\omega'' > 0$ вторым слагаемым в уравнении (39) можно пренебречь. Оставшиеся два члена будут иметь одинаковый порядок величины, если инкремент обратно пропорционален длине системы, т. е. если $\omega'' \propto 1/L$. Это означает, что в неограниченной системе данная неустойчивость отсутствует.

Таким образом, усилитель с обратной связью является частным случаем реализации генератора. В плазмоподобных пространственно ограниченных средах существует широкий класс неустойчивостей, не укладывающихся в традиционные представления. Условия развития этих неустойчивостей определяется нелокальным резонансом. Это делает невозможным создание усилителей, работающих на данном типе неустойчивостей, однако позволяет создать широкий класс генераторов.

В данной работе рассматривалась многоволновая неустойчивость системы по отношению к основному невозбужденному состоянию, в котором неравновесность обусловлена потоком. Поэтому приведенный выше анализ не содержит рассмотрения параметрических неустойчивостей в ограниченном пространстве [13], таких как вынужденное рамановское рассеяние либо вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна. Неравновесность в этих процессах обусловлена нелинейным искажением невозмущенного состояния в присутствии волны накачки большой амплитуды.

В заключение авторы выражают благодарность В. П. Силину за полезные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).

2. П. С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны*, Наука, Москва (1997).

3. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1978).

4. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин и др., *Электродинамика плазмы*, Наука, Москва (1974).

5. А. Г. Куликовский, ПМП **30**, 148 (1966).

6. Ю. А. Степанянц, А. Л. Фабрикант, *Распространение волн в сдвиговых потоках*, Наука, Москва (1996).

7. D. N. Klochkov, M. Yu. Pekar, and A. A. Rukhadze, Phys. Plasmas **7**, 4707 (2000).

8. Д. Н. Клочков, М. Ю. Пекар, Физика плазмы **23**, 650 (1997).

9. С. С. Калмыкова, ЖЭТФ **65**, 2250 (1973).

10. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Электродинамика плотных электромагнитных пучков в плазме*, Наука, Москва (1990).

11. S. Kuhn, Contrib. Plasma Phys. **34**, 495 (1994).

12. В. В. Владимиров, А. Н. Мосиюк, М. А. Мухтаров, Физика плазмы **9**, 992 (1983).

13. Л. М. Горбунов, ЖЭТФ **67**, 1386 (1974).