ЖЭТФ, 2002, том 121, вып. 1, стр. 235–238

ОБ n-КВАНТОВЫХ ВИХРЯХ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

В. И. Марченко*[*], *Е. Р. Подоляк

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 июня 2001 г.

Отмечено, что при учете следующих членов разложения свободной энергии в теории Гинзбурга–Ландау в окрестности точки $\kappa = 1/\sqrt{2}$ возможны как обычно предполагаемая картина — переход от смешанного состояния к промежуточному, так и цепочка последовательных переходов от одноквантовых вихрей n-квантовым вихрям (где $n = 2, 3$).

PACS: 74.60.Ec, 74.20.De, 74.55.+h, 74.60.-w

Переход от сверхпроводников первого рода к сверхпроводникам второго рода происходит при критическом значении параметра Гинзбурга–Ландау $\kappa = 1/\sqrt{2}$ [1]. При наличии магнитного потока этот переход является, очевидно, переходом первого рода, так как промежуточное состояние не может непрерывно перейти в абрикосовскую вихревую решетку. В обычно используемом приближении, однако, имеется случайное вырождение — и промежуточное состояние, и решетка вихрей теряют устойчивость в точке перехода. С одной стороны, поверхностная энергия NS-границ обращается в нуль [1], с другой, в точке перехода отталкивание вихрей меняется на притяжение [2]. Более того, как показал Крамер [2], при $\kappa = 1/\sqrt{2}$ энергия n-квантового вихря равна $\varepsilon_n = n$ (пользуемся естественными в теории Гинзбурга–Ландау [1] единицами), т. е. на каждый квант потока приходится та же доля энергии, что и в нормальном состоянии в критическом поле. Это вырождение более известно специалистам по работе Богомольного [3].

Поскольку нет никаких физических причин для этого вырождения, то учет следующих членов разложения по степеням параметра порядка Ψ и по градиентам должен его снять. В изотропном случае имеются четыре таких инварианта одного порядка по близости к температуре перехода:

$$\Psi\Psi^* \left(-i\sqrt{2}\nabla+\kappa\mathbf{A}\right) \Psi \left(i\sqrt{2}\nabla+\kappa\mathbf{A}\right) \Psi^*,$$

$$\nabla(\Psi\Psi^*)\nabla(\Psi\Psi^*),$$

$$\left(-i\sqrt{2}\nabla + \kappa\mathbf{A}\right)^2 \Psi \left(i\sqrt{2}\nabla + \kappa\mathbf{A}\right)^2 \Psi^*, \quad (\Psi\Psi^*)^3.$$

Поскольку мы хотим обратить внимание на принципиальную возможность существенного изменения картины перехода, учтем лишь простейшую поправку $|\Psi|^6$. В результате функционал Гинзбурга–Ландау примет вид

$$F = a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + c|\Psi|^6 + + g\left|\nabla\Psi - i\frac{2e}{c\hbar}\mathbf{A}\Psi\right|^2 + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{BH_0}{4\pi}, \quad (1)$$

где H_0 — внешнее поле и $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. В равновесном состоянии без магнитного поля этот функционал достигает минимума при $|\Psi|^2 = |\Psi_0|^2$:

$$|\Psi_0|^2 = -\frac{a}{b}\left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right), \quad (2)$$

где параметр $\gamma = -2ac/b^2$ (отметим, что в точке фазового перехода $a = 0$ параметр γ обращается в нуль). Этот выигрыш в энергии обращается в нуль в критическом поле H_c:

$$H_c^2 = 4\pi\frac{a^2}{b}(1-\gamma). \quad (3)$$

Отношение корреляционной длины ξ и глубины проникновения δ:

$$\xi^2 = 4\pi\frac{|\Psi_0|^2 g}{H_c^2}, \quad \delta^2 = \frac{\hbar^2 c^2}{32\pi e^2}\,\frac{1}{|\Psi_0|^2 g}, \quad (4)$$

определяет параметр Гинзбурга–Ландау κ:

$$\kappa = \frac{\hbar c}{8\pi\sqrt{2}|e|}\,\frac{H_c}{|\Psi_0|^2 g} = \kappa_0(1+\gamma). \quad (5)$$

[*] E-mail: mar@kapitza.ras.ru

Введем безразмерные переменные

$$r = \frac{R}{\delta}, \quad \psi = \frac{\Psi}{\Psi_0}, \quad b = \frac{B}{H_c},$$
$$h_0 = \frac{H_0}{H_c}, \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{H_c}, \quad f = \frac{F}{H_c^2\delta^2}. \qquad (6)$$

Функционал (1) тогда принимает следующий вид:

$$f = \frac{1}{8\pi}\left\{b^2 + \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{\kappa}\nabla - i\mathbf{a}\right)\psi\right|^2 + \right.$$
$$\left. + (1-|\psi|^2)^2(1+\gamma|\psi|^2) - 1 - 2bh_0\right\}. \qquad (7)$$

Мы не будем рассматривать процессы проникновения поля в сверхпроводник, поэтому магнитный поток будем считать постоянным и, соответственно, опустим член $2bh_0$. Кроме того, будем считать параметр κ независимым, поскольку в реальных сверхпроводниках его изменение не исчерпывается выражением (5).

Рассмотрим уединенный n-квантовый вихрь. Выбираем калибровку так, чтобы фаза параметра порядка была равна $n\phi$, где ϕ — азимутальный угол, а вектор-потенциал имел лишь азимутальную составляющую $a(r)$. Тогда энергия аксиально-симметричного вихря в цилиндрической системе координат сводится к следующему выражению:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{4}\int_0^\infty \left[\left(a' + \frac{a}{r}\right)^2 + \frac{2}{\kappa^2}(\psi_n')^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\sqrt{2}n}{\kappa r} - a\right)^2 \psi_n^2 + \left(1-\psi_n^2\right)^2\left(1+\gamma\psi_n^2\right)\right] r dr, \qquad (8)$$

здесь $\psi_n(r)$ — модуль параметра порядка. Минимуму энергии соответствуют уравнения Гинзбурга–Ландау с граничными условиями $\psi_n(0) = 0$, $r\psi_n'|_{r=0} = 0$, $a(0) = 0$, $\psi_n(\infty) = 1$. Решение этой задачи было проведено нами численно при произвольных κ и при значениях γ от -0.1 до 0.1. Результат для доли энергии n-квантового вихря, приходящейся на квант потока при $\gamma = -0.1$, представлен на рис. 1.

При $\gamma > 0$ получается обычно предполагаемая картина перехода от сверхпроводников второго рода с одноквантовыми вихрями к сверхпроводникам первого рода, в которые магнитный поток проникает в виде макроскопических нормальных областей. При $\gamma < 0$ по мере уменьшения κ в окрестности

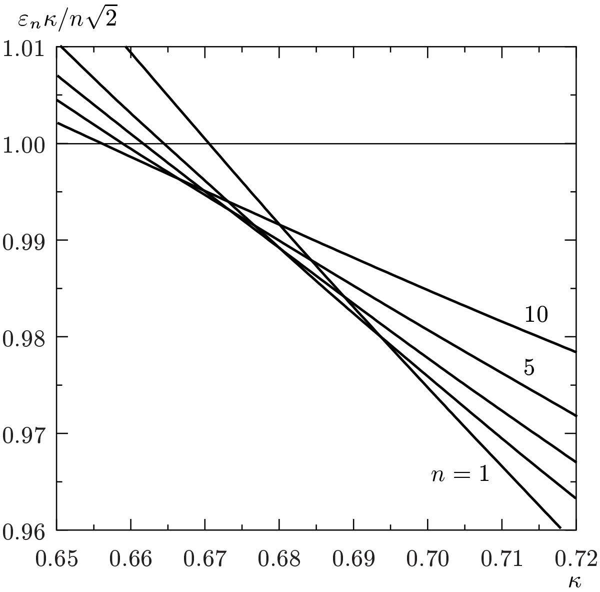

Рис. 1. Доля $\varepsilon_n\kappa/n\sqrt{2}$ энергии n-квантового вихря, приходящаяся на квант потока, при $\gamma = -0.1$

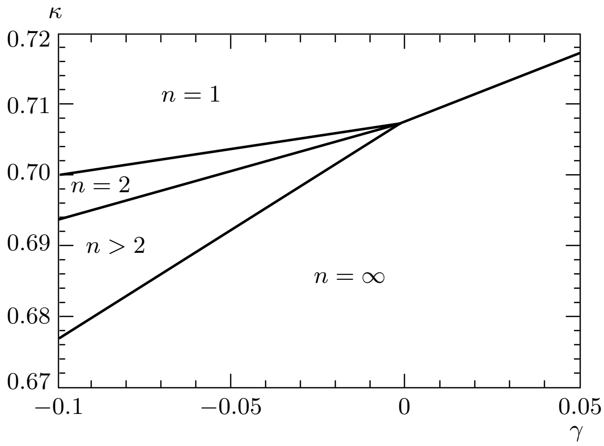

Рис. 2. Области, в которых минимуму энергии соответствуют вихри, с различными значениями параметра n

(ширина которой, очевидно, пропорциональна величине γ) критического значения $1/\sqrt{2}$ должны наблюдаться последовательные переходы от одноквантовых к n-квантовым вихрям (где $n = 2, 3, \ldots$) (рис. 2). Цепочка этих переходов сгущается (значение n неограниченно возрастает) к некоторому критическому значению $\kappa^* = \kappa^*(\gamma)$. При $\kappa = \kappa^*$ поверхностная энергия NS-границы меняет знак. Действительно, при больших n вихрь представляет собой макроскопический цилиндр в нормальном состоянии с магнитным полем практически равным критическому. Объемный вклад в энергию вихря при делении на n сводится к не зависящему от n значению (доля энергии нормального состояния на квант потока). Зависимость от n возникает при учете энергии σ_{NS} границы раздела между нормальным и сверхпроводящим состояниями — при этом в функции ε_n/n появляется капиллярная поправка, пропорциональная $\sigma_{NS}/\sqrt{n}$. Таким образом, только в точке обращения в нуль σ_{NS} и может происходить сгущение переходов.

Как показано в [4], при $\kappa\sqrt{2}-1 < -\gamma/2$ вихри, расположенные на больших расстояниях, притягиваются. Поэтому в интересующей нас области параметров ($\kappa < 1/\sqrt{2}$, $\gamma < 0$) необходимым условием существования n-квантового вихря является его устойчивость по отношению к распаду на связанное состояние из нескольких вихрей, несущих такой же суммарный поток. Для анализа устойчивости вихрей воспользуемся теорией возмущений. Уравнения Гинзбурга–Ландау для вырожденных невозмущенных решений (при $\kappa = 1/\sqrt{2}$, $\gamma = 0$) можно заменить уравнениями Богомольного

$$\nabla^2 \ln|\psi| = -\frac{1}{2}(1-|\psi|^2) + 2\pi \sum_i n_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i), \qquad (9)$$

$$b = 1 - |\psi|^2, \qquad (10)$$

а потенциал для теории возмущений представить в виде

$$\delta f = \frac{1}{8\pi}|\psi|^2(1-|\psi|^2)\left\{\gamma(1-|\psi|^2) - 2\alpha\sqrt{2}\right\}, \qquad (11)$$

где $\alpha = \kappa - 1/\sqrt{2}$. Невозмущенное решение в виде аксиально-симметричного n-квантового вихря описывается выражением $\psi(\mathbf{r}) = v_n(r)e^{in\phi}$, и амплитуда параметра порядка $v_n(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \ln v_n = -\frac{1}{2}(1-v_n^2) \qquad (12)$$

с асимптотикой $v_n(r) \propto r^n$ при $r \to 0$ и $v_n(r) \to 1$ при $r \to \infty$.

Энергию уединенного n-квантового вихря, приходящуюся на один квант потока, можно записать в виде

$$\frac{\varepsilon}{n} = 1 + \frac{1}{4}\left\{\gamma Q_n - 2\alpha\sqrt{2}P_n\right\}, \qquad (13)$$

где величины

$$Q_n = n^{-1}\int r dr\, v_n^2(1-v_n^2)^2$$

и

$$P_n = n^{-1}\int r dr\, v_N^2(1-v_N^2)$$

получаются численным интегрированием решений (12). Условие того, что $(n+1)$-квантовые вихри становятся более выгодными, чем n-квантовые, следующее:

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{Q_n - Q_{n+1}}{2\sqrt{2}(P_n - P_{n+1})}, \quad \gamma < 0. \qquad (14)$$

Этот вывод соответствует результатам прямого численного счета (рис. 1), а также результатам работы [4], полученным для $n = 1$, свидетельствующим о том, что двухквантовые вихри становятся более выгодными, чем одноквантовые, при $\alpha/\gamma > 0.034$, $\gamma < 0$. При достижении нижнего критического поля $H_0 = H_{c1}$ магнитный поток проникает в сверхпроводник в виде наиболее выгодных n-квантовых вихрей. Двухквантовые вихри являются наиболее выгодными при $0.034 < \alpha/\gamma < 0.066$. Трехквантовые вихри являются наиболее выгодными при $0.066 < \alpha/\gamma < 0.081$ и т. д. В пределе $n \to \infty$ из соотношения (14) можно получить также условие обращения в нуль энергии NS-границы: $\alpha/\gamma = 0.155$. Отметим здесь, что уединенные вихри и даже вихревые решетки можно наблюдать как метастабильные состояния и при положительной энергии NS-границы, т. е. в обычных сверхпроводниках первого рода.

Уединенный наиболее выгодный n-квантовый вихрь может распадаться на связанные одноквантовые (или вообще на иные комбинации m-квантовых вихрей с сохранением общего потока). Для изучения устойчивости n-квантового вихря к распаду рассмотрим возмущенное решение как совокупность вихрей с координатами $|\mathbf{r}_i| \ll 1$. При этом параметр порядка можно разложить в ряд по $\mathbf{r}_i$ и удержать квадратичные члены [4]:

$$|\psi(\mathbf{r})| = v_n(r) + \frac{1}{2n}\sum_i (\mathbf{r}_i, \nabla)^2 v_n(r). \qquad (15)$$

Подставляя это выражение в потенциал (11) и интегрируя, получим

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{16n}\sum_i |\mathbf{r}_i|^2 \left\{\gamma \int r dr\, v_n^2(1-v_n^2)^2(3v_n^2-1) - \right.$$
$$\left. - 2\alpha\sqrt{2}\int r dr\, v_n^2(1-v_n^2)(2v_n^2-1)\right\}. \qquad (16)$$

Отсюда следует условие устойчивости n-квантового вихря в виде

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\int r\, dr\, v_n^2(1-v_n^2)^2(3v_n^2-1)}{\int r\, dr\, v_n^2(1-v_n^2)(2v_n^2-1)}, \quad \gamma < 0. \qquad (17)$$

Двухквантовый вихрь оказывается устойчивым по отношению к распаду на два одноквантовых вихря при $\alpha/\gamma > 0.14$.

Таким образом, мы не согласны с утверждением, что устойчивыми бывают только структуры из одноквантовых вихрей. Этот вывод работы [4] мы считаем ошибочным, поскольку при анализе энергии взаимодействия вихрей на малых расстояниях там не были учтены члены пропорциональные $|\psi|^2$.

Расчет коэффициента при $|\psi|^6$ в теории Гинзбурга–Ландау для стандартной модели БКШ [5] показал, что знак этого коэффициента отрицателен. Это, согласно полученным нами результатам, благоприятствует возможности наблюдения n-квантовых вихрей. Кандидатами для наблюдения n-квантовых вихрей являются сверхпроводники, в которых образуется вихревая решетка с притяжением. Существование притяжения проявляется в конечном скачке намагниченности в поле $H_0 = H_{c1}$. Если при изменении температуры поведение сверхпроводника меняется так, что в поле $H_0 = H_c$ его намагниченность скачком обращается в нуль, что присуще сверхпроводникам первого рода, то вблизи этого перехода возможно наблюдение n-квантовых вихрей.

Авторы благодарят М. Ю. Кагана и И. А. Фомина за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 00-02-16250).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, часть 2, Наука, Москва (1978).

2. L. Kramer, Phys. Rev. B **3**, 3821 (1971).

3. Е. Б. Богомольный, ЯФ **24**, 861 (1976).

4. I. Luk'yanchuk, Phys. Rev. B **63**, 174504 (2001).

5. Ю. А. Овчинников, ЖЭТФ **115**, 726 (1999).