

# СВОЙСТВА СЛАБО КОЛЛАПСИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ СВОБОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ

**Ю. Н. Овчинников**

*Max-Planck Institute for Physics of Complex Systems  
D-01187, Dresden, Germany*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

**В. Л. Верещагин**

*Институт математики с вычислительным центром  
Уральского отделения Российской академии наук  
620219, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 17 июля 2001 г.

Показано, что существует бесконечный набор слабо коллапсирующих решений с нулевой энергией. Решения с нулевой энергией распределены вдоль двух линий в пространстве параметров  $(A, C_1)$ . При больших значениях параметра  $C_1$  ( $C_1 \rightarrow \infty$ ) расстояние между ближайшими точками на каждой из линий стремится к конечному пределу. Вдоль каждой из линий амплитуда осциллирующих членов экспоненциально мала по параметру  $C_1$ .

PACS: 03.65.Ge, 02.30.Jr

Нелинейное уравнение Шредингера, в котором нелинейность соответствует эффективному притяжению, возникает в ряде физических задач [1, 2]. В  $d$ -мерном пространстве это уравнение можно представить в виде

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^{2\sigma} \psi = 0, \quad (1)$$

где  $\psi$  — скалярная функция,  $\Delta$  — оператор Лапласа. Уравнение (1) имеет слабо коллапсирующие решения вида

$$\psi(r, t) = \lambda^\nu \varphi(\rho \lambda) \exp(i\chi(\rho, t)), \quad (2)$$

где параметр  $\lambda = \lambda(t)$ ,  $\rho = |r|$ ,  $\varphi$  — вещественная функция. Слабо коллапсирующие решения рассматривались в работах [1, 3, 4].

Для всякого решения уравнения (1) сохраняется полное число частиц и полная энергия системы. Эти два закона сохранения приводят к следующим уравнениям для параметра  $\nu$  и функций  $\lambda, \chi$  [5, 6]:

$$\begin{aligned} \nu \sigma = 1, \quad \chi(\rho, t) = \chi_0(t) + \tilde{\chi}(\lambda \rho), \\ \lambda = \frac{C}{\sqrt{t_0 - t}}, \quad \chi_0(t) = \frac{C_1}{2} \ln(t_0 - t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $C, C_1$  — константы,  $t_0$  — момент коллапса. В работах [5, 6] было показано, что система уравнений для функций  $\varphi, \tilde{\chi}$  сводится к одному дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$\begin{aligned} Z''' - \frac{(Z'')^2}{2Z'} - \frac{(d-1)(d-3)}{2y^2} Z' - \\ - \frac{1}{C^2} \left[ C_1 Z' - \frac{y(yZ' + (2/\sigma - d)Z)}{4C^2} \right] - \\ - \frac{1}{8C^4 Z'} (yZ' + (2/\sigma - d)Z)^2 + \frac{2(Z')^{\sigma+1}}{y^{(d-1)\sigma}} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции  $\varphi, \tilde{\chi}$  связаны с функцией  $Z$  простыми соотношениями:

$$\varphi = \frac{\sqrt{Z'}}{y^{(d-1)/2}}, \quad \tilde{\chi}' = -\frac{yZ' + (2/\sigma - d)Z}{4C^2 Z'}. \quad (5)$$

Наша задача — исследование возможных типов асимптотического поведения решений уравнения (4). Здесь мы ограничимся физически наиболее интересным случаем  $d = 3, \sigma = 1$ . Уравнение (4) в этом случае приводится к виду

$$Z''' - \frac{(Z'')^2}{2Z'} - \frac{C_1}{C^2} Z' + \frac{2(Z')^2}{y^2} - \frac{(yZ' - Z)^2}{8C^4 Z'} + \frac{y(yZ' - Z)^2}{4C^4} = 0. \quad (6)$$

Параметр  $C$  соответствует масштабному преобразованию в уравнении (6):

$$y = C\tilde{y}, \quad Z = C\tilde{Z}(\tilde{y}). \quad (7)$$

Поэтому в дальнейшем мы будем полагать  $C = 1$ .

Существует всего одно однопараметрическое семейство решений уравнения (6), удовлетворяющих физическим граничным условиям в нуле [5, 6]:

$$Z(y) = Ay^3 + Ay^5 \left( \frac{C_1}{10} - \frac{3}{5}A \right) + \dots \quad (8)$$

Для исследования решения в асимптотической области ( $y \rightarrow \infty$ ) умножим обе части уравнения (6) на  $Z'$  и продифференцируем по  $y$ . В результате получим уравнение

$$4Z'''' + y(Z' + yZ'') - 8C_1 Z'' - Z = \frac{16(Z')^2}{y^3} - \frac{24Z'Z''}{y^2}. \quad (9)$$

В области  $y \gg \max(1, \sqrt{C_1})$  в главном приближении правая часть в уравнении (9) может быть опущена. После этого уравнение (9) становится линейным. В асимптотической области  $y \rightarrow \infty$  общее решение этого уравнения есть

$$Z = By + \frac{B_1}{y} \left( 1 + \frac{16C_1}{9y^2} + \dots \right) - \frac{4}{y^2} (1 + \dots) \times \left[ d_1 \cos \left( \frac{y^2}{4} - 2C_1 \ln y \right) + d_2 \sin \left( \frac{y^2}{4} - 2C_1 \ln y \right) \right]. \quad (10)$$

Разложение в формуле (10) идет по степеням  $1/y^2$ . Четыре коэффициента  $\{B, B_1, d_1, d_2\}$  связаны одним соотношением. Это соотношение легко найдется подстановкой формулы (10) в уравнение (6) (см. также [7]):

$$B_1 = -2BC_1 - \frac{d_1^2 + d_2^2}{B}. \quad (11)$$

Для того чтобы решение (8), (10), (11) имело нулевую энергию, необходимо и достаточно выполнение условий

$$d_1 = d_2 = 0. \quad (12)$$

Коэффициенты  $d_1, d_2$  являются аналитическими функциями параметров  $\{A, C_1\}$ . Тем самым возможно существование лишь дискретного множества точек  $\{A, C_1\}$ , на котором энергия равна нулю. Одна такая точка была найдена численно в работе [3]:

$$\{A, C_1\} = \{0.644; 1.09\}.$$

Кроме этой точки существуют также и другие точки, соответствующие решениям с нулевой энергией. Мы приведем здесь некоторые из них:

$$\{A, C_1\} = \{0.365; 3.113\},$$

$$\{A, C_1\} = \{0.913; 4.41\}, \quad \{A, C_1\} = \{0.924; 5.89\},$$

$$\{A, C_1\} = \{1.2619; 7.26\}, \quad \{A, C_1\} = \{1.435; 8.66\},$$

$$\{A, C_1\} = \{1.689; 10.04\}, \quad \{A, C_1\} = \{1.907; 11.42\},$$

$$\{A, C_1\} = \{2.137; 12.79\}, \quad \{A, C_1\} = \{2.362; 14.16\}.$$

Ниже мы покажем, что множество точек  $\{A, C_1\}$  с нулевой энергией является бесконечным с почти эквидистантным расположением вдоль двух кривых (см. ниже рис. 3). Мы получим также аналитическое уравнение для этих линий в пространстве  $\{A, C_1\}$ .

Перейдем теперь к исследованию области значений  $C_1 \gg 1$ . Рассмотрим для этого линейное уравнение

$$Z'''' - 2C_1 Z'' + \frac{1}{4}y(Z' + yZ'') - \frac{1}{4}Z = 0. \quad (13)$$

С помощью подстановки

$$Z = y\phi, \quad \phi' = \mathcal{F} \quad (14)$$

уравнение (13) сводится к уравнению третьего порядка

$$y\mathcal{F}''' + 4\mathcal{F}'' - 2C_1[2\mathcal{F} + y\mathcal{F}'] + \frac{3}{4}y^2\mathcal{F} + \frac{1}{4}y^3\mathcal{F}' = 0. \quad (15)$$

В уравнении (15) имеется точка поворота

$$y = 2\sqrt{2C_1}. \quad (16)$$

В окрестности точки поворота положим

$$y = 2\sqrt{2C_1} + t. \tag{17}$$

Четыре линейно независимых решения уравнения (13) мы выберем в виде

$$Z_1 = y \quad (\text{точное решение уравнения (13)}),$$

$$Z_2 = \begin{cases} \frac{\sqrt{8C_1 - y^2}}{\sqrt{8C_1}} & \text{до точки поворота,} \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}(2C_1)^{1/4}} \theta_3(t) & \text{в окрестности точки поворота,} \end{cases} \tag{18}$$

$$Z_3 = \begin{cases} \frac{1}{(8C_1 - y^2)} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^y dy_1 \sqrt{8C_1 - y_1^2}\right) & \text{до точки поворота,} \\ -\frac{\exp(-\pi C_1)}{4\sqrt{\pi}(2C_1)^{1/4}} \theta_1(t) & \text{в окрестности точки поворота,} \end{cases}$$

$$Z_4 = \begin{cases} \frac{1}{(8C_1 - y^2)} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^y dy_1 \sqrt{8C_1 - y_1^2}\right) & \text{до точки поворота,} \\ -\frac{\exp(\pi C_1)}{4\sqrt{\pi}(2C_1)^{1/4}} \theta_2(t) & \text{в окрестности точки поворота.} \end{cases}$$

Функции  $\theta_{1,2,3}$  в уравнении (18) определены следующим образом:

$$\theta_1(t) = -\frac{i}{2} \int \frac{dt_1}{t_1^{3/2}} e^{tt_1} \exp\left(\frac{t_1^3}{3\sqrt{2C_1}}\right) =$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{\pi t}, & t \gg (2C_1)^{1/6}, \\ -\frac{\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{2}{3}|t|^{3/2}(2C_1)^{1/4}\right)}{|t|(2C_1)^{1/4}}, & t \ll -(2C_1)^{1/6}, \end{cases}$$

$$\theta_2(t) = i \int \frac{dt_1}{t_1^{3/2}} e^{tt_1} \exp\left(\frac{t_1^3}{3\sqrt{2C_1}}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2\sqrt{\pi}}{t(2C_1)^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}t^{3/2}(2C_1)^{1/4}\right), & t \gg (2C_1)^{1/6}, \\ -\frac{\pi}{|t|(2C_1)^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|t|^{3/2}(2C_1)^{1/4}\right), & t \ll -(2C_1)^{1/6}, \end{cases}$$

(19)

$$\theta_3(t) = \frac{1}{2} \int \frac{dt_1}{t_1^{3/2}} e^{tt_1} \exp\left(\frac{t_1^3}{3\sqrt{2C_1}}\right) =$$

$$= \begin{cases} -2\sqrt{\pi}|t|^{1/2}, t \ll -(2C_1)^{1/6}, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{t(2C_1)^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}t^{3/2}(2C_1)^{1/4}\right), t \gg (2C_1)^{1/6}. \end{cases}$$

Уравнения (18), (19) позволяют пройти точку поворота (17) и получить решение уравнения (13) во всей области  $y \geq 0$ .

Общее решение уравнения (19), удовлетворяющее граничному условию в нуле, можно представить в виде

$$Z = A_1 \left( Z_4 - Z_3 - \frac{y}{2\sqrt{2C_1}} \right) + D_1 y + D_2 Z_2 + D_3 Z_3 + D_4 Z_4, \quad (20)$$

где  $Z_{1,4}$  — решения (18), (19) линейного уравнения (13), а функции  $D_{1-4}$  выражаются через интегралы от производных функции  $Z$ :

$$D_k = -\frac{8}{\sqrt{2C_1}} \int_0^y dy_1 P_{k4} \left( \frac{4(Z')^2}{y_1^3} - \frac{6Z'Z''}{y_1^2} \right), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} P_{14} &= -\det \begin{pmatrix} Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z'_2 & Z'_3 & Z'_4 \\ Z''_2 & Z''_3 & Z''_4 \end{pmatrix}, \\ P_{24} &= \det \begin{pmatrix} Z_1 & Z_3 & Z_4 \\ Z'_1 & Z'_3 & Z'_4 \\ Z''_1 & Z''_3 & Z''_4 \end{pmatrix}, \\ P_{34} &= -\det \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_4 \\ Z'_1 & Z'_2 & Z'_4 \\ Z''_1 & Z''_2 & Z''_4 \end{pmatrix}, \\ P_{44} &= \det \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ Z'_1 & Z'_2 & Z'_3 \\ Z''_1 & Z''_2 & Z''_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

В области  $y \ll 1$  находим

$$\begin{aligned} P_{34} + P_{44} &= \frac{\sqrt{2C_1}}{2} y, & D_3 + D_4 &= 96A^2 y^3, \\ D_1 &= \frac{18A^2 y^2}{C_1}, & D_2 &= -\frac{12A^2 y^3}{C_1}. \end{aligned} \quad (23)$$

С помощью формул (8), (20), (23) находим значение коэффициентов  $A_1$ :

$$A_1 = \frac{12A}{\sqrt{2C_1}}. \quad (24)$$

Уравнения, определяющие точки  $\{A, C_1\}$  с нулевой энергией, следуют из формул (20), (23):

$$\frac{12A}{\sqrt{2C_1}} + D_4(\infty) = 0, \quad D_2(\infty) = 0. \quad (25)$$

В главном приближении по параметру  $C_1^{-2}$  из уравнений (21), (22) находим значение величины  $D_4(\infty)$ :

$$\begin{aligned} D_4(\infty) &= \frac{2}{\sqrt{2C_1}} \int_0^\infty dy \exp(-\sqrt{2C_1}y) \times \\ &\times \left[ \frac{4(Z')^2}{y^3} - \frac{6Z'Z''}{y^2} \right]. \end{aligned} \quad (25a)$$

В этом же приближении первое из уравнений (25) можно несколько упростить и привести к виду [8]

$$\begin{aligned} 6A &= \int_0^\infty dy \exp(-\sqrt{2C_1}y) \times \\ &\times \frac{(Z')^2}{y^2} \left( 3\sqrt{2C_1} + \frac{2}{y} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Предположим, что выполняется неравенство

$$\left| A - \frac{C_1}{6} \right| \ll C_1. \quad (27)$$

Тогда функция

$$Z' = \frac{C_1}{2} y^2 + \frac{3y}{\sqrt{C_1}} \left( A - \frac{C_1}{6} \right) \sin(\sqrt{C_1}y) \quad (28)$$

является решением уравнения (9) в области  $y \ll \sqrt{C_1}$ , удовлетворяющим граничному условию в нуле для функции  $Z$ . Предположим, что существует

решение уравнения (26), удовлетворяющее условию (27). Тогда из формул (26), (28) находим

$$\left(A - \frac{C_1}{6}\right) \left\{ 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty dt e^{-t}(3t+2) \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - o\left(\frac{A}{C_1} - \frac{1}{6}\right) \right\} = 0. \quad (29)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty dt e^{-t}(3t+2) \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 1, \quad (30)$$

то уравнение (26) имеет два близких решения:

$$6A = C_1, \quad (31)$$

которые расщепятся, как будет показано ниже, лишь с учетом экспоненциально малых по  $C_1$  членов. Одновременно мы найдем следующие по  $1/C_1^2$  члены в уравнении (31).

Покажем, что с экспоненциальной по  $C_1$  точностью амплитуды осциллирующих членов при  $y \rightarrow \infty$  пропорциональны амплитудам осциллирующих членов в области  $1 \ll y \ll \sqrt{C_1}$ . Положим для этого

$$y = 2\sqrt{2C_1}x, \quad Z = \left(2\sqrt{2C_1}\right)^5 \tilde{Z}(x). \quad (32)$$

С помощью формул (32) уравнение (9) преобразуется к виду

$$\frac{x}{4}(\tilde{Z}' + x\tilde{Z}'') - \frac{1}{4}\tilde{Z}'' - \frac{1}{4}\tilde{Z} + \frac{1}{64C_1^2}\tilde{Z}'''' = \\ = \frac{4}{x^3}(\tilde{Z}')^2 - \frac{6}{x^2}\tilde{Z}'\tilde{Z}'' \quad (33)$$

Уравнение

$$\frac{x}{4}(\tilde{Z}' + x\tilde{Z}'') - \frac{1}{4}\tilde{Z}'' - \frac{1}{4}\tilde{Z} = \frac{4}{x^3}(\tilde{Z}')^2 - \frac{6}{x^2}\tilde{Z}'\tilde{Z}'' \quad (34)$$

имеет решение  $\tilde{Z}_0$ , регулярное в нуле:

$$\tilde{Z}_0 = \frac{x^3}{48} - \frac{x^5}{90} + \frac{2x^7}{2835} + \dots, \quad (35)$$

что соответствует точке  $C_1 = 6A$ . В области  $x \gg 1$  находим, что

$$\tilde{Z}_0 = Bx + \frac{B_1}{x} \quad (36)$$

— общее решение уравнения (34). Численное интегрирование уравнения (34) дает для коэффициентов  $B, B_1$  значения

$$\tilde{Z}_0 = 0.0156x - \frac{0.0039}{x}. \quad (37)$$

Решение уравнения (33) ищем в виде

$$Z = \tilde{Z}_0 + \tilde{Z}_1, \quad |\tilde{Z}_1| \ll |\tilde{Z}_0|, \quad (38)$$

функция  $\tilde{Z}_1$  удовлетворяет уравнению

$$\tilde{Z}_1'' \left( \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{6}{x^2}\tilde{Z}_0' \right) + \tilde{Z}_1' \left( \frac{x}{4} - \frac{8}{x^3}\tilde{Z}_0' + \frac{6}{x^2}\tilde{Z}_0'' \right) - \\ - \frac{1}{4}\tilde{Z}_1 + \frac{1}{64C_1^2}\tilde{Z}_1'''' = -\frac{1}{64C_1^2}\tilde{Z}_0'''' \quad (39)$$

Однородное уравнение (39) имеет одно гладкое решение

$$\tilde{Z}_1^{(1)} = 1 + \frac{x^2}{3} + \dots \quad (40)$$

Для получения трех остальных решений в области  $x \ll 1$  мы воспользуемся заменой

$$\tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_1^{(1)}f. \quad (41)$$

Функция  $f$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{x}{16C_1^2}f'''' + \frac{x}{2}f'' + f' = 0. \quad (42)$$

Решая уравнение (42), находим

$$f_1' = x \sin\left(2\sqrt{2C_1}x\right), \quad f_2' = x \cos\left(2\sqrt{2C_1}x\right), \quad (43)$$

$$f_3' = 16C_1^2 \int_0^\infty \frac{dx_1 x_1 \exp(-xx_1)}{(x_1^2 + 8C_1^2)^2}.$$

Таким образом, однородное уравнение (39) имеет два гладких решения и два быстро осциллирующих. Точка поворота для быстро осциллирующих решений лежит в комплексной плоскости  $x$  на конечном расстоянии от вещественной оси, и, следовательно, вероятность перехода между ветвями (быстрыми и медленными) экспоненциально мала. Тем самым, задача сводится к построению в области  $y \ll \sqrt{C_1}$  решения уравнения (6), не имеющего быстрых осцилляционных слагаемых. Опишем процедуру, позволяющую сделать это в любом порядке по  $1/C_1^2$ .

В качестве первого приближения положим

$$Z = \left(\frac{C_1}{6} + A_1\right)y^3 + Z_1, \quad (44)$$

где  $A_1 = o(1/C_1)$ . Подставляя выражение (44) в формулу (6), получим уравнение для функции  $Z_1$ :

$$Z_1'''' + \frac{2}{y^2}Z_1' - \frac{2}{y}Z_1'' + C_1Z_1' = -\frac{C_1y^4}{18} - 3y^2C_1A_1. \quad (45)$$

Интегрируя уравнение (45), получим

$$Z'_1 = -y \left\{ \frac{y^3}{18} + y \left( 3A_1 - \frac{1}{3C_1} \right) + \frac{1}{3C_1^{3/2}} \sin(\sqrt{C_1}y) (1 - 9A_1C_1) \right\}. \quad (46)$$

Если положить

$$A_1 = \frac{1}{9C_1}, \quad (47)$$

то функция  $Z$  не будет содержать осцилляционных членов:

$$Z = \frac{y^3}{6} \left( C_1 + \frac{2}{3C_1} \right) - \frac{y^5}{90}. \quad (48)$$

В качестве следующего приближения используем выражение (48) для функции  $Z$  в качестве нулевого:

$$Z = \frac{y^3}{6} \left( C_1 + \frac{2}{3C_1} + A_1 \right) - \frac{y^5}{90} + Z_1, \quad (49)$$

$$A_1 = o(1/C_1^3).$$

Из формул (6), (49) находим уравнение для  $Z_1$ :

$$Z_1''' + \frac{2}{y^2} Z_1' - \frac{2}{y} Z_1'' + C_1 Z_1' = \frac{4y^4}{81C_1} + \frac{y^6}{1620} - 2y^2 \left( \frac{C_1 A_1}{4} + \frac{1}{9C_1^2} \right). \quad (50)$$

Решая уравнение (50), получим выражение для  $Z_1'$ , аналогичное формуле (46):

$$Z_1' = \frac{y}{C_1} \left\{ \frac{y^5}{1620} + \frac{y^3}{27C_1} - 2y \left( \frac{C_1 A_1}{4} + \frac{2}{9C_1^2} \right) + \frac{2}{\sqrt{C_1}} \left( \frac{A_1 C_1}{4} + \frac{2}{9C_1^2} \right) \sin(\sqrt{C_1}y) \right\}. \quad (51)$$

Осциллирующая поправка обращается в нуль, если положить коэффициент  $A_1$  равным

$$A_1 = -\frac{8}{9C_1^3}. \quad (52)$$

Функция  $Z$  в рассматриваемом приближении равна

$$Z = \frac{y^3}{6} \left( C_1 + \frac{2}{3C_1} - \frac{8}{9C_1^3} \right) - \frac{y^5}{90} \left( 1 - \frac{2}{3C_1^2} \right) + \frac{y^7}{11340 C_1}. \quad (53)$$

Этот процесс можно продолжить неограниченно. В результате построим функцию  $Z$ , не имеющую быстрых осцилляций и представимую в виде

$$Z(y) = \left( 2\sqrt{2C_1} \right)^5 \times \left\{ \tilde{Z}_0(x) + \frac{1}{C_1^2} \tilde{Z}_1(x) + \frac{1}{C_1^4} \tilde{Z}_2(x) + \dots \right\}, \quad (54)$$

где  $y = 2\sqrt{2C_1}x$ , а функция  $\tilde{Z}_0$  определяется формулами (33), (35). Первые члены разложения функций  $\tilde{Z}_1(x)$ ,  $\tilde{Z}_2(x)$  по степеням  $x$  находятся из уравнения (53):

$$\tilde{Z}_1(x) = \frac{x^3}{72} + \frac{x^5}{135} + \dots, \quad (55)$$

$$\tilde{Z}_2(x) = -\frac{x^3}{54} + \dots$$

Одновременно возникает выражение для коэффициента  $A$ , улучшающее формулу (31):

$$6A = C_1 + \frac{2}{3C_1} - \frac{8}{9C_1^3} + \dots \quad (56)$$

Разложение (54) является асимптотическим рядом по  $C_1$ . В правой части формул (54), (56) возникают экспоненциально малые по  $C_1$  члены, связанные с туннелированием между ветвями в линеаризованном уравнении (9). В силу уравнения (29) уравнение (56) должно расщепиться на два. И, как следует из изложенного выше, величина расщепления экспоненциально мала по параметру  $C_1$ :

$$6A - \left( C_1 + \frac{2}{3C_1} - \frac{8}{9C_1^3} + \dots \right) = \mp DC_1^{1.25} \exp(-\beta C_1). \quad (57)$$

Величина  $\beta$  определяется положением точки поворота и будет найдена ниже. На кривых, определяемых уравнением (57), амплитуды  $d_{1,2}$  экспоненциально малы по параметру  $C_1$ . Осцилляционная поправка к формулам (54) в области  $y \gg \sqrt{C_1}$  состоит из двух слагаемых (см. (10)). Линейная комбинация из них, переходящая в функцию  $\sin(\sqrt{C_1}y)$  в области  $1 \ll y \ll \sqrt{C_1}$ , может быть убрана с помощью малого сдвига (порядка  $C_1^{-1/2} \exp(-2\beta C_1)$ ) в уравнении (57). Вторая линейная комбинация, сдвинутая относительно первой на фазу  $\pi/2$  и переходящая в функцию  $\cos(\sqrt{C_1}y)$  в области  $1 \ll y \ll \sqrt{C_1}$ , возникает только из-за туннелирования между быстрыми и медленными ветвями в линеаризованном уравнении (9). Амплитуда при этой комбинации является осциллирующей функцией параметра  $C_1$ . Ее нули

дают состояния с нулевой энергией. Найдем период этой функции и величину  $\beta$ .

Из линеаризованного уравнения (9) находим величину «импульса»  $P(x)$ :

$$P^2(x) = 2C_1 \left( -1 + x^2 + \frac{24}{x^2} \frac{\partial \tilde{Z}_0}{\partial x} \right), \quad (58)$$

где функция  $\tilde{Z}_0$  определена формулами (33), (35). Пусть  $x^*$  — точка поворота, в которой «импульс»  $P(x)$  обращается в нуль:

$$P(x^*) = 0. \quad (59)$$

Тогда величина  $\mathcal{P}$  — действие на траектории:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= 4C_1 \int_0^{x^*} dx \sqrt{x^2 + \frac{24}{x^2} \frac{\partial \tilde{Z}_0}{\partial x} - 1} = \\ &= C_1(\beta_0 + i\beta) \end{aligned} \quad (60)$$

определяет амплитуду осциллирующих членов в формуле (10) на линиях (57):

$$d_{1,2} \sim C_1^{5/2} \exp(-2\beta C_1). \quad (61)$$

На каждой из линий лежат точки  $\{A, C_1\}$ , соответствующие нулевой энергии. Эти точки расположены почти эквидистантно по  $C_1$  с периодом

$$\delta C_1 \approx \frac{2\pi}{\beta_0} \approx 2.6. \quad (62)$$

Численное интегрирование уравнений (34), (60) дает следующее значение для констант  $\beta, \beta_0, x^*$ :

$$\begin{aligned} \beta &= 0.712, \quad \beta_0 = 2.416, \\ x^* &= 0.973 + i \cdot 0.393. \end{aligned} \quad (63)$$

Из формулы (54) следует важное неравенство, справедливое вдоль линий (57):

$$\frac{1}{\tilde{Z}_0(x)} \left| \frac{Z(y)}{(2\sqrt{2C_1})^5} - \tilde{Z}_0(x) \right| < \frac{\text{const}}{C_1^2}. \quad (64)$$

Оценка (64) является равномерной по координате  $y$ . Следовательно, все решения с нулевой энергией почти подобны.

На рис. 1, 2 представлены зависимости  $\varphi, \chi'$  в точках с нулевой энергией  $\{A, C_1\}$ : (0.644; 1.09) и (0.913; 4.41). Сплошные линии на рис. 1, 2 — функции  $\varphi_0, \chi'_0$ , построенные на функции  $\tilde{Z}_0$ .

На рис. 3 изображены точки с нулевой энергией на плоскости  $\{A, C_1\}$ , сплошные линии определены уравнениями (57), (63).

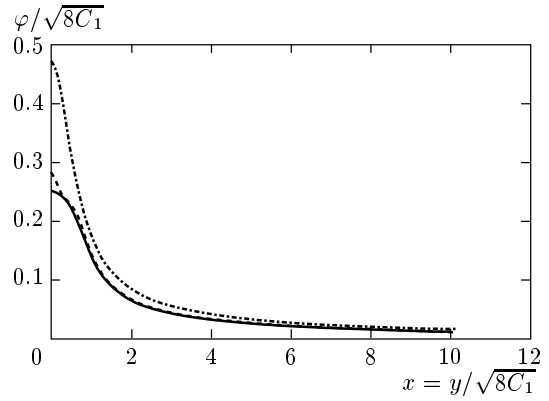


Рис. 1. Функции  $\varphi/\sqrt{8C_1}$  в точках с нулевой энергией  $(A, C_1) = (0.644; 1.09)$  — штрихпунктирная линия;  $(A, C_1) = (0.913; 4.41)$  — штриховая линия; сплошная линия — предельная функция  $\varphi_0 = \sqrt{\tilde{Z}_0(x)}/x$  (уравнения (34), (35));  $x = y/\sqrt{8C_1}$

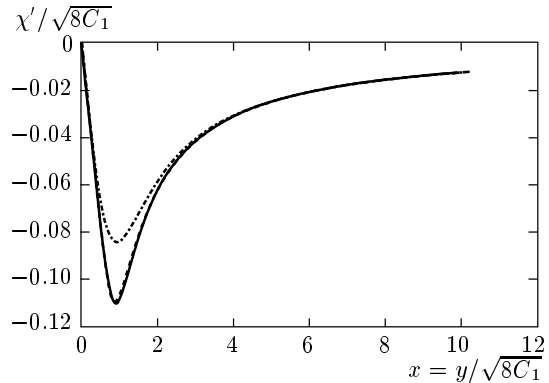


Рис. 2. Функции  $\chi'/\sqrt{8C_1}$  в точках с нулевой энергией  $(A, C_1) = (0.644; 1.09)$  — штрихпунктирная линия;  $(A, C_1) = (0.913; 4.41)$  — штриховая линия;  $\chi'_0$  — предельная функция, построенная из функции  $\tilde{Z}_0(x)$ , — сплошная линия;  $x = y/\sqrt{8C_1}$

С увеличением параметра  $C_1$  точность численного определения точек с нулевой энергией быстро уменьшается.

Таким образом, на плоскости  $\{A, C_1\}$  существуют две линии, на которых амплитуда осциллирующего члена экспоненциально мала. На этих линиях (см. уравнение (57)) почти эквидистантно по  $C_1$  расположены точки, соответствующие решениям с нулевой энергией. Все решения с нулевой энергией гладкие и почти подобны. Функция  $\varphi$  для этих решений медленно убывает с ростом  $y$  в области  $y \gg \sqrt{C_1}$ :

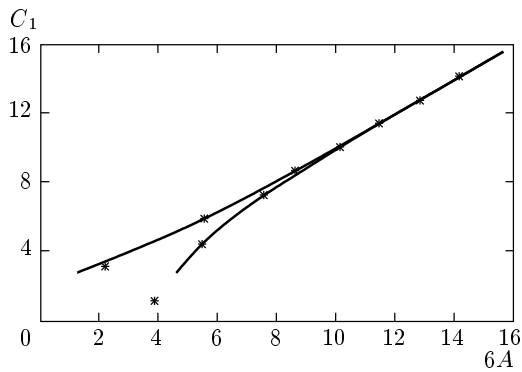


Рис. 3. \* — точки с нулевой энергией на плоскости  $(6A, C_1)$ , сплошные линии определены уравнениями (57), (63)

$$\varphi(y) \sim \frac{8C_1\sqrt{B}}{y},$$

где величина  $B$  определена формулами (36), (37). Тем самым нет никаких оснований полагать, что решение, соответствующее точке  $\{A, C_1\}$ : (0.644, 1.09), чем-то выделено и развитие неустойчивости приведет именно к его образованию. В настоящее время вопрос о вероятности образования слабоколлапсирующих решений не исследован. Не исключено, что наличие специальных линий на плоскости  $\{A, C_1\}$  окажется существенным как при решении этого вопроса, так и для исследования проблемы устойчивости слабоколлапсирующих решений.

Интеграл для полного числа частиц расходится для всякого слабоколлапсирующего решения. Слабое убывание решения делает необходимым проводить обрезку на достаточно больших значениях  $y$ . Поэтому резко снижается вероятность образования состояния, приводящего к коллапсу. Для точек

общего положения  $\{A, C, C_1\}$  существует набор параметров, таких что глубокий минимум  $\varphi$  лежит при  $y \sim 1$  [5, 6]. Следует ожидать, что именно эти решения будут реализовываться при численном счете или в реальных физических объектах.

Авторы выражают благодарность А. Б. Шабату и С. В. Иорданскому за ценные замечания.

Работа Ю. Н. Овчинникова поддержана CRDF (USA) (грант RP1-2251) и РФФИ (проект 00-02-17729а). Работа В. Л. Верещагина поддержана фондом INTAS (грант 99-01782) и РФФИ (проекты 99-01-00656, 01-01-00931).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1746 (1972).
2. В. Е. Захаров, В. С. Синах, ЖЭТФ **68**, 940 (1975).
3. В. Е. Захаров, Л. Н. Шур, ЖЭТФ **81**, 2019 (1981).
4. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986).
5. Ю. Н. Овчинников, Письма в ЖЭТФ **69**, 387 (1999).
6. Ю. Н. Овчинников, И. М. Сигал, ЖЭТФ **116**, 67 (1999).
7. P. L. Sulem, C. Sulem, *Nonlinear Schroedinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*, Springer Verlag, ISBN (1999).
8. Ю. Н. Овчинников, В. Л. Верещагин, Письма в ЖЭТФ **74**, 76 (2001).