

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ И ГРАНИЦ СРЕДЫ НА ПЕРЕНОС РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Н. Старостин*, М. А. Чесноков

Государственный научный центр «Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований»
142190, Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 30 июля 2001 г.

Получено интегральное уравнение для спектральной плотности возбужденных атомов на примере оптически плотных ограниченных диспергирующих сред. Найдено, что учет теплового движения атомов и эффектов, обусловленных существованием границы, приводит к неколокальной связи между концентрацией возбужденных частиц и интенсивностью электромагнитного поля в среде. Показано, что в преенебрежении пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости и граничными эффектами полученный результат переходит в известное уравнение Бибермана–Холстейна. Исследуется также задача о спектральной интенсивности излучения нагретого полупространства.

PACS: 32.70.Jz, 32.80.-t, 51.10.+y, 52.25.Dg

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших характеристик, определяющих перенос резонансного излучения в среде, является спектральная плотность возбужденных атомов $N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \omega, t)$. В квазиклассическом пределе она определяется как число атомов, способных испустить фотон с частотой ω , находящихся в момент времени t в точке \mathbf{r} и обладающих скоростью \mathbf{v} [1–3].

В достаточно плотных средах могут реализовываться условия, когда частота сбой фазы возбужденного атома в уширяющих соударениях, γ_{coll} , будет велика по сравнению с вероятностью γ_R спонтанных переходов (т. е. $\gamma_{coll} \gg \gamma_R$). При этом исчезает корреляция частот поглощенного и испущенного фотонов, т. е. атом «забывает» о частоте, которую имел поглощенный фотон и испускает фотон с вероятностью, пропорциональной контуре спектральной линии. Такой режим носит название полного перераспределения по частотам (ППЧ). В случае резонансного механизма уширения [4], связанного с передачей возбуждения от одного атома к другому, для γ_{coll} имеем:

$$\gamma_{coll} = N\pi \frac{d_{12}^2}{\hbar},$$

где N — плотность частиц в основном состоянии,

d_{12} — матричный элемент дипольного момента для резонансного перехода. В дальнейшем индексом 1 будем обозначать основное состояние атома, индексом 2 — возбужденное. Для вероятности спонтанного излучения γ_R имеем [3]:

$$\gamma_R = \frac{4}{3} \frac{\omega^3 d_{12}^2}{\hbar c^3},$$

где c — скорость света, ω — частота резонансного фотона. Следовательно, условие $\gamma_{coll} \gg \gamma_R$ будет выполняться при плотностях газа N , таких что

$$\frac{N\lambda^3}{32\pi} \gg 1. \quad (1)$$

Для атомов натрия условие на резонансную линию атомного пара (1) означает, что $N \geq 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Если при этом выполняется соотношение $\gamma_{coll} > kv_T$, где kv_T — доплеровская ширина линии ($k = 2\pi/\lambda$, v_T — тепловая скорость атома), то, как показано в работе [6], при таких плотностях газа длина свободного пробега фотона $l_\omega \sim 1/k_\omega$ (k_ω — коэффициент поглощения в линии) становится сравнимой с длиной волны, и описание переноса излучения на языке фотонов становится несправедливым. В этом случае в теории необходимо учитывать влияние диэлектрических свойств среды на распространение резонансных волн. Для атомов натрия условие $\gamma_{coll} > kv_T$ начинает выполняться при $N > 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

*E-mail: a.starostin@relcom.ru

В данной работе мы ограничимся рассмотрением случая не слишком высоких плотностей атомов, когда среда является «прозрачной», т. е. длина свободного пробега резонансного фотона велика по сравнению с длиной волны, но выполняется условие на режим полного перераспределения по частотам (1). В случае «прозрачной» среды для спектральной интенсивности излучения может быть записано кинетическое уравнение стандартного вида, являющееся частным случаем уравнения Дайсона для фотонной функции Грина, записанного в квазиклассическом приближении.

Перенос резонансного излучения в режиме ППЧ подробно изучался в работах Бибермана–Холстейна [7, 8]. Ими было показано, что в случае полного перераспределения по частотам спектральная плотность возбужденных частиц может быть представлена в виде

$$N_2(\omega) = \int N_2(\omega, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = N_2 a(\omega), \quad (2)$$

где $a(\omega)$ — контур спектральной линии, N_2 — полная населенность верхнего состояния (в общем случае неравновесная). Это соотношение, справедливое для не слишком больших отстроек от резонанса, $\Delta = \omega - \omega_0 \ll T$ (T — температура уширяющих частиц, ω_0 — частота резонансного перехода), означает, что вероятность испустить квант частоты ω не зависит от частоты поглощенного фотона и пропорциональна контуру спектральной линии. Такое предположение справедливо, когда частые соударения с уширяющими частицами приводят к случайному блужданию возбужденного атома в пределах контура линии, заставляя атом «забыть» предысторию возбуждения (т. е. в случае полного перераспределения по частицам). Следует отметить, что чисто радиационный механизм уширения не вызывает перераспределения по частотам испускаемых фотонов, что важно для переноса излучения в оптически плотных средах, когда основная доля энергии переносится в крыльях спектральной линии (в крыльях линии фойгтовский контур линии имеет лоренцевскую асимптотику).

Кроме того, в пределе ППЧ было получено интегральное уравнение (уравнение Бибермана–Холстейна) для полной плотности возбужденных атомов $N_2(\mathbf{r})$, описывающее нелокальный перенос возбуждения за счет резонансного излучения:

$$\nu N_2(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N_2(\mathbf{r}'). \quad (3)$$

Здесь $\nu = \gamma_R + \gamma_T$ — полная скорость ухода частиц

с возбужденного уровня за счет спонтанного распада и неупругих соударений, $Q(\mathbf{r})$ — скорость столкновительного заселения возбужденного уровня (например, электронным ударом). Ядро интегрального уравнения (3) в случае однородной среды имеет вид:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \gamma_R \times \times \int d\omega \frac{k_\omega a_\omega}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \exp(-k_\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (4)$$

Физический смысл уравнения (3) состоит в том, что плотность возбужденных атомов в точке \mathbf{r} , падающих со скоростью ν , образуется за счет неупругих столкновений $Q(\mathbf{r})$ и резонансного излучения, испускаемого возбужденными атомами (находящимися в точке \mathbf{r}') со скоростью $\gamma_R a_\omega$ в интервале частот $\omega, \omega + d\omega$. Это излучение доходит до точки \mathbf{r} ослабленным пропорционально фактору

$$\frac{\exp(-k_\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

и поглощается в этой точке с вероятностью, пропорциональной значению коэффициента поглощения k_ω . В оптически плотных средах, когда $k_\omega R \gg 1$ (R — характерный размер системы), вклад области частот вблизи центра линии $\Delta = \omega - \omega_0 \ll \Gamma$ экспоненциально мал и основной вклад в интеграл (4) дают крылья линий, т. е. $\Delta \gg \Gamma$.

Следует заметить, что впервые уравнение (3) было написано из чисто эвристических соображений. Кроме того, при написании (3) не принимались во внимание эффекты, вызванные существованием границы и тепловым движением атомов среды (т. е. пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости). Как будет показано в дальнейшем, тепловое движение атомов и присутствие границы приводят к нелокальности отклика среды на электромагнитное поле в ограниченных системах. Итак, целью настоящей работы является вывод обобщенного уравнения Бибермана–Холстейна, учитывающего эти эффекты. Будет получено, что спектральная плотность возбужденных частиц удовлетворяет уравнению вида (3) с обобщенным ядром \tilde{K} , зависящим от диэлектрических свойств среды. Также будет показано, что в пренебрежении пространственной дисперсией и присутствием границы ядро \tilde{K} переходит в (4).

Кроме того, в работе рассматриваются задачи об излучении нагретого полупространства и о прохождении резонансных волн через среду. Выражения для фотонных функций Грина можно найти непосредственно из решения соответствующего ки-

нетического уравнения во внешней и внутренней областях и последующей шивки на границе раздела. Будет найден явный вид коэффициента отражения электромагнитных волн от резонансной среды. Отметим, что ранее этот вопрос исследовался в работах Вуда [9], Векленко и Ткачука [10]. Здесь также будет выведено выражение для коэффициента отражения, явно учитывающее пространственную дисперсию и, тем самым, обобщающее известный результат Френеля–Вуда [9]. Кроме того, получены явные выражения для спектральных интенсивностей излучения в среде, обусловленных падающими резонансными волнами и спонтанными источниками фотонов. В дальнейшем покажем, что функция объемного источника спонтанного излучения ε_ω пропорциональна спектральной плотности возбужденных атомов N_2 . Следовательно, при заданной зависимости N_2 от глубины найденные результаты позволяют полностью описать прохождение падающего излучения через среду, а также излучение нагретого полупространства в вакууме.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВОЗБУЖДЕННЫХ АТОМОВ

Итак, будем рассматривать полубесконечную, однородную и изотропную среду, состоящую из двухуровневых невырожденных систем. Тем самым не будут приниматься во внимание различные эффекты, связанные с поляризацией излучения. В качестве плоскости раздела выберем плоскость xy , а ось z направим в глубь среды.

Традиционным аппаратом, позволяющим получить уравнение для спектральной плотности $N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \omega, t)$ возбужденных атомов, является аппарат кинетических функций Грина. Однако отметим, что в дальнейшем мы будем иметь дело лишь с проекциями атомных функций Грина $G_{ij}^{\alpha\beta}$ ($i, j = 1, 2$) на основное и возбужденное состояния. Например, для G_{ij}^{-+} имеем

$$iG_{ij}^{\alpha\beta}(x, x') = - \int \varphi_i^*(\xi) \langle \hat{\Psi}^+(x' \xi') \hat{\Psi}(x \xi) \rangle \times \\ \times \varphi_j(\xi') d\xi d\xi'.$$

Здесь $x = \{t, \mathbf{r}\}$ — 4-координата центра тяжести атома, ξ — переменные, характеризующие движение атомного электрона. Оператор $\hat{\Psi}$ — гейзенберговский полевой оператор атомных частиц (для определенности будем считать, что $\hat{\Psi}$ удовлетворяет фермиевской статистике), φ_i ($i = 1, 2$) — набор атомных

волновых функций. Верхние индексы α, β пробегает в соответствии с техникой Келдыша [11] значения $+$ и $-$. Заметим, что в отсутствие когерентной накачки недиагональные элементы $G_{ij}^{\alpha\beta}$ ($i \neq j$) равны нулю.

Будем предполагать достаточно медленное изменение всех величин в пространстве и времени, что позволит нам придать теории вид кинетических уравнений для населенностей атомных состояний и спектральных интенсивностей. Приведем связь в квазиклассическом приближении между спектральной плотностью возбужденных частиц $N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \omega, t)$ и кинетической функцией Грина G_{22}^{-+} возбужденных частиц:

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \omega_p, t) = - \int G_{22}^{-+}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) \times \\ \times \exp(i\omega_p \tau - i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}) d\tau d\boldsymbol{\rho}, \quad (5)$$

$$\tau = t_1 - t_2, \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \quad t = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Волновой вектор \mathbf{k} связан со скоростью атомной частицы \mathbf{v} соотношением $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/M$, где M — масса атома. Необходимо отметить, что величина $N_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \omega_p, t)$ не имеет физического смысла вследствие принципа неопределенности и, вообще говоря, может быть отрицательной. Физический смысл имеют лишь моменты спектральной плотности. Функция Грина G_{22}^{-+} является решением соответствующего кинетического уравнения, представляющего частный случай уравнения Дайсона. Следовательно, вывод выражения для спектральной плотности возбужденных атомов сводится к нахождению функции Грина возбужденных частиц G_{22}^{-+} , т.е. к решению соответствующего кинетического уравнения. Будем решать это уравнение в следующих допущениях: атомный газ предполагается невырожденным, т.е. мы пренебрегаем членами порядка $N\lambda_T^3$ ($\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/MT}$ — тепловая де-бройлевская длина волны атома) по сравнению с единицей; взаимодействие фотонов с атомами среды будет описываться в дипольном приближении; отстройки частот от резонанса предполагаются малыми, т.е.

$$\Delta = \omega - \omega_0 \ll \omega_0, \quad \omega_0 = \omega_2 - \omega_1.$$

Помимо атомных функций Грина в работе также будут использоваться корреляционные функции электромагнитного поля $D_{ik}^{\alpha\beta}$, определенные через гейзенберговские операторы вектор-потенциала \hat{A}_i . Например, для кинетической фотонной функции Грина D_{ik}^{-+} получаем (предполагается калибровка со скалярным потенциалом $\varphi = 0$):

$$iD_{ik}^{-+}(x, x') = \langle \hat{A}_k(x') \hat{A}_i(x) \rangle,$$

$$iD_{0i}^{-+} = iD_{i0}^{-+} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Запаздывающая $D^R(G^R)$ и опережающая $D^A(G^A)$ функции Грина выражаются через функции $D^{--}(G^{--})$, $D^{++}(G^{++})$ и введенные ранее $D^{-+}(G^{-+})$ следующим образом:

$$D^R = D^{--} - D^{-+}, \quad D^A = D^{-+} - D^{++}.$$

Как уже указывалось, нахождение спектральной плотности атомов в возбужденном состоянии N_2 сводится к решению соответствующего уравнения для кинетической функции Грина возбужденных частиц G_{22}^{-+} , являющегося частным случаем уравнения Дайсона. Переходя в этом уравнении к фурье-компонентам по разностям времен и координат и учитывая определение (ср. (5))

$$G_{22}^{-+}(z_1, z_2, \mathbf{k}_\perp, \omega_p, t) = \int d\tau d\boldsymbol{\rho}_\perp \exp(i\omega_p\tau - i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}_\perp) G_{22}^{-+}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2),$$

$$\tau = t_1 - t_2, \quad \boldsymbol{\rho}_\perp = \mathbf{r}_{1\perp} - \mathbf{r}_{2\perp}, \quad t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

(индекс \perp означает направление, перпендикулярное оси z), получаем для полупространства

$$\begin{aligned} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{d^2}{dz_1^2} - \frac{d^2}{dz_2^2} \right) \right] G_{22}^{-+}(z_1, z_2, t) = \\ = - \int_0^\infty dz_3 \{ \Sigma_{22}^{--}(z_1, z_3, t) G_{22}^{-+}(z_3, z_2, t) + \\ + \Sigma_{22}^{++}(z_3, z_2, t) G_{22}^{-+}(z_1, z_3, t) + \\ + \Sigma_{22}^{-+}(z_1, z_3, t) G_{22}^{-+}(z_3, z_2, t) + \\ + \Sigma_{22}^{--}(z_3, z_2, t) G_{22}^{-+}(z_1, z_3, t) \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем для упрощения записи мы не будем явно указывать аргументы \mathbf{k}_\perp и ω_p . При выводе уравнения (6) мы пренебрегли эффектами запаздывания, что оправдано, когда интенсивность излучения достаточно медленно меняется во времени. Массовые операторы $\Sigma_{22}^{\alpha\beta}$ описывают взаимодействие возбужденных частиц с резонансными фотонами и уширяющими частицами (например, электронами), причем в пределе малой плотности атомов выполняется соотношение

$$\Sigma_{22}^{-+} \ll \Sigma_{22}^{+-}, \Sigma_{22}^{--}, \Sigma_{22}^{++}.$$

Последние два слагаемых в правой части (6) соответствуют приходному члену, связанному с поглощением резонансного фотона атомами, находящимися в основном состоянии, а также с переходами

на возбужденный уровень под действием столкновений. Аналогично, первые два слагаемых описывают уход частиц с возбужденного уровня за счет спонтанного и вынужденного излучений или соударений.

Итак, будем искать стационарное решение уравнения (6) в режиме ППЧ, т. е. будем предполагать частоту упругих соударений (приводящих к случайному блужданию возбужденного атома вдоль контура линии) γ_{coll} большой по сравнению с частотами спонтанных радиационных переходов γ_R и неупругих ударных переходов γ_T . В этом случае из равенства нулю интеграла упругих столкновений, $St^{elastic} = 0$, получаем, что $G_{22}^{-+}(G_{22}^{+-})$ могут быть представлены в следующем виде [12]:

$$\begin{aligned} G_{22}^{+-}(\omega, \mathbf{k}) &= (G_{22}^R - G_{22}^A) \left(1 - \tilde{N}_2(\omega, \mathbf{k}) \right) = \\ &= -2\pi i a_2(\varepsilon_p) \left(1 - \tilde{N}_2(\omega, \mathbf{k}) \right), \\ G_{22}^{-+}(\omega, \mathbf{k}) &= - (G_{22}^R - G_{22}^A) \tilde{N}_2(\omega, \mathbf{k}) = \\ &= 2\pi i a_2(\varepsilon_p) \tilde{N}_2(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\varepsilon_p = \omega - \omega_2 - E(\mathbf{k}) + \mu, \quad E(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2}{2M}$$

— энергия поступательного движения атомной частицы, μ — химический потенциал, $a_2(\varepsilon_p)$ — лоренцевский контур возбужденного состояния:

$$a_2(\varepsilon_p) = \frac{\gamma_2}{2\pi} \left(\varepsilon_p^2 + \frac{\gamma_2^2}{4} \right)^{-1}.$$

Величина $\tilde{N}_2(\omega, \mathbf{k})$ в случае вырожденного газа и не слишком широких линий, т. е. $\gamma_2 \lesssim T$ (мы предполагаем, что уширяющие частицы описываются распределением Ферми с абсолютной температурой T), записывается как

$$\tilde{N}_2(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{N}_2 \lambda_T^3 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p + E(\mathbf{k})}{T} \right). \quad (8)$$

Здесь λ_T — длина волны де Бройля частицы, \tilde{N}_2 — эффективная неравновесная населенность верхнего состояния, определяемая в общем случае радиационными и ударными (неупругими) переходами между основным и возбужденным уровнями. Следовательно, уравнения кинетики для концентраций возбужденных частиц в пределе ППЧ будут теперь формулироваться в терминах величин \tilde{N}_2 . Выражения (7), (8) являются обобщением выводов, полученных в традиционной теории переноса на случай широких спектральных линий, и позволяют в случае термодинамического равновесия получить правильное выражение для спектральной интенсивности [12]. В равновесии величины «населенностей»

$\tilde{N}_i (i = 1, 2)$ подчиняются соотношениям Больцмана. Подставляя выражения (7), (8) в уравнение для спектральной интенсивности излучения, приходим (в отличие от традиционной теории) к правильной формуле Планка для чисел заполнения фотонов. Заметим также, что в случае очень узких линий, т. е. $\gamma_2 \ll T$, мы можем пренебречь величиной ε_p в показателе экспоненты, в этом случае «населенности» \tilde{N}_i совпадают с истинными населенностями, получаемыми интегрированием (7) по частоте и по импульсам.

Итак, мы будем решать уравнение (6) с учетом соотношений (7), (8). Рассмотрим подробнее поглощение атомами резонансных фотонов из основного состояния. Для этого сначала выпишем в явном виде последнее слагаемое в правой части (6):

$$\begin{aligned} \text{St}_1^+ &= i \left(\frac{j}{c} \right)_i \left(\frac{j}{c} \right)_k \times \\ &\times \int_0^\infty dz_3 \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\mathbf{q}_\perp}{2\pi} G_{22}^R(z_1, z_3, \mathbf{k}_\perp, \omega_p) \times \\ &\times D_{ik}^{-+}(z_3, z_2, \mathbf{q}_\perp, \omega, t) \times \\ &\times G_{11}^{(0)-+}(z_3, z_2, \mathbf{k}_\perp - \mathbf{q}_\perp, \omega_p - \omega). \end{aligned} \quad (9)$$

При выводе (9) использовалось соотношение $G^{--} \approx G^R$, справедливое в случае малой плотности атомов. Кроме того, мы пренебрегли уширением основного состояния атома, взяв в качестве G_{11}^{-+} функцию Грина невозмущенного атома. Функция G_{22}^R — запаздывающая функция Грина верхнего уровня, j_k — k -я проекция матричного элемента оператора плотности тока между состояниями 2 и 1 (по индексам i, k подразумевается суммирование). Функция G_{22}^R удовлетворяет соответствующему уравнению Дайсона с массовым оператором Σ_{22}^R , решая которое, получаем

$$\begin{aligned} G_{22}^R(z, z', \mathbf{k}_\perp, \omega_p) &= \frac{1}{\hbar} \times \\ &\times \sum_k \frac{\psi_k(z) \psi_k^*(z')}{\omega_p - \omega_2 - E_k + \mu + i\gamma_2/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

При выводе (10) мы воспользовались соотношением:

$$\Sigma_{22}^R = \frac{1}{2} (\Sigma_{22}^{--} - \Sigma_{22}^{++}) - \frac{1}{2} (\Sigma_{22}^{+-} - \Sigma_{22}^{-+}),$$

где первое слагаемое характеризует сдвиг уровня за счет взаимодействия с резонансными фотонами и уширяющими частицами, второе — конечную ширину возбужденного уровня. В (10) функции

$\psi_k(z) \propto \sin(kz)$ — собственные функции оператора Лапласа, описывающие трансляционное движение атома в области $z > 0$,

$$E_k = \frac{\hbar k^2}{2M} + \frac{\hbar \mathbf{k}_\perp^2}{2M}$$

— соответствующие собственные значения энергии, ω_2 — перенормированная с учетом сдвига частота. Величина

$$\gamma_2 \approx -2 \text{Im} \Sigma_{22}^R \approx \Sigma_{22}^{+-}$$

— полная ширина возбужденного уровня, обусловленная в общем случае столкновениями и спонтанным распадом. В чисто радиационном режиме $\gamma_2 = A$, где A — вероятность спонтанного перехода $2 \rightarrow 1$ (коэффициент Эйнштейна). Для функции Грина $G_{11}^{(0)-+}$ непосредственно из определения следует:

$$\begin{aligned} G_{11}^{(0)-+}(z, z', \mathbf{k}_\perp, \omega_p) &= 2\pi i \sum_k \psi_k(z) \psi_k^*(z') \times \\ &\times \delta(\omega_p - \omega_1 - E_k + \mu) N_1(k, \mathbf{k}_\perp), \end{aligned} \quad (11)$$

где $N_1(k, \mathbf{k}_\perp)$ — числа заполнения атомов в основном состоянии по квантовым числам k, \mathbf{k}_\perp . Подставляя (10), (11) в (9) и учитывая малость волнового вектора фотона по сравнению с волновым вектором частицы, для приходного члена St_1^+ получаем выражение

$$\begin{aligned} \text{St}_1^+ &= -2\pi \left(\frac{j}{c} \right)_i \left(\frac{j}{c} \right)_k \int_0^\infty dz_3 \int \frac{d\omega d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \frac{D_{ik}^{-+}(z_3, z, \mathbf{q}_\perp, \omega, t)}{\varepsilon_p + i\gamma_2/2} \frac{N_1(k, \mathbf{k}_\perp)}{|\nu_z|} \times \\ &\times \left\{ \cos \left[\frac{\Delta}{\nu_z} (z + z_3) \right] + \cos \left[\frac{\Delta}{\nu_z} (z - z_3) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \varepsilon_p - \omega + \omega_0 + \mathbf{q}_\perp \mathbf{v}_\perp, \\ \varepsilon_p &= \omega_p - \omega_2 + E_k + \mu, \\ \nu_z &= \frac{k}{M}, \quad \mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{k}_\perp}{M}. \end{aligned} \quad (13)$$

При выводе (12) было проведено усреднение по быстроосциллирующим функциям типа $\exp(ip(z_1 + z_2))$. Аналогично можно получить выражение для третьего слагаемого в правой части уравнения (6). Складывая его с (12), получим окончательное выражение для полного члена при-

хода, описывающего фотопоглощение из основного состояния:

$$\begin{aligned} \text{St}^+ &= 2\pi i a_2(\varepsilon_p) \left(\frac{j}{c}\right)_i \left(\frac{j}{c}\right)_k \times \\ &\times \int_0^\infty dz_3 \frac{d\omega d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^3} D_{ik}^{-+}(z_3, z, \mathbf{q}_\perp, \omega, t) \times \\ &\times \frac{N_1(k, \mathbf{k}_\perp)}{|\nu_z|} \left\{ \cos \left[\frac{\Delta}{\nu_z}(z + z_3) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos \left[\frac{\Delta}{\nu_z}(z - z_3) \right] \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Выражение (14) описывает нелокальное поглощение излучения вблизи границы полупространства. Как следует из (14), характерный масштаб нелокальности ядра $L \sim \nu_z/\Delta$. Вдали от границы, на расстояниях много больших L , мы можем пренебречь нелокальностью и распространить интегрирование по z_3 на всю ось от $-\infty$ до $+\infty$, при этом ядро порядка $\delta(z - z_3)$.

Возвращаясь к уравнению (6), рассмотрим слабые, определяющие уход частиц с возбужденного уровня за счет радиационного распада. Без учета вынужденного излучения член ухода может быть записан в виде

$$\text{St}^- = -\hbar A N_2(z, k, \mathbf{k}_\perp, \omega_p), \quad (15)$$

где A — вероятность спонтанного перехода $2 \rightarrow 1$. Подставляя (14), (15) в уравнение (6), мы получим кинетическое уравнение для спектральной плотности атомов в верхнем состоянии N_2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_z \frac{\partial}{\partial z}\right) N_2(z, \omega_p) &= \\ &= -A N_2 + 2\pi i a_2(\varepsilon_p) \left(\frac{j}{c}\right)_i \left(\frac{j}{c}\right)_k N_1 \int_0^\infty dz_3 \times \\ &\times \int \frac{d\omega d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^3} D_{ik}^{-+}(z_3, z, \mathbf{q}_\perp, \omega, t) \frac{f(k, \mathbf{k}_\perp)}{|\nu_z|} \times \\ &\times \left\{ \cos \left[\frac{\Delta}{\nu_z}(z + z_3) \right] + \cos \left[\frac{\Delta}{\nu_z}(z - z_3) \right] \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь N_1 — полное число атомов на нижнем уровне, $f(k, \mathbf{k}_\perp)$ — функция распределения атомов в основном состоянии по квантовым числам k, \mathbf{k}_\perp , т.е. $N_1(k, \mathbf{k}_\perp) = N_1 f(k, \mathbf{k}_\perp)$, $\nu_z = k/M - z$ -я проекция скорости атома. При проведении численных расчетов в качестве функции распределения $f(\mathbf{k})$ будет взята функция распределения Максвелла.

В стационарном случае общее решение уравнения (16) может быть записано в форме

$$N_2(z, \omega_p) = \exp\left(-\frac{Az}{\nu_z}\right) \times \left\{ \bar{N}_2(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{dz'}{\nu_z} \exp\left(\frac{Az'}{\nu_z}\right) \text{St}^+ \right\}, \quad (17)$$

где St^+ — интеграл столкновений с фотонами (14), а величины $z_0 = z_0(\nu_z)$ и $\bar{N}_2(z_0)$ должны определяться из граничных условий. Рассмотрим сначала атомы с $\nu_z < 0$, т.е. атомы,двигающиеся по направлению к границе раздела. Полагая $z_0 = \infty$ и считая, что $N_2(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, из (17) имеем

$$\begin{aligned} N_2(z, \nu_z < 0, \omega_p) &= \\ &= - \int_z^\infty \frac{dz'}{\nu_z} \exp\left(-\frac{A}{\nu_z}(z - z')\right) \text{St}^+. \quad (18) \end{aligned}$$

Теперь получим выражение для плотности атомов N_2 с $\nu_z > 0$, т.е. для атомов,двигающихся в глубь среды. Для этого обозначим долю зеркальных столкновений атомных частиц с границей раздела как η , соответственно, величина $1 - \eta$ даст долю диффузных столкновений. Полагая $z_0 = 0$ и учитывая (17), (18), находим

$$\begin{aligned} N_2(z, \nu_z > 0, \omega_p) &= \\ &= \eta \int_0^\infty \exp\left(-\frac{A}{\nu_z}(z + z')\right) \frac{\text{St}^+}{\nu_z} dz' + \\ &+ \int_0^z \exp\left(-\frac{A}{\nu_z}(z - z')\right) \frac{\text{St}^+}{\nu_z} dz'. \quad (19) \end{aligned}$$

Остановимся подробнее на случае чисто зеркальных столкновений, $\eta = 1$. При этом на границе раздела $z = 0$ выполняется следующее соотношение:

$$N_2(z = 0, \nu_z < 0, \omega_p) = N_2(z = 0, \nu_z > 0, \omega_p). \quad (20)$$

Из (20) следует, что атомы со скоростями $\nu_z > 0$ можно рассматривать как атомы, прошедшие через плоскость $z = 0$ из области $z < 0$. Благодаря определенной симметрии, возникающей в случае зеркальных столкновений, задача фактически сводится к нахождению спектральной плотности возбужденных частиц во всем пространстве при условии выполнения соотношений:

$$\begin{aligned} D^{-+}(z, z') &= D^{-+}(-z, z'), \\ N_2(z < 0) &= N_2(z > 0). \quad (21) \end{aligned}$$

Из (18), (19) с учетом (21) соответствующее выражение для полной концентрации

$$N_2(z, \omega_p) = \int N_2(z, k, \mathbf{k}_\perp) dk d\mathbf{k}_\perp$$

атомов в верхнем состоянии запишется в виде

$$N_2(z, \omega_p) = 2\pi i N_1 \left(\frac{j}{c}\right)_i \left(\frac{j}{c}\right)_k a_2(\varepsilon_p) \times \\ \times \int_0^\infty dz_3 \int \frac{d\omega d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^3} \times \\ \times \int_{-\infty}^\infty dz' D_{ik}^{-+}(z_3, z', \mathbf{q}_\perp, \omega) K(z_3, z'|z), \quad (22)$$

где

$$K(z_3, z'|z) = \int_0^\infty \frac{d\nu_z}{\nu_z} \exp\left(-\frac{A}{\nu_z}|z - z'|\right) \times \\ \times \int d\mathbf{v}_\perp \frac{f(\nu_z, \mathbf{v}_\perp)}{\nu_z} \times \\ \times \left\{ \cos\left[\frac{\Delta}{\nu_z}(z' + z_3)\right] + \cos\left[\frac{\Delta}{\nu_z}(z' - z_3)\right] \right\}. \quad (23)$$

Как было отмечено, ядро интеграла K содержит описание эффектов нелокального поглощения излучения вблизи границы раздела сред (т.е. при $z \lesssim L = \nu_z/\Delta$), обусловленных поглощением атомами в точке z излучения, испущенного атомами в некоторой другой точке z_3 . Кроме того, оно учитывает различные эффекты, связанные с тепловым движением атомов, т.е. зеркальные отражения частиц от плоскости $z = 0$ и перенос возбуждений движущимися атомами. В случае теплового переноса возбуждений атом, поглотивший фотон в точке z' , может затем испустить его в другой точке z с вероятностью, пропорциональной фактору $\exp(-A|z - z'|/\nu_z)$. Аналогично, возбужденные атомы, отразившись от границы раздела сред, также дают дополнительный вклад в концентрацию возбужденных частиц N_2 на глубине z . Следовательно, учет теплового движения атомов может привести к увеличению эффективного числа возбужденных атомов в среде. В том случае, когда тепловые скорости частиц достаточно малы, а верхний уровень является короткоживущим, тепловые эффекты становятся несущественными (за исключением узкой области вблизи границы, где необходимо учитывать

отраженные атомы). В этом пределе ядро K заметно упрощается и принимает вид

$$K(z_3, z'|z) = \delta(z' - z) \int d\mathbf{v} \frac{f(\mathbf{v})}{|\nu_z|} \times \\ \times \left\{ \cos\left[\frac{\Delta}{\nu_z}(z + z_3)\right] + \cos\left[\frac{\Delta}{\nu_z}(z - z_3)\right] \right\}. \quad (24)$$

Здесь следует сделать важное замечание. В средах с диэлектрической проницаемостью $|\varepsilon - 1| \sim 1$ становится существенным отражение электромагнитных волн от границы раздела, что приводит к дополнительному вкладу в интенсивность излучения в веществе, тем самым увеличивается населенность верхнего уровня.

Мы рассмотрели случай чисто зеркальных отражений атомов от плоскости раздела $z = 0$. При этом задача может быть сведена к задаче о нахождении спектральной плотности во всем пространстве. В условиях, когда нельзя пренебрегать диффузными отражениями, необходимо использовать другие методы решения уравнений (18), (19) для области $z > 0$. При заданном D_{ik}^{-+} формулы (22), (23) полностью определяют зависимость спектральной плотности $N_2(z, \omega_p)$ возбужденных частиц от глубины z . Однако D_{ik}^{-+} в свою очередь зависит от $N_2(z, \omega_p)$, т.е. уравнение (22) по существу является интегральным уравнением для спектральной плотности. Следовательно, для замыкания системы уравнений необходимо решить уравнение для фотонной функции D_{ik}^{-+} .

3. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЫ И ИЗЛУЧЕНИЕ НАГРЕТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Итак, чтобы получить замкнутое уравнение для спектральной плотности возбужденных атомов N_2 , необходимо найти кинетическую фотонную функцию Грина D_{ik}^{-+} (см. (22)). Как следует непосредственно из определения, величина D_{ik}^{-+} представляет собой тензор второго ранга. Определение всех компонент этого тензора сводится к решению системы уравнений для D_{ik}^{-+} , получаемой из соответствующего уравнения Дайсона [13]. В общем случае решение этой системы сопряжено с очень громоздкими вычислениями и не может быть сведено к системе алгебраических уравнений, поскольку мы рассматриваем полубесконечную среду (и необходимо применять методы решения систем интегро-дифференциальных уравнений на полупрямой).

Только в пренебрежении пространственной дисперсией эта система существенно упрощается и допускает аналитическое решение.

В настоящей работе нас интересует случай, когда пространственная дисперсия существенна. Поэтому в методических целях мы не будем исследовать поляризационные свойства функции D_{ik}^{-+} , а ограничимся рассмотрением модельной задачи, положив

$$D_{ik}^{\alpha\beta} = D^{\alpha\beta} \delta_{ik}.$$

Предполагая скалярный вид фотонной функции D_{ik}^{-+} , будем рассматривать только одну компоненту поляризации излучения.

Для удобства представим D_{ik}^{-+} в виде суммы

$$D^{-+} = D_{sp}^{-+} + D_{in}^{-+},$$

где первое слагаемое соответствует спонтанным источникам фотонов, второе — падающим на среду из вакуума излучением. Исследуем сначала часть функции Грина, связанную с падающим излучением, D_{in}^{-+} . Уравнение Дайсона для этой функции запишется в форме (вектор \mathbf{q}_\perp направим вдоль оси y):

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - q_\perp^2 \right] D_{in}^{-+}(z, z') = 4\pi\hbar \int_0^\infty \Pi^R(z, z_2) \times D_{in}^{-+}(z_2, z') dz_2, \quad z, z' > 0, \quad (25)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - q_\perp^2 \right] \times D_{in}^{-+}(z, z') = 0, \quad z < 0, \quad z' > 0, \quad (26)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz'^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - q_\perp^2 \right] D_{in}^{-+}(z, z') = 4\pi\hbar \int_0^\infty D_{in}^{-+}(z, z_1) \times \Pi^A(z_1, z') dz_1, \quad z, z' > 0, \quad (27)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz'^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - q_\perp^2 \right] \times D_{in}^{-+}(z, z') = 0, \quad z > 0, \quad z' < 0. \quad (28)$$

Будем предполагать, что столкновения частиц с границей раздела являются чисто зеркальными. В этом

случае, используя четное продолжение на отрицательную полусось $z < 0$, получаем из уравнения (25)

$$D_{in}^{-+}(z, z') = \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} \times e^{ikz} \frac{2D_{in}^{\prime-+}(+0, z')}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega, k, q_\perp) - k^2 - q_\perp^2}. \quad (29)$$

Здесь штрих означает производную по первому аргументу (по z). Величина $\varepsilon(\omega, k, q_\perp)$ — диэлектрическая проницаемость среды — выражается через поляризационный оператор Π^R и равна

$$\varepsilon(\omega, k, q_\perp) = 1 - \frac{4\pi}{3\hbar} d^2 \left[\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2 \exp\left(-\frac{\omega - \omega_0}{T}\right) \right] \times \int d\mathbf{v} \frac{f(\mathbf{v})}{\Delta - kv_z - \mathbf{q}_\perp \mathbf{v}_\perp + i\gamma_2/2}. \quad (30)$$

Здесь \tilde{N}_1 и \tilde{N}_2 — эффективные населенности соответственно нижнего и верхнего состояний (см. (7), (8)). Вообще говоря, ε является функцией как частоты ω , так и волнового вектора фотона \mathbf{k} , описывая соответственно временную и пространственную дисперсии проницаемости. Как уже говорилось, при достаточно высоких плотностях атомов может выполняться следующее условие:

$$\gamma_2 = \gamma_{sp} + \gamma_{coll} > \Delta\omega_D,$$

где $\Delta\omega_D$ — доплеровская ширина, γ_{sp} — радиационная ширина линии, $\gamma_{coll} \sim N$ — столкновительная ширина линии (пропорциональная плотности уширяющих частиц). Для таких сред зависимость диэлектрической проницаемости от k и \mathbf{q}_\perp становится несущественной. В данной работе нас интересует случай достаточно разреженных сред, когда указанное условие не выполняется и пространственная дисперсия проницаемости оказывается существенной (применительно к атомам натрия это означает $N < 10^{17} \text{ см}^{-3}$).

Производная функции Грина $D_{in}^{\prime-+}$ может быть найдена из сшивки решений, получаемых в областях $z < 0$ и $z > 0$, на границе раздела $z = 0$. Для этого рассмотрим сначала случай $z < 0, z' > 0$. Из (26) находим

$$D_{in}^{-+}(z, z') = A \left(e^{ik_z^0 z} + r e^{-ik_z^0 z} \right) c(z'), \quad (31)$$

$$k_z^0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - q_\perp^2}.$$

Здесь A — амплитуда падающей волны, r — коэффициент отражения от границы, k_z^0 — проекция волнового вектора падающей волны на ось z (в случае нормального падения $k_z^0 = \omega/c$), $c(z')$ — некоторая функция z' , которую мы можем определить, рассматривая уравнение (27). Из условия непрерывности на границе напряженностей электрического и магнитного полей могут быть получены граничные условия для D_{in}^{-+} :

$$\begin{aligned} D_{in}^{-+}(+0, z') &= D_{in}^{-+}(-0, z'), \\ D'_{in}^{-+}(+0, z') &= D'_{in}^{-+}(-0, z'). \end{aligned} \quad (32)$$

Из (29), (31) с учетом граничных условий (32) находим

$$\begin{aligned} D_{in}^{-+}(z, z') &= 2ik_z^0 A(1-r)c(z') \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikz}}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega, k, q_{\perp}) - k^2 - q_{\perp}^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда видно, что функцию $D_{in}^{-+}(z, z')$ мы можем записать в виде произведения двух функций, зависящих только от одной из координат:

$$D_{in}^{-+}(z, z') = \varphi(z)c(z').$$

Для определения $c(z')$ обратимся к уравнению (27). Используя четное продолжение на отрицательную полуось $z' < 0$, мы можем получить следующее соотношение для функции $c(z')$:

$$c(z') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz'} \frac{2c'(+0)}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^*(\omega, k, q_{\perp}) - q_{\perp}^2 - k^2}. \quad (34)$$

При выводе (34) было использовано равенство $\Pi^A = (\Pi^R)^*$. Производная $c'(+0)$ может быть найдена из граничных условий (32). Действительно, из определения фотонной функции D_{in}^{-+} и из (31) получаем, что

$$c'(+0) = -A^* ik_z^0 (1-r^*).$$

Итак, подставляя (34) в (33), мы приходим к окончательному выражению для фотонной функции Грина $D_{in}^{-+}(z, z')$, соответствующей падающим на среду резонансным волнам:

$$\begin{aligned} D_{in}^{-+}(z, z') &= \frac{4|A|^2 (k_z^0)^2}{\pi^2 |1+\mu|^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dk d\xi \frac{\exp(ikz + i\xi z')}{\left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - q_{\perp}^2 - k^2 \right] \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^* - q_{\perp}^2 - \xi^2 \right]}, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\mu = \frac{1+r}{1-r} = \frac{ik_z^0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k^2 - q_{\perp}^2}. \quad (36)$$

Из (35) следует, что функция Грина D_{in}^{-+} пропорциональна квадрату амплитуды падающей на среду волны, т. е. входящему потоку. Необходимо отметить, что величина D_{in}^{-+} в свою очередь связана с потоком излучения (вектором Пойнтинга) в среде. В случае «прозрачной» среды (т. е. среды, в которой $\varepsilon' = \text{Re} \varepsilon \rightarrow 1$, $\varepsilon'' = \text{Im} \varepsilon \rightarrow 0$) компонента вектора Пойнтинга запишется как

$$\begin{aligned} S_z^{in} &= \frac{1}{4\pi} \text{Re} \int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{\pi} \frac{d\mathbf{q}_{\perp}}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial z} D_{in}^{-+}(z, z', \mathbf{q}_{\perp}, \omega) \Big|_{z'=z}. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь величина S_z^{in} определяет поток излучения на глубине z , связанный с падающими резонансными волнами. Таким образом, соотношение (35) фактически является обобщением известной формулы Френеля на случай среды с пространственной дисперсией проницаемости. Здесь необходимо сделать важное замечание. Как было показано в работе [14], в средах с пространственной дисперсией и границей необходимо учитывать тепловой перенос возмущений и отражение атомов от стенок. Эти эффекты приводят к тому, что нарушается локальная связь между интенсивностью электромагнитного излучения и населенностями атомных уровней на некоторой глубине z ; при этом, как было показано в [14], затухание электромагнитных волн в среде происходит не по экспоненциальному закону. Таким образом, перенос излучения в этом случае, вообще говоря, не может быть описан в терминах комплексного показателя преломления, поэтому необходимо обобщение существующей теории переноса.

В пренебрежении эффектами нелокальности для описания переноса излучения через среду становится возможным использовать комплексный показатель преломления. Действительно, пренебрегая пространственной дисперсией в (35), (36) и полагая $\mathbf{q}_{\perp} = 0$ (т. е. рассматривая нормальное падение), мы приходим к обычной формуле Френеля [15], связывающей интенсивности падающей, отраженной и прошедшей волн на границе сред:

$$D_{in}^{-+}(z, z') = 4|A|^2 \frac{|\mu|^2}{|1+\mu|^2} e^{i\bar{k}z - i\bar{k}z'},$$

где

$$\mu = \frac{k_z^0}{\bar{k}}, \quad \bar{k} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon} \approx \sqrt{\varepsilon'} \frac{\omega}{c} + \frac{i}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon''}{\sqrt{\varepsilon'}}.$$

Волновой вектор \bar{k} определяет распространение излучения в среде. В непоглощающих средах $\bar{k} = \omega n/c$ является вещественной величиной (здесь $n = n(\omega) = \sqrt{\varepsilon'}$ — показатель преломления среды). При этом величина $\mu = 1/\sqrt{\varepsilon'}$, т.е. обратно пропорциональна коэффициенту преломления. Для поглощающей среды волновой вектор \bar{k} становится комплексным. Мнимая часть \bar{k} , пропорциональная мнимой части диэлектрической проницаемости ε'' , отвечает за поглощение падающей волны атомами среды ($\varepsilon'' > 0$ при $\omega > 0$). В таком случае затухание поля в веществе происходит по экспоненциальному закону.

Итак, мы рассмотрели часть кинетической функции Грина D^{-+} , соответствующую падающему излучению. Теперь остановимся подробнее на функции Грина D_{sp}^{-+} , связанной со спонтанным испусканием фотонов атомами среды. Она может быть найдена из соответствующего уравнения Дайсона

$$D_{sp}^{-+}(z_3, z_1, \mathbf{q}_\perp, \omega) = - \int_0^\infty D^R(z_3, z_1, \mathbf{q}_\perp, \omega) \times \Pi^{-+}(z_1, z_2, \mathbf{q}_\perp, \omega) D^A(z_2, z_1, \mathbf{q}_\perp, \omega) dz_1 dz_2. \quad (38)$$

Здесь Π^{-+} — поляризационный оператор, описывающий взаимодействие фотонного поля с атомами, D^R и D^A — запаздывающая и опережающая фотонные функции Грина. Из определения запаздывающей и опережающей фотонных функций следует, что

$$D^A(z_2, z, \mathbf{q}_\perp, \omega) = D^{R*}(z, z_2, \mathbf{q}_\perp, \omega). \quad (39)$$

Следовательно, для того чтобы найти D_{sp}^{-+} , нам необходимо вычислить лишь запаздывающую функцию D^R , решив соответствующее уравнение Дайсона с поляризационным оператором Π^R :

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - q_\perp^2 \right] D^R(z, z') = 4\pi\hbar\delta(z - z') + 4\pi\hbar \int_0^\infty \Pi^R(z, z_2) D^R(z_2, z') dz_2. \quad (40)$$

Поступая так же, как и в случае с функцией D_{in}^{-+}

(т.е. используя четное продолжение на отрицательную полуось $z < 0$), из уравнения (40) находим

$$D^R(z, z') = \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} \times e^{ikz} \frac{2D'^R(+0, z') + 8\pi\hbar \cos(kz')}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k^2 - q_\perp^2}. \quad (41)$$

Производную $D'^R(+0, z')$ мы также можем получить из сшивки решений, полученных в областях $z < 0$ и $z > 0$, на границе раздела сред при $z = 0$. Принимая во внимание определение запаздывающей функции Грина D^R и кинетической функции Грина D^{-+} , из (31) имеем

$$D^R(z, z') = \left(e^{-ik_z^0 z} + r e^{ik_z^0 z} \right) s(z'), \quad (42)$$

$$z < 0, \quad z' > 0.$$

Аналогично функции $c(z')$ в (31) функция $s(z')$ может быть найдена из решения соответствующего уравнения Дайсона для переменной z' . Из (41), (42), (34) и граничных условий для D^R мы приходим к окончательному выражению для запаздывающей фотонной функции Грина:

$$D^R(z, z', q_\perp, \omega) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \Psi_{\omega qk}(z'), \quad (43)$$

$$\Psi_{\omega qk}(z') = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k^2 - q_\perp^2} \left\{ 8\pi\hbar \cos(kz') - \frac{4i\hbar k_z^0}{\mu} \int_{-\infty}^\infty dk' \frac{\cos(k'z')}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k'^2 - q_\perp^2} \right\}. \quad (44)$$

Отметим, что фигурирующие в формулах (34)–(36), (41), (44) интегралы по k не сводятся к вкладу вычетов подынтегральных выражений, так как $\varepsilon(\omega, k, q_\perp)$ имеет разрезы в k -плоскости. Именно с этим формально связан эффект селективного сужения отражения для доплеровски-уширенных линий [14].

Возвращаясь к уравнению (23), рассмотрим подробнее поляризационный оператор Π^{-+} , определяющий интенсивность спонтанных источников в среде. В случае резонанса вклад вершинных функций

в Π^{-+} становится несущественным и можно использовать однопетлевое приближение

$$\begin{aligned} \Pi^{-+}(z, z', \mathbf{q}_\perp, \omega > 0) &= i \frac{(j/c)^2}{3} \int \frac{d\omega_p d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^3} \times \\ &\times G_{11}^{+-}(z', z, \mathbf{k}_\perp - \mathbf{q}_\perp, \omega_p - \omega) \times \\ &\times G_{22}^{-+}(z, z', \mathbf{k}_\perp, \omega_p). \quad (45) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что поляризационный оператор Π^{-+} пропорционален плотности возбужденных частиц и содержит в себе описание эффектов нелокальности (в отсутствие нелокальности $\Pi^{-+} \propto \delta(z - z')$). При выводе (45) мы пренебрегли эффектами затухания, что справедливо в случае достаточно медленного изменения концентрации возбужденных частиц со временем.

Согласно (7), (8) функция Грина возбужденных частиц G_{22}^{-+} имеет вид

$$\begin{aligned} G_{22}^{-+}(z, \mathbf{k}_\perp, \omega) &= iN_2(z, k, \mathbf{k}_\perp, \varepsilon_p) = \\ &= i\tilde{N}_2(z, k, \mathbf{k}_\perp, \varepsilon_p)a_2(\varepsilon_p), \end{aligned}$$

где $\tilde{N}_2(z, k, \mathbf{k}_\perp, \varepsilon_p)$ — эффективная населенность возбужденного уровня (см. (8)). Мы предполагаем, что $\tilde{N}_2(z, k, \mathbf{k}_\perp, \varepsilon_p)$ слабо изменяется на расстояниях порядка тепловой длины волны де Бройля частицы, λ_T . Тогда из (7) получаем, что функция Грина возбужденных частиц G_{22}^{-+} может быть записана как

$$\begin{aligned} G_{22}^{-+}(z, z', \mathbf{k}_\perp, \omega) &= i\tilde{N}_2(z', \omega) \times \\ &\times \sum_k \frac{\gamma_2}{2\pi} \frac{\psi_k(z)\psi_k(z')}{\varepsilon_p^2 + \gamma_2^2/4} f(k, \mathbf{k}_\perp). \quad (46) \end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{N}_2(z', \omega) = \int \tilde{N}_2(z', k, \mathbf{k}_\perp, \omega) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$$

— интегральная плотность возбужденных частиц, $f(k, \mathbf{k}_\perp)$ — функция распределения атомов, находящихся в основном состоянии по квантовым числам k, \mathbf{k}_\perp . Подставляя (46) в (45) и пренебрегая уширением основного состояния атома (т.е. используя вместо функции Грина G_{11}^{+-} соответствующую функцию для невозмущенного атома), находим явный вид поляризационного оператора Π^{-+} :

$$\begin{aligned} \Pi^{-+}(z, z', \mathbf{q}_\perp, \omega) &= i \frac{(j/c)^2}{3} \times \\ &\times \int d\varepsilon_p a_2(\varepsilon_p) K(z, z') \tilde{N}_2(z') \exp\left(-\frac{\omega - \omega_0}{T}\right). \quad (47) \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{N}_2(z')$ — полная эффективная населенность верхнего уровня (см. (8)), множитель

$\exp(-(\omega - \omega_0)/T)$ необходим для обобщения теории на случай широких спектральных линий $\gamma_2 \gtrsim T$. Функция $K(z, z')$ имеет вид

$$\begin{aligned} K(z, z') &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{f(\mathbf{p})}{|\nu_z|} \times \\ &\times \left\{ \cos\left[\frac{\Delta}{\nu_z}(z + z')\right] + \cos\left[\frac{\Delta}{\nu_z}(z - z')\right] \right\}, \quad (48) \end{aligned}$$

где

$$f(\mathbf{p}) = \lambda_T^3 \exp\left(-\frac{E(\mathbf{p})}{T}\right)$$

— функция распределения атомов по квантовым числам \mathbf{p} . Ядро $K(z, z'|z_3)$, фигурирующее в правой части уравнения для спектральной плотности (22), в пренебрежении граничными эффектами переходит в $K(z, z')$ из (47). Итак, подставляя (47), (43), (39) в (38), получим явный вид фотонной функции Грина D_{sp}^{-+} , соответствующей спонтанным источникам фотонов в среде:

$$\begin{aligned} D_{sp}^{-+}(z, z') &= -i \frac{(j/c)^2}{3\hbar} \int_0^\infty dz_1 \tilde{N}_2(z_1) D^R(z, z_1) \times \\ &\times \Phi_{\omega q}(z', z_1) \exp\left(-\frac{\omega - \omega_0}{T}\right), \quad (49) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega q}(z', z_1) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{d\xi}{2\pi} \frac{\cos(\xi z')}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^* - q_\perp^2 - \xi^2} \times \\ &\times \left\{ 8\pi\hbar\varphi(\omega, \xi, q_\perp) \cos(\xi z_1) + \right. \\ &\left. + \frac{4i\hbar k_z^0}{\mu^*} \int_{-\infty}^\infty d\theta \frac{\varphi(\omega, \theta, q) \cos(\theta z_1)}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^* - q_\perp^2 - \theta^2} \right\}, \quad (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega, k, q_\perp) &= \int d\varepsilon_p a_2(\varepsilon_p) \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\hbar)^3} \lambda_T^3 \times \\ &\times \exp\left(-\frac{E(\mathbf{p})}{T}\right) \delta(k\nu_z - \Delta). \quad (51) \end{aligned}$$

Функция φ из (51) представляет собой фойгтовский контур линии, учитывающий как однородное уширение за счет спонтанного распада и столкновений с уширяющими частицами, так и неоднородное доплеровское уширение. Таким образом, нами были получены части фотонной кинетической функции Грина, соответствующие падающему потоку (см. (35))

и испущенным фотонам (см. (49)). Суммируя оба эти вклада, можно найти полный поток излучения в среде. Фактически найдено решение уравнения переноса резонансного излучения. При заданной спектральной плотности полученные результаты полностью описывают распространение резонансного излучения в веществе, а также спектральную интенсивность излучения нагретой полубесконечной среды. Изучим подробнее задачу об излучении нагретого полупространства в случае, когда среда находится в термодинамическом равновесии. При этом эффективные населенности \tilde{N}_2 и \tilde{N}_1 не зависят от координат и удовлетворяют соотношениям Больцмана. Кроме того, выполняется соотношение

$$n(\omega) = \frac{\tilde{N}_2 \exp\left(-\frac{\omega - \omega_0}{T}\right)}{\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2 \exp\left(-\frac{\omega - \omega_0}{T}\right)} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega}{T}\right) - 1}, \quad (52)$$

где $n(\omega)$ — планковские (равновесные) числа заполнения фотонов. Подставляя (43) в (49) и принимая во внимание (52), получим выражение для спектрального вектора Пойнтинга на границе для равновесной среды:

$$S_{z\omega} \Big|_{z=0} = -\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} n(\omega) \times \int_0^1 dx x(1-R), \quad R = \frac{(\text{Im } \mu)^2}{|\mu|^2}. \quad (53)$$

Соотношение (53) определяет спектральное распределение интенсивности излучения, испускаемого нагретым полупространством, и фактически представляет собой закон Кирхгофа, отражающий баланс энергий на границе раздела двух сред. Величина R обозначает энергетический коэффициент отражения электромагнитных волн от границы раздела. Первое слагаемое в (53) описывает поток излучения, падающий на границу из среды, второе соответствует фотонам, отраженным от границы. Как следует из (53), отражение волн от границы становится существенным для достаточно плотных сред, т. е. сред с показателем преломления заметно отличным от единицы ($|\varepsilon' - 1| \sim 1$).

Полагая $R = 0$, из (53) получим половину планковского потока. Это связано с тем, что нами было рассмотрено только одно из двух возможных направлений поляризации электромагнитного поля.

4. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ БИБЕРМАНА–ХОЛСТЕЙНА

Как уже было сказано, задача о распространении падающего излучения в среде и задача об излучении нагретого полупространства сводятся к нахождению спектральной плотности возбужденных атомов. Покажем, что спектральная плотность удовлетворяет интегральному уравнению (уравнению Бибермана–Холстейна). Для этого рассмотрим случай, когда падающее излучение отсутствует, положив $D_{in}^{-+} = 0$. В таком случае поток излучения в среде будет вызван только спонтанными источниками, т. е. $D^{-+} = D_{sp}^{-+}$.

Для простоты будет предполагаться случай узких спектральных линий. Тогда эффективные населенности \tilde{N}_i совпадают с истинными населенностями атомных состояний. Подставляя (49) в (22), мы получим интегральное уравнение для $N_2(z)$, полной концентрации возбужденных частиц на глубине z :

$$N_2(z) = Q(z) + \frac{2N_1}{3\hbar} \left(\frac{j}{c}\right)^4 \times \text{Re} \int_0^\infty d\omega \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dz_1 \bar{K}_{\omega q}(z, z_1) N_2(z_1), \quad (54)$$

$$\bar{K}_{\omega q}(z, z_1) = \int_{-\infty}^\infty dz' \int_0^\infty dz_3 \times D_{\omega q}^R(z_3, z_1) \Phi_{\omega q}(z_1, z') K_{\omega q}(z_3, z'|z). \quad (55)$$

Здесь мы ввели величину $Q(z)$, характеризующую скорость некогерентной накачки на возбужденный уровень за счет рекомбинации или неупругих столкновений. Кроме того, присутствие границы приводит к появлению дополнительного вклада в концентрацию возбужденных частиц за счет атомных частиц, отраженных от границы среды, а также за счет эффективного увеличения интенсивности поля в среде при учете отраженных от границы электромагнитных волн. Функция $K_{\omega q}(z_3, z'|z)$ определяется выражением (23).

Уравнение (54) описывает нелокальный перенос излучения в среде за счет резонансного излучения и фактически является обобщением известного уравнения Бибермана–Холстейна, учитывающим пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости и наличие границы. Решение этого уравнения позволяет нам найти точное решение задачи о переносе резонансных волн через среду. В дальнейшем мы покажем, что в пренебрежении простран-

ственной дисперсией и граничными эффектами полученный результат переходит в уравнение Бибермана.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда возбужденный уровень является короткоживущим, а скорости частиц не слишком высоки. Тогда везде, кроме узкой области около границы шириной порядка тепловой де-бройлевской длины волны, ядро $K(z, z_1|z')$ заметно упрощается и принимает вид (24). В таком случае соответствующее выражение для полного ядра $\bar{K}(z, z')$ (см. (55)) может быть записано как

$$\bar{K}(z, z_1) = \left\{ A(z - z_1) - \frac{1}{2} A(z) \frac{B(z_1)}{B(0)} \right\} \times \left\{ A^*(z_1 - z) - \frac{1}{2} A^*(z_1) \frac{B^*(z)}{B^*(0)} \right\}, \quad (56)$$

где

$$A(z) = 8\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k^2 - q_{\perp}^2} \varphi(\omega, k, q_{\perp}) \cos(kz), \quad (57)$$

$$B(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k^2 - q_{\perp}^2} \cos(kz),$$

а величины ε, φ определяются соответственно соотношениями (30), (51).

В случае, когда пространственная дисперсия незначительна (например, при достаточно высоких плотностях атомов), можно пренебречь зависимостью диэлектрической проницаемости от волнового вектора (с той же точностью мы можем считать функцию φ зависящей только от частоты). При этом, учитывая (56), (57), интегральное уравнение (54) записывается как

$$N_2(z) = Q_2(z) + \text{const} \int_0^{\infty} d\omega a_2^2(\omega) \int_0^{\infty} dz_1 N_2(z_1) \times \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} \left\{ \exp(-k_{\omega} t |z - z_1|) + \frac{1}{4} \exp[-k_{\omega} t (z + z_1)] - \text{Re} \exp \left[-i \frac{\omega \sqrt{\varepsilon'}}{tc} (|z + z_1| - |z - z_1|) - \frac{k_{\omega} t}{2} (|z + z_1| + |z - z_1|) \right] \right\}. \quad (58)$$

Здесь $a_2(\omega)$ — контур спектральной линии,

$$k_{\omega} = \frac{\omega \varepsilon''}{c \sqrt{\varepsilon'}}$$

— коэффициент поглощения резонансного излучения на частоте ω .

Первое слагаемое в фигурных скобках из (58) соответствует классическому выражению для ядра в теории Бибермана–Холстейна. Оно определяет поглощение резонансного фотона, испущенного возбужденным атомом в точке z_1 .

При выводе (58) мы пренебрегли тепловым переносом возбуждений. Следовательно, два последних слагаемых определяют влияние границы среды на концентрацию возбужденных атомов. Второе слагаемое в фигурных скобках описывает дополнительный вклад в населенность возбужденного уровня за счет волн, отраженных от поверхности среды. Из (58) видно, что на глубине z эти волны ослаблены пропорционально фактору $\exp(-k_{\omega} tz)$. Соответственно, третье слагаемое характеризует интерференцию отраженных от границы резонансных волн и волн, испускаемых возбужденными атомами в точке z_1 . Важно отметить, что, пренебрегая влиянием границы на концентрацию возбужденных частиц, из уравнения (58) получаем непосредственно уравнение Бибермана–Холстейна:

$$N_2(z) = Q_2(z) + \text{const} \int_0^{\infty} d\omega a_2^2(\omega) \times \int_0^{\infty} dz_1 N_2(z_1) \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} \exp(-k_{\omega} t |z - z_1|). \quad (59)$$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Для иллюстрации приведенной выше теории были проведены численные расчеты на примере резонансной линии атома натрия: переход $3S_{1/2} - 3P_{3/2}$ ($\lambda = 5889.95 \text{ \AA}$). Вероятность спонтанного излучения для этой линии составляет (см., например, [16]) $A = 6.25 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$. Столкновительная ширина в рассматриваемом случае связана с резонансным механизмом передачи возбуждения и равна $\gamma_{coll} = 4.78 \cdot 10^{-7} N$, где $N[\text{см}^{-3}]$ — концентрация атомов натрия, а величина γ_{coll} выражена в с^{-1} . Зависимость концентрации N паров натрия от температуры определялась по данным работы [17]. Столкновительная ширина превышает радиационную, начиная с концентраций $N \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$ (при температурах $T > 550 \text{ К}$). Полная однородная ширина, связанная с радиационным распадом и столкновениями, превышает неоднородную доплеровскую, начиная с температур $T \approx 750 \text{ К}$.

Ранее нами был получен явный вид интегрального уравнения для концентрации возбужденных частиц:

$$N_2(z) = Q(z) + \text{const} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\omega \times \\ \times \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dz_1 \bar{K}_{\omega q}(z, z_1) N_2(z_1).$$

В общем случае ядро уравнения $\bar{K}(z, z_1)$ определяется соотношением (55). Здесь мы ограничимся рассмотрением более простого ядра, когда $\bar{K}(z, z_1)$ определяется соотношениями (56), (57). Таким образом, мы будем пренебрегать вкладом отраженных от границы среды частиц в населенность верхнего уровня на глубинах, больших тепловой де-бройлевской длины волны.

Исследуем спектральную зависимость полного ядра $\bar{K}(z, z_1)$ (для простоты положим $\mathbf{q}_\perp = 0$), имеющего следующий вид:

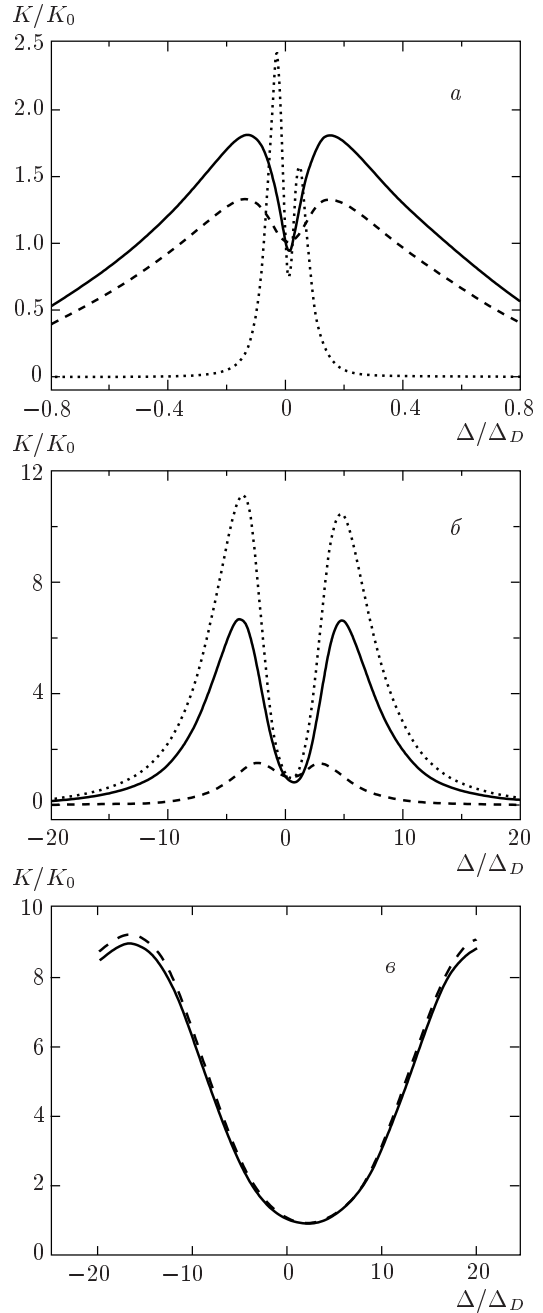
$$\bar{K}(z, z_1) = \left\{ A(z - z_1) - \frac{1}{2} A(z) \frac{B(z_1)}{B(0)} \right\} \times \\ \times \left\{ A^*(z_1 - z) - \frac{1}{2} A^*(z_1) \frac{B^*(z)}{B^*(0)} \right\}, \quad (60)$$

где A, B определяются выражениями (57) с $\mathbf{q}_\perp = 0$. Рассмотрим также, как изменяется спектральный состав ядра при учете пространственной дисперсии. Для этого следует провести сравнение результатов, полученных из приведенной выше теории, и результатов, получаемых из теории Бибермана-Холстейна.

Будем считать, что плотность возбужденных частиц мала, $N_2 \ll N_1 \sim N$ (N — полное число частиц). В этом случае выражение для диэлектрической проницаемости резонансной среды запишется как (предполагается, что линии достаточно узкие по сравнению с температурой уширяющих частиц, так что эффективные населенности совпадают с полными населенностями уровней атома)

$$\varepsilon(\omega, k, q_\perp) = 1 - \frac{4\pi}{3\hbar} d^2 N \times \\ \times \int d\mathbf{v} \frac{f(\mathbf{v})}{\Delta - kv_z - \mathbf{q}_\perp \mathbf{v}_\perp + i\gamma_2/2}.$$

В качестве функции распределения атомов по скоростям $f(\mathbf{v})$ наиболее естественно выбрать функцию распределения Максвелла.



Зависимость ядра интегрального уравнения $\bar{K}_\omega(z, z')$ от величины отстройки частоты от резонанса, $\Delta = \omega - \omega_0$, при значениях глубин $z = 0$, $z' = 10\lambda$. Сплошная кривая — расчет с учетом пространственной дисперсии и влияния границ по формуле (60), штриховая линия — расчет по формуле Бибермана (59) с учетом пространственной дисперсии, пунктирная линия — расчет по формуле Бибермана (59) без учета пространственной дисперсии. Каждая кривая нормирована на соответствующую величину K_0 (значение ядра \bar{K}_ω при $\omega = \omega_0$); по оси абсцисс — отношение отстройки частоты к доплеровской ширине $\Delta_D = \omega_0 v_T / c$; $T = 600$ (а), 800 (б), 900 (в) К

На рисунке представлены спектральные зависимости функции \bar{K}_ω , полученные для различных температур (величина K_0 — соответствующее значение в центре линии). Рассматриваются температуры $T = 600, 800, 900$ К, при которых величина g (отношение однородной ширины к доплеровской ширине $\omega_0\nu_T/c$) принимает значения соответственно $g = 0.06, 5.37, 23.8$.

Необходимо отметить, что наиболее интересен случай, когда расстояние между излучающим и поглощающим атомами становится больше или порядка длины свободного пробега резонансного фотона (это возможно в случае оптически плотных сред). Для этого рассмотрим случай $z = 0, z' = 10\lambda$ ($\lambda = 2\pi c/\omega_0$ — длина волны резонансного фотона). Как следует из рисунка, основной вклад в данном случае дают хвосты линии, т. е. большие отстройки $\Delta \gg \gamma$ (при очень больших отстройках асимптотика переходит в лоренцевскую). Это отражает тот факт, что в оптически плотных средах основная доля энергии переносится в крыльях линии, а переносом энергии в центре линии можно пренебречь (эффект пленения резонансного излучения).

При достаточно низких температурах ($T = 600$ К) доплеровская ширина намного превышает однородную. В этом случае основной вклад в уширение спектральных линий дает доплеровское уширение, следовательно, необходимо учитывать пространственную дисперсию проницаемости. На рис. *a* представлена спектральная зависимость ядра \bar{K}_ω при температуре $T = 600$ К ($g = 0.06$). Из рисунка видно, что в пренебрежении тепловым движением атомов кривая Бибермана имеет характерный вид дублета с минимумом в центре линии. Ширина пиков и провала в центре линии определяется однородной шириной при данной температуре. Учет пространственной дисперсии в ядре Бибермана приводит к тому, что эта зависимость перестает быть столь резкой за счет доплеровского «размытия» пиков. При этом ширина пиков становится порядка доплеровской ширины. Из результатов, полученных из приведенной выше теории (сплошная кривая), следует, что учет границы приводит к «сужению» доплеровски-уширенной кривой. При этом контур линии содержит дополнительный вклад шириной порядка однородной (как видно из рисунка, ширина провала в центре порядка однородной ширины). Как было показано в работе [14], этот вклад обусловлен пространственной дисперсией проницаемости (вызванной тепловым движением атомов) и существует при $g \lesssim 1$. Математически это означает, что вследствие пространственной дисперсии подын-

тегральное выражение в (56), (57) помимо полюсов имеет также линии разрыва, которые необходимо учитывать при интегрировании в комплексной плоскости k . Согласно работе [14], именно интегралы вдоль линий разрыва дают узкий дополнительный вклад в спектральную зависимость ядра. Таким образом, интегралы (56), (57), вообще говоря, не могут быть сведены просто к вычетам подынтегральной функции. Отметим также, что результаты, получаемые из приведенной выше теории и теории Бибермана, начинают совпадать лишь в очень далеких крыльях спектральной линии. При больших отстройках $\Delta \gg \max(\Delta_D, \gamma)$ выполняется $\varepsilon' \rightarrow 1, \varepsilon'' \rightarrow 0$, т. е. диэлектрические свойства среды при больших отстройках становятся несущественными, и результаты, получаемые с учетом и без учета дисперсии, совпадают.

При повышении температуры за счет роста частоты уширяющих соударений увеличивается однородная ширина линии. При температуре $T = 800$ К однородная ширина имеет ширину порядка доплеровской и следует учитывать пространственную дисперсию. На рис. *b* представлена спектральная зависимость ядра \bar{K}_ω при температуре $T = 800$ К ($g = 5.37$). Как и в случае с $T = 600$ К, из приведенной кривой следует, что учет границ и пространственной дисперсии приводит к «сужению» доплеровски-уширенного контура. При этом из рисунка видно, что ширина провала в центре линии определяется однородной шириной (при данной температуре).

На рис. *в* представлены зависимости \bar{K}_ω , полученные при температуре $T = 900$ К. Как видно из рисунка, результаты, получаемые из настоящей теории и теории Бибермана–Холстейна, практически совпадают во всей области значений отстроек Δ . Действительно, при высоких температурах ($T = 900$ К) однородная ширина намного превышает доплеровскую и пространственной дисперсией проницаемости можно пренебречь. Следовательно, результаты, получаемые из данной теории и теории Бибермана–Холстейна, должны совпадать. Это подтверждается приведенными зависимостями.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены интегральные уравнения для концентрации возбужденных атомов, обобщающие известные уравнения Бибермана–Холстейна на случай, учитывающий пространственную дисперсию и роль границ среды. На примере полупростран-

ства показано, что ядро интегрального уравнения определяется запаздывающими и опережающими функциями Грина для фотонов, учитывающими диэлектрические свойства резонансной среды и отражение излучения от границы полупространства. Проведены численные расчеты спектральной части ядра интегрального уравнения для концентрации возбужденных частиц для различных температур на примере паров натрия с учетом указанных выше эффектов. Показано, что в области температур $T \lesssim 800$ К эффекты типа сужения доплеровских контуров при отражении от границы раздела сред заметно влияют на зависимость спектральной части ядра, отличающегося от соответствующего выражения в классическом уравнении Бибермана–Холстейна.

Авторы благодарят Ю. К. Земцова за помощь при проведении численных расчетов. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 99-0218176) и гранта поддержки научных школ (00-15-96539).

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Михалас, *Звездные атмосферы*, Мир, Москва (1982), т. 1, 2.
2. В. В. Соболев, *Курс теоретической астрофизики*, Наука, Москва (1985).
3. В. В. Иванов, *Перенос излучения и спектры небесных тел*, Наука, Москва (1969).
4. Л. А. Вайнштейн, И. И. Собоelman, В. А. Юков, *Возбуждение атомов и уширение спектральных линий*, Наука, Москва (1979).
5. И. И. Собоelman, *Введение в теорию атомных спектров*, Наука, Москва (1973).
6. Ю. К. Земцов, А. Ю. Сечин, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **110**, 1654 (1996).
7. Л. М. Биберман, *ЖЭТФ* **17**, 416 (1947).
8. T. Holstein, *Phys. Rev.* **72**, 1212 (1947).
9. R. W. Wood, *Phil. Mag.* **18**, 187 (1909).
10. Б. А. Векленко, Г. Б. Ткачук, *Опт. и спектр.* **38**, 1132 (1975).
11. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1515 (1964).
12. Ю. К. Земцов, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **103**, 345 (1993).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Физическая кинетика*, Гостехиздат, Москва (1957).
14. M. F. H. Schuurmans, *J. de Phys.* **37**, 469 (1976).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат, Москва (1957).
16. А. А. Радциг, Б. М. Смирнов, *Справочник по атомной и молекулярной физике*, Атомиздат, Москва (1980).
17. Ан. Н. Несмеянов, *Давление пара химических элементов*, Изд-во АН СССР, Москва (1961).