ЖЭТФ, 2001, том 120, вып. 6 (12), стр. 1421–1429

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИИ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МОДУЛИРОВАННОМ ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ

Б. Л. Смородин[*]

Пермский государственный университет
614600, Пермь, Россия

Поступила в редакцию 20 июля 2001 г.

Исследована устойчивость слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле горизонтального конденсатора под действием переменного градиента температуры. Считается, что свободные заряды в жидкости образуются только благодаря неоднородной электропроводности жидкости. Для определения порогов конвекции использована теория Флоке. Определены границы неустойчивости и характеристики критических возмущений. Кроме синхронного и субгармонического отклика на внешнее воздействие неустойчивость может быть связана с квазипериодическими возмущениями. С помощью асимптотического метода рассмотрен низкочастотный предел модуляции. Представлены зависимости критического электрического числа Рэлея от обратной частоты и степени нагрева.

PACS: 47.65.+a

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование электротермической конвекции представляет интерес в связи с возможностью управления конвекцией в жидких диэлектриках и влияния на тепло- и массоперенос в высоковольтных устройствах. С другой стороны, действие электрических полей на движение жидкости может быть использовано для конструирования электрогидродинамических преобразователей энергии, осуществляющих прямое превращение энергии электрического поля в кинетическую энергию движущейся жидкости.

Электрическое поле может сильно влиять на конвективные движения слабопроводящих жидкостей благодаря действию специфических электроконвективных механизмов неустойчивости [1]. Диэлектрофоретический механизм неустойчивости связан с неоднородностью диэлектрической проницаемости. Влияние неоднородной поляризации на устойчивость жидкого диэлектрика в постоянном электрическом поле исследовано для случаев горизонтального [2] и вертикального конденсаторов [3]. Два других механизма неустойчивости связаны с накапливающимися в жидкости свободными зарядами, которые возникают либо благодаря инжекции заряда, либо из-за градиента электропроводности, существующего в неравномерно нагретой жидкости. Объемный заряд взаимодействует с электрическим полем, приводя к движению жидкости. Конвекция слабопроводящих жидкостей в постоянном электрическом поле, обусловленная электрокондуктивным механизмом, исследована экспериментально [4, 5]. При теоретическом анализе [5, 6] инжекция зарядов и неоднородная поляризация среды не рассматривались. Такой подход оправдан тем, что пороговое напряжение, начиная с которого инжекционный механизм зарядообразования в жидкости существенно влияет на устойчивость равновесия, превосходит используемые в экспериментах разности потенциалов на границах слоя [7]. Кроме того, у использованных в экспериментах жидкостей электропроводность намного сильнее зависит от температуры, чем диэлектрическая проницаемость. В результате исследования обнаружены и изучены колебательные режимы электроконвекции диэлектрика в горизонтальном конденсаторе, проанализировано влияние времени релаксации электрического заряда на динамику конвективной системы.

С другой стороны, наличие модулированного параметра в механической системе сильно влияет на ее устойчивость [8, 9] и может быть использовано

[*]E-mail: smorodin@psu.ru

для управления конвективными движениями в различных технологических ситуациях. Вибрации, переменные электрические поля или градиенты температуры представляют собой важные примеры периодического воздействия на механические системы и, в частности, жидкости. Классическим примером изменения устойчивости равновесия в вибрационном поле является маятник Капицы [10].

Проблема влияния модуляции температуры на границах слоя жидкости на его конвективную устойчивость рассматривалась в [11, 12]. Были обнаружены два типа критических возмущений: возмущения первого типа изменяются синхронно с внешним воздействием, возмущения второго совершают колебания с половинной частотой. Параметрическое возбуждение термоэлектрической неустойчивости под действием тепловой волны в жидких полупроводниках или ионных расплавах исследовано в [13]. Электроконвективная неустойчивость неоднородно нагретой диэлектрической жидкости под действием переменного электрического поля изучена для случаев, когда зарядообразование в жидкости связано либо с диэлектрофорезом [14], либо с электропроводностью [15].

Данная работа посвящена исследованию неустойчивости слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле плоского конденсатора под воздействием периодического градиента температуры. Кроме синхронного и субгармонического откликов на внешнее воздействие неустойчивость может быть связана с квазипериодическими возмущениями. Показано, что области резонансной неустойчивости возникают на частотах, связанных с частотой нейтральных колебательных возмущений слабопроводящей жидкости в постоянных полях.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим слабопроводящую жидкость, заполняющую плоский конденсатор. Будем считать, что на идеально тепло- и электропроводящих обкладках, имеющих координаты $z = \pm h$ (h — полутолщина слоя), поддерживаются различные постоянные потенциалы

$$\varphi(\pm h) = \mp U$$

и различные температуры, изменяющиеся по закону

$$T(\pm h) = \mp\Theta(\eta_1 + \eta_2 \cos\Omega t).$$

Здесь Θ, η_1 и η_2 — характерный масштаб температуры и относительные амплитуды постоянной и переменной компонент разности температур между границами. В нашем случае η_2 изменяется непрерывно, η_1 принимает два значения: $\eta_1 = 0$ для переменной разности температур и $\eta_1 = 1$ для модуляции на постоянном фоне.

Электрическую силу, действующую на единицу объема жидкости, можно записать в виде [16]

$$f_e = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2\nabla\varepsilon + \frac{1}{2}\nabla\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}E^2\right). \qquad (1)$$

Здесь ε — диэлектрическая проницаемость жидкости, ρ_e — свободный заряд единицы объема, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля.

Последнее слагаемое в (1) имеет градиентный вид и приводит лишь к переопределению давления. Вторая (диэлектрофоретическая) часть электрической силы, связанная с неоднородностью диэлектрической проницаемости ε, несущественна. Такой подход оправдан в случае, когда неоднородность электропроводности, связанная с градиентом температуры, намного больше, чем неоднородность диэлектрической проницаемости. В нашем рассмотрении используется электрогидродинамическое приближение, в котором электрические эффекты велики по сравнению с магнитными. Для слоев толщиной меньше 10^{-1} м это приближение оправдано, если частота модуляции электрического поля меньше 10^9 рад/с и проводимость жидкости удовлетворяет условию $\sigma \ll 10^{-1}$ (Ом·м)$^{-1}$ [17]. Для жидкостей с очень низкой электропроводностью, $\sigma \sim 10^{-11}$–10^{-9} (Ом·м)$^{-1}$ (трансформаторное, конденсаторное или кукурузное масла), роль индуцируемых магнитных полей оказывается действительно пренебрежимо малой в широком диапазоне частот. Будем полагать, что электропроводность жидкости линейно растет с температурой:

$$\sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma T),$$

где β_σ — температурный коэффициент электропроводности, в общем случае положительный.

Используем безразмерные переменные на базе масштабов: длины — h, времени — h^2/ν, скорости — χ/h, температуры — Θ, давления — $\rho_l\nu\chi/h^2$, потенциала — U, поля — U/h, плотности заряда — $\varepsilon U/h^2$ (здесь ρ_l — плотность жидкости, ν и χ — соответственно коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости).

Пренебрегая инжекцией электрического заряда, электрическими потерями и вязкой диссипацией [17], запишем безразмерную систему уравнений и граничных условий, характеризующих конвекцию жидкого диэлектрика в постоянных гравитационном и электрическом и переменном тепловом полях:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{P}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) = \\
&= -\nabla p + \nabla^2\mathbf{v} + \mathrm{Ra}T\mathbf{e} + \mathrm{Ge}\rho\mathbf{E}, \\
&\quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \\
&\mathrm{P}\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T = \nabla^2 T, \\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Pe}}\operatorname{div}(\sigma\mathbf{E}) + \frac{1}{\mathrm{P}}(\mathbf{v}\nabla)\rho = 0, \\
&\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{e} = (0,0,1), \\
&\quad \sigma = 1 + ST, \\
&z = \pm 1: \quad \mathbf{v} = 0, \\
&T = \mp(\eta_1 + \eta_2\cos\omega t), \quad \varphi = \mp 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление, T — температура, отсчитываемая от некоторого среднего значения, $\mathbf{E}$, φ — напряженность и потенциал электрического поля, ρ — плотность свободных зарядов.

В систему (2) входят следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ra} = g\beta\Theta h^3/\nu\chi, \quad \mathrm{Ge} = \varepsilon U^2/\nu\chi\rho_l, \quad \mathrm{P} = \nu/\chi, \\
&\mathrm{Pe} = \varepsilon\nu/h^2\sigma_0, \quad \omega = \Omega h^2/\nu, \quad S = \beta_\sigma\Theta.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь Ra — число Рэлея (β — коэффициент теплового расширения жидкости), Ge — электрический аналог числа Галилея, P — число Прандтля, Pe — электрическое число Прандтля и ω — безразмерная частота модуляции; параметр S характеризует степень неоднородности электропроводности. Для слабопроводящих жидкостей, в которых экспериментально наблюдаются электроконвективные явления, $\beta_\sigma \approx 0.03$–$0.058$ град$^{-1}$ [5, 7] и условие $S < 1$ остается в силе, если разность температур не превышает 10 градусов. Теоретические исследования электротермической конвекции в постоянных электрических полях, использующие более сильное условие $S \ll 1$, находятся в хорошем согласии с экспериментом [5, 7].

Сформулированная задача допускает квазиравновесное решение, в котором жидкость покоится,

$$\mathbf{v}_0 = 0,$$

а остальные ее характеристики меняются во времени и пространстве:

$$T_0 = T_0(z,t), \quad p_0 = p_0(z,t),$$

$$\mathbf{E}_0 = (0,0,E_0(z,t)), \quad \rho_0 = \rho_0(z,t).$$

Выражение для давления p_0 не потребуется в явном виде. Нестационарное распределение температуры $T_0(z,t)$ удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности и соответствующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}, \\
&z = \pm 1: \quad T_0 = \mp(\eta_1 + \eta_2\cos\omega t).
\end{aligned} \tag{4}$$

Распределение температуры в квазиравновесии определяется суперпозицией линейного профиля и двух тепловых волн, распространяющихся от границ внутрь жидкости:

$$\begin{aligned}
&T_0 = -\eta_1 z - \eta_2\left[T_s\sin\omega t + T_c\cos\omega t\right], \quad \kappa = \sqrt{\frac{P\omega}{2}}, \\
&T_s = \frac{\sin(\kappa(1+z))\operatorname{sh}(\kappa(1-z)) - \sin(\kappa(1-z))\operatorname{sh}(\kappa(1+z))}{\cos(2\kappa) - \operatorname{ch}(2\kappa)}, \\
&T_c = \frac{\cos(\kappa(1+z))\operatorname{ch}(\kappa(1-z)) - \cos(\kappa(1-z))\operatorname{ch}(\kappa(1+z))}{\cos(2\kappa) - \operatorname{ch}(2\kappa)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Зная распределение температуры (5) и используя граничные условия для потенциала φ, можно найти распределение поля и свободных зарядов в покоящейся жидкости:

$$\begin{aligned}
&E_0 = 1 + \eta_1 S z + \frac{\eta_2 S}{1+\omega^2\mathrm{Pe}^2}\left((T_s + \omega\mathrm{Pe}T_c)\sin\omega t + ((T_c - \omega\mathrm{Pe}T_s)\cos\omega t) + O(S^2)\right), \\
&\rho_0 = \eta_1 S + \frac{\eta_2 S}{1+\omega^2\mathrm{Pe}^2}\left((T_{sz} + \omega\mathrm{Pe}T_{cz})\sin\omega t + ((T_{cz} - \omega\mathrm{Pe}T_{sz})\cos\omega t) + O(S^2)\right), \\
&T_{sz} = \frac{\partial T_s}{\partial z}, \quad T_{cz} = \frac{\partial T_c}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для исследования устойчивости основного состояния рассмотрим его малые возмущения. После исключения давления и горизонтальных компонент скорости представим возмущения вертикальной скорости v_z, температуры ϑ и плотности заряда ρ в виде

$$v_z = w(z,t)\exp[ikx], \quad \vartheta = \theta(z,t)\exp[ikx], \quad \rho = \rho(z,t)\exp[ikx]. \tag{7}$$

Здесь w, θ, ρ — амплитуды, k — волновое число. Векторы $\mathbf{E}_0$ и ∇T_0 направлены перпендикулярно границам, поэтому задача изотропна в плоскости слоя и ось x можно направить вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$.

Квазиравновесное поле (6) представляет собой ряд

$$E_0 = E_{00} + SE_{01} + O(S^2).$$

Первое слагаемое E_{00} — внешнее поле, оно не зависит от S и характеризует поле между проводящими пластинами в отсутствие жидкости. Все остальные члены ряда $SE_{01} + O(S^2)$ связаны с перераспределением заряда в жидкости

$$\rho_0 = S\rho_{01} + O(S^2),$$

возникающим благодаря неоднородной проводимости среды. Возмущения силы Кулона в связи с этим можно записать в виде

$$\mathbf{F}'_k = \mathrm{Ge}(\mathbf{E}_{00}\rho' + S(\mathbf{E}_{01}\rho' + \mathbf{E}'\rho_{01})),$$

где $\mathbf{E}'$, ρ' — возмущения поля и плотности заряда. Малость параметра S позволяет использовать безиндукционное электрогидродинамическое приближение, в котором пренебрегается электрическим полем, связанным с перераспределением заряда в жидкости, по сравнению с внешним полем [5]:

$$\mathbf{F}'_k = \mathrm{Ge}\mathbf{E}_{00}\rho.$$

Подставляя возмущенные поля в систему (2) и проводя линеаризацию по возмущениям, получим амплитудную задачу:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Delta w}{\partial t} = \Delta^2 w - \mathrm{Ra}k^2\theta - Bk^2\rho,\\
&\mathrm{P}\frac{\partial \theta}{\partial t} = (\eta_1 + \eta_2(T_{cz}\cos\omega t + T_{sz}\sin\omega t))\,w + \Delta\theta,\\
&\mathrm{Pe}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \theta}{\partial z} - \rho,\\
&z = \pm 1: \quad w = 0, \quad w' = 0, \quad \theta = 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\Delta = \partial^2/\partial z^2 - k^2.$$

Заметим, что несмотря на малость неоднородности электропроводности S, связанной с температурой, электрический аналог числа Рэлея $B = \mathrm{Ge}S$ остается конечным (параметр Ge большой). Если $\eta_2 \neq 0$, система имеет периодические коэффициенты и возможно динамическое возбуждение или подавление электроконвекции.

Система уравнений вместе с граничными условиями (8) и условиями периодичности во времени для всех переменных определяют задачу на собственные значения для B или Ra как функции оставшихся параметров. Границы конвективной неустойчивости, определяемые условиями существования периодических решений системы (8), могут быть найдены с помощью классического метода Флоке.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение задачи (8) для модуляции произвольной частоты находилось с помощью метода Галеркина. Для аппроксимации возмущений используются наборы пространственных базисных функций с зависящими от времени коэффициентами:

$$w = \sum_{m=0}^{M-1} a_m w_m, \quad \theta = \sum_{m=0}^{M-1} b_m\theta_m, \quad \rho = \sum_{m=0}^{M-1} c_m\frac{\partial \theta_m}{\partial z}. \tag{9}$$

Пространственные базисы конструировались из нормированных собственных функций амплитудной задачи для покоящегося слоя жидкости [18]. В качестве базисов для аппроксимации вертикальной скорости, температуры и плотности заряда использовались собственные функции задач четвертого и второго порядков:

$$\Delta^2 w_m = -\mu_m\Delta w_m, \quad w_m(\pm 1) = w'_m(\pm 1) = 0, \tag{10}$$

$$\Delta\theta_m = -P\nu_m\theta_m, \quad \theta_m(\pm 1) = 0. \tag{11}$$

Подставляя разложения (9) в систему (8) и проводя ортогонализацию по методу Галеркина, получим $K = 3M$ обыкновенных дифференциальных уравнений для a_r, b_s и c_t:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial a_r}{\partial t} = -\mu_r a_r + k^2 \sum_{m=0}^{M-1} \left[\mathrm{Ra} E_{mr} b_m + B D_{rm} c_m\right],\\
&\mathrm{P}\frac{\partial b_s}{\partial t} =\\
&= \sum_{m=0}^{M-1} \left[\eta_1 E_{sm} + \eta_2 \left(S_{sm}\sin\omega t + C_{sm}\cos\omega t\right)\right] a_m -\\
&- \mathrm{P}\nu_s b_s,\\
&\mathrm{Pe}\frac{\partial c_t}{\partial t} = -b_t - c_t, \quad r,s,t = 0,1,\ldots,M-1,\\
&E_{mr} = \int_{-1}^{1} \theta_m w_r dz, \quad D_{rm} = \int_{-1}^{1} w_r \theta'_m dz,\\
&S_{sm} = \int_{-1}^{1} \theta_s T_{sz}(z) w_m dz,\\
&C_{sm} = \int_{-1}^{1} \theta_s T_{cz}(z) w_m dz.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Уравнения (12) могут быть записаны в форме

$$
\frac{\partial u_i}{\partial t} = L_{ij}(\omega t) u_j, \quad i,j = 1,\ldots,3M, \qquad u(t) = \begin{pmatrix} a_r \\ b_s \\ c_t \end{pmatrix}, \tag{13}
$$

где матрица L, составленная из коэффициентов при a_r, b_s и c_t из (12), периодична с периодом $2\pi/\omega$, $u(t)$ — K-мерная векторная функция. Классическая теория Флоке [19] позволяет записать любое решение системы (13) в форме

$$
u(t) = \gamma u_0(t) = e^{\lambda t} u_0(t) \tag{14}
$$

с периодическим во времени ($T = 2\pi/\omega$) вектором $u_0(t)$ (γ — мультипликатор Флоке, а $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ — характеристические показатели, вообще говоря, комплексные числа). Для различных начальных условий

$$
u_i^p(0) = \delta_{ip}, \quad p = 1,\ldots,K,
$$

получается K линейно независимых решений $u_i{}^p(t)$. Система (13) интегрируется методом Рунге–Кутта четвертого порядка. Фундаментальные решения, взятые в конце периода модуляции, составляют K колонок $K\times K$-матрицы монодромии, собственные значения которой и представляют собой мультипликаторы Флоке. Значения характеристических показателей определяют устойчивость основного состояния квазиравновесия. Если упорядочить все λ так, что

$$
\mathrm{Re}(\lambda_1) \ge \mathrm{Re}(\lambda_2) \ge \ldots \ge \mathrm{Re}(\lambda_K),
$$

то основное состояние устойчиво в случае $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$. Условие $\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$ определяет область периодических решений в пространстве параметров B, η_1, η_2, Ra, P, Pe, ω и k. При этом случай

$$
\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0, \quad \mathrm{Im}(\lambda_1) = \omega/2
$$

соответствует субгармоническим возмущениям с периодом, вдвое превышающим период внешнего воздействия. Если

$$
\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0, \quad \mathrm{Im}(\lambda_1) = \omega,
$$

нейтральные возмущения изменяются синхронно с вынуждающим воздействием, их периоды совпадают. Для пары комплексно-сопряженных собственных значений с единичным модулем,

$$
\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0, \quad \mathrm{Im}(\lambda_1) \ne 0,
$$

имеем квазипериодические нейтральные возмущения. Для большинства найденных решений использовались 24 базисные функции ($M = 8$). В проверочных расчетах, проведенных с 30 базисными функциями ($M = 10$), пороги конвекции изменялись менее чем на 1%.

4. НИЗКОЧАСТОТНЫЕ МОДУЛЯЦИИ

При малых частотах модуляции ω период модуляции превышает все характерные времена системы:

$$
T \gg \max\left[\frac{h^2}{\nu}, \frac{h^2}{\chi}, \frac{\varepsilon}{\sigma}\right], \tag{15}
$$

или в безразмерной форме:

$$
\omega \ll \min\left[1, \mathrm{P}^{-1}, \mathrm{Pe}^{-1}\right]. \tag{16}
$$

Поскольку время расчета растет пропорционально периоду модуляции T, применение численного метода в случае $\omega \to 0$ нецелесообразно и можно использовать асимптотический метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна [20] с малым параметром ω.

После перенормировки времени $\tau = \omega t$ используем матричную форму записи системы амплитудных уравнений:

$$
\omega \frac{\partial}{\partial \tau} A u = N u \tag{17}
$$

с векторной функцией

$$u = \begin{pmatrix} w \\ \theta \\ \rho \end{pmatrix},$$

с постоянным (A) и 2π-периодическим (N) по τ операторами:

$$A = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{P} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Pe} \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \Delta^2 & -\mathrm{Ra}k^2 & -Bk^2 \\ f(t) & \Delta & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial}{\partial z} & -1 \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

$f(\tau) = \eta_1 + \eta_2(T_{sz}\sin\tau + T_{cz}\cos\tau)$.

Используя малость ω, разложим N, B и решение u в ряды по ω:

$$N = N_0 + \omega N_1 + \omega^2 N_2 + \ldots\,,$$
$$B = B_0 + \omega B_1 + \omega^2 B_2 + \ldots\,,$$
$$u = \exp\left[\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\tau \lambda(\tau')\, d\tau'\right](u_0+\omega u_1+\omega^2 u_2+\ldots),$$
$$\lambda = \lambda_0 + \omega\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \ldots\,, \qquad (19)$$

где λ — характеристический инкремент возмущений для случая медленного квазистатического изменения градиента температуры (2π-периодическая функция τ). Граница устойчивости по Флоке в нулевом по ω порядке разложения находится из интегрального условия

$$\int\limits_0^{2\pi} \lambda_{0r}(B_0, \cos\tau)\, d\tau = 0, \qquad (20)$$

где λ_{0r} — действительная часть λ_0. Для решения в нулевом порядке задачи на собственные значения применялся метод Галеркина с базисом (9).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Используемые в экспериментах слабопроводящие жидкости имеют достаточно высокие значения числа Прандтля $\mathrm{P} \geq 100$. Электрическое число Прандтля Pe зависит не только от электрофизических параметров жидкости, но и от толщины слоя. В качестве иллюстрации рассмотрим поведение жидкости с параметрами $\mathrm{P} = 100$, $\mathrm{Pe} = 0.04$. Прежде всего обсудим возникновение конвекции в случае отсутствия гравитации ($\mathrm{Ra} = 0$). В постоянных электрическом и тепловом полях неустойчивость обусловлена электрокондуктивным механизмом и связана с колебательной модой. Порогу конвекции $B_* = 2514.24$ соответствует критическое волновое число $k = 2.354$ и частота $\omega_0 = 1.256$. Влияние модуляции температурного градиента на устойчивость квазиравновесия $\eta_2 = f(1/\omega)$ для фиксированных значений $k = 2.354$ и $B = 2510$ представлено на рис. 1.

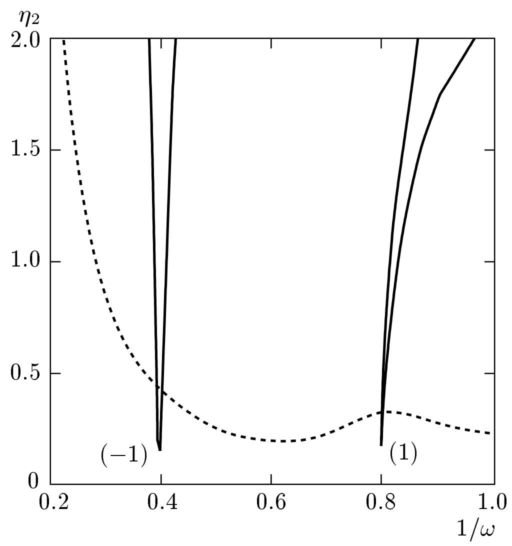

Рис. 1. Зависимость амплитуды модуляции η_2 от обратной частоты $1/\omega$ для $\mathrm{Ra} = 0$. Волновое число фиксировано, $k = 2.354$. Без модуляции система устойчива. Сплошные линии — границы устойчивости для периодических возмущений, штриховые — границы устойчивости для квазипериодических режимов

В отсутствие модуляции, $\eta_2 = 0$ (ось абсцисс), квазиравновесие жидкости устойчиво. (Электрическое число Рэлея не превышает критического значения $B < B_*$.) Рост амплитуды модуляции приводит к появлению растущих возмущений. Тип критических возмущений зависит от частоты. Первая резонансная область («-1») соответствует субгармоническим по отношению ко внешнему воздействию возмущениям, ее минимум расположен на частоте $\omega = 2.5 \approx 2\omega_0$ и соответствует амплитуде модуляции $\eta_2 = 0.151$. Область «$+1$» синхронных возмущений на частоте $\omega = 1.254 \approx \omega_0$ имеет минимум $\eta_2 = 0.170$. Эффект дестабилизации для этой области более слабый. При умеренных амплитудах мо-

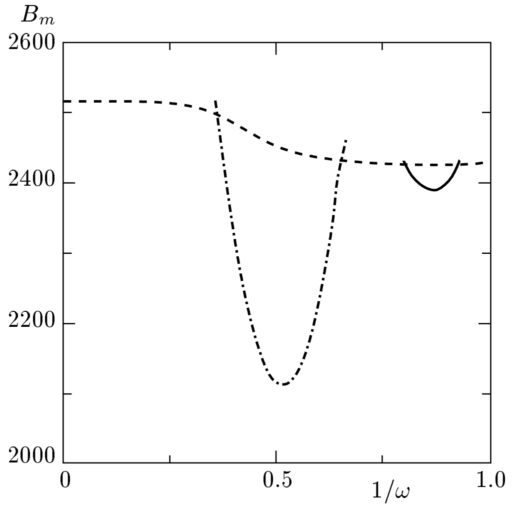

Рис. 2. Зависимость критического электрического числа Рэлея B_m от обратной частоты $1/\omega$ для Ra = 0; $\eta_1 = 1$; $\eta_2 = 1$. Штрих-пунктирная линия — граница устойчивости для субгармонических возмущений, сплошная — для синхронных, штриховая линия то же, что и на рис. 1

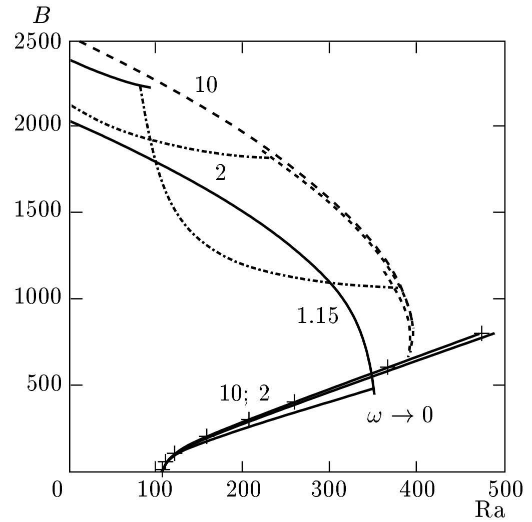

Рис. 3. Карты устойчивости на плоскости (Ra, B) в модулированном поле для различных частот внешнего воздействия: $\omega = 10$ (граница устойчивости для термогравитационной моды отмечена крестиками), 2, 1.15 и $\omega \to 0$. Штрих-пунктирные, штриховые и сплошные линии — то же, что и на рис. 2

дуляции между областями синхронного и субгармонического откликов на внешнее поле расположены области критических квазипериодических возмущений.

Зависимость критического электрического числа Рэлея B_m от обратной частоты $1/\omega$ представлена на рис. 2 ($\mathrm{Ra} = 0$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 1$, проведена минимизация по волновому числу k). Эффект параметрического возбуждения конвекции проявляется, когда частота внешнего поля связана с частотой колебательной моды в постоянном поле как $2\omega_0/m$ с целым m. На рис. 2 изображены две первых области неустойчивости.

Рассмотрим электротермоконвективную неустойчивость в статическом поле тяжести. Поведение возмущений теперь должно рассматриваться с точки зрения полной системы амплитудных уравнений (8) с $\mathrm{Ra} \neq 0$. Без электрического поля ($B = 0$) критическое тепловое число Рэлея определяет начало конвекции при подогреве снизу, $\mathrm{Ra}_{m0} = 106.75$, и соответствует термогравитационной монотонной моде [8] неустойчивости. Появление электрического поля и его рост приводят к стабилизации равновесия, конвекция наступает при больших значениях числа Рэлея. Кроме того, в электрическом поле благодаря действию специфического электрокондуктивного механизма неустойчивости появляется колебательная неустойчивость [5]. Модуляция поля изменяет картину устойчивости. Зависимости критического электрического числа Рэлея B от Ra для нескольких значений частоты, $\omega = 10$, 2, 1.15 и $\omega \to 0$ в случае $\eta_1 = 1$ и $\eta_2 = 1$ представлены на рис. 3. Область устойчивости расположена между кривыми и осями координат. Для термогравитационной моды критические возмущения синхронны с модуляцией градиента температуры. Уменьшение частоты внешнего воздействия приводит к монотонному понижению границы гравитационной моды. Порог электрокондуктивной моды с уменьшением частоты изменяется немонотонно. Квазипериодические возмущения остаются критическими для достаточно больших частот модуляции ($\omega = 10$).

На частоте близкой к удвоенной собственной частоте колебательной системы, $\omega = 2 \approx 2\omega_0$, в результате конкуренции двух типов колебаний на границе устойчивости появляется излом. Точка излома соответствует изменению характера нейтральных колебаний. Жидкость откликается синхронными колебаниями на изменение градиента температуры при $0 < \mathrm{Ra} < 80$ и субгармоническими при $\mathrm{Ra} > 80$. На частоте $\omega = 1.15$ граница устойчивости имеет изломы, соответствующие переходам между возмущениями разных типов, которые различаются как пространственным периодом, так и временным поведением. Для частоты $\omega = 1.15$ параметрическое воздействие почти вдвое понижает порог устойчи-

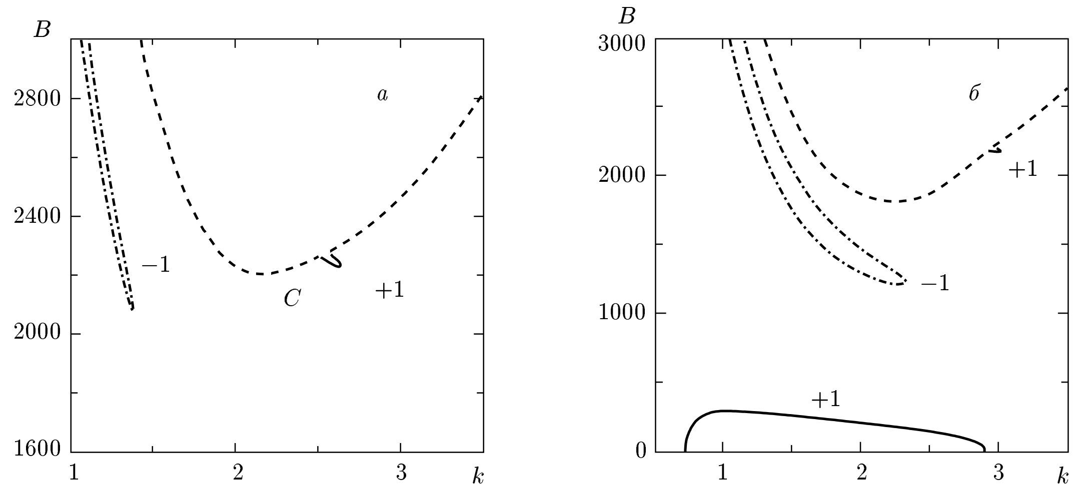

Рис. 4. Нейтральные кривые электротермической конвективной неустойчивости $B(k)$; $\eta_1 = 1$; $\eta_2 = 1$; ω=2; *а* — подкритический нагрев, Ra $= 85$; *б* — надкритический нагрев, Ra $= 200$. Штрих-пунктирные, штриховые и сплошные линии то же, что и на рис. 2

вости при Ra ~ 150. Граница $\omega \to 0$ рассчитана в низкочастотном пределе.

Нейтральные кривые $B(k)$ для частоты $\omega = 2$ представлены на рис. 4*а, б* для двух значений числа Рэлея. Граница неустойчивости состоит из нескольких частей, которые соответствуют различным типам нейтральных возмущений. Синхронный отклик наблюдается в областях «+1», субгармонический — в областях «−1», квазипериодический отклик — в области «C». При подкритическом нагреве, $\mathrm{Ra} = 85 < \mathrm{Ra}_{m0}$ (рис. 4*а*), граница неустойчивости состоит из двух частей. Первая из них — нейтральная кривая для субгармонических возмущений, минимум этой кривой определяет критическое число Рэлея. Вторая часть нейтральной кривой в общем случае является квазипериодической. Однако в результате бифуркации в районе $k = 2.52$ появляется область синхронных возмущений. При нагреве больше критического, $\mathrm{Ra} = 200 > \mathrm{Ra}_{m0} = 106.7$, топология нейтральных кривых изменяется (рис. 4*б*). Теперь $B(k)$ становится многозначной функцией и имеет минимум и максимум. Область синхронных возмущений сдвигается вниз и расширяется. Около оси абсцисс появляется новая область синхронных возмущений, связанных с термогравитационной модой.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках уравнений электрогидродинамики рассмотрена проблема электроконвективной неустойчивости слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле плоского горизонтального конденсатора при ее нестационарном нагреве. Предполагается, что электропроводность жидкости линейно зависит от температуры, а физические свойства жидкости и электродов таковы, что можно пренебречь инжекцией зарядов и неоднородностью поляризации жидкости. Определены границы областей неустойчивости. Для случая невесомости получены зависимости амплитуды критической модуляции от частоты. При наличии силы тяжести происходит взаимодействие термогравитационного и электрокондуктивного механизмов неустойчивости. Рассмотрение проведено для числа Прандтля $\mathrm{P} = 100$. При еще больших значениях числа Прандтля, характерных для изолирующих масел, собственная частота в немодулированном случае ω_0 понижается, однако основные черты параметрического возбуждения электрокондуктивной неустойчивости сохраняются: 1) присутствует конкуренция субгармонических, синхронных и квазипериодических возмущений; 2) первая область субгармонического отклика соответствует частоте $\omega \approx 2\omega_0$, а первая область синхронного отклика — частоте $\omega \approx \omega_0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 98-01-00507, 01-01-00515).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Castellanos, P. Atten, and M. G. Velarde, Phys. Fluids **27**, 1607 (1984).
2. P. H. Roberts, J. Mech. Appl. Math. **22**, 211 (1969).
3. M. Takashima and H. Hamabata, J. Phys. Soc. Jap. **53**, 1728 (1984).
4. R. J. Turnbull, Phys. Fluids **11**, 2597 (1968).
5. Ch. O. Lee, in Proc. 5th Int. Heat Transfer Conf. Tokio **3**, 173 (1974).
6. R. J. Turnbull, Phys. Fluids **11**, 2588 (1968).
7. С. А. Жданов, С. Р. Косвинцев, И. Ю. Макарихин, ЖЭТФ **117**, 398 (2000).
8. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
9. G. Ahlers, P. C. Hohenberg, and M. Lücke, Phys. Rev. A **32**, 3493 (1985).
10. П. Л. Капица, ЖЭТФ **21**, 588 (1951).
11. G. Venezian, J. Fluid Mech. **35**, 243 (1969).
12. C. S. Yin and C. H. Li, J. Fluid Mech. **54**, 143 (1972).
13. B. L. Smorodin, G. Z. Gershuni, and M. G. Velarde, Int. J. Heat Mass Transfer **42**, 3159 (1999).
14. B. L. Smorodin and M. G. Velarde, J. Electrostat. **50**(3), 13 (2001).
15. B. L. Smorodin and M. G. Velarde, J. Electrostat. **48**, 261 (2000).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
17. М. К. Болога, Ф. П. Гросу, И. А. Кожухарь, *Электроконвекция и теплообмен*, Штиинца, Кишинев (1977).
18. Г. И. Петров, ПММ **4**, 3 (1940).
19. E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York (1955).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).