ЖЭТФ, 2002, том 121, вып. 2, стр. 299–307

УСКОРЕННАЯ СУПЕРДИФФУЗИЯ И КОНЕЧНАЯ СКОРОСТЬ ПОЛЕТОВ ЛЕВИ

В. Ю. Забурдаев, К. В. Чукбар [*]

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 августа 2001 г.

Выводится уравнение в дробных производных, описывающее процесс «переключения» стохастического переноса с быстрого расплывания $\overline{x} \propto t^{\alpha}$, $\alpha > 1$, на псевдоволновой режим $\alpha = 1$ за счет конечности скорости движения отдельных частиц. Обсуждаются качественные особенности нового режима.

PACS: 05.40.Fb, 05.60.Cd

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается процесс расплывания в однородной и изотропной среде макроскопического облака микроскопических пассивных (т. е. не влияющих на среду) частиц, характеризуемых некоторым «внутренним» законом случайного блуждания. Последнее обстоятельство относит этот процесс к весьма популярному в современной физике классу стохастических переносов (см., например, обзоры [1–3] или недавние оригинальные статьи [4–9]). В зависимости от особенностей блуждания на микроскопическом уровне макроскопические уравнения переноса для плотности облака $n(x,t)$ могут существенно отличаться от уравнений классической диффузии (которые содержатся в них в качестве частного случая) и, как правило, включают в себя дробные производные (см. [10]) по пространственным и/или временным переменным.

Стандартная модель блужданий заключается в следующем. Рассматривается одномерное движение частиц по прямой x (многомерные обобщения мы обсудим в конце статьи), характеризуемое следующими вероятностными законами $g(|x|)$ и $f(t)$: частицы, находящиеся в любой точке (скажем, x_0) могут совершать мгновенный перескок в соседние точки таким образом, что вероятность попасть в интервал (x_0+x, x_0+x+dx) равна $g(x)dx$, причем происходит это перемещение после некоторого процесса ожидания, так что вероятность покинуть свое местонахождение (все то же x_0) в интервале $(t, t+dt)$ (после прибытия сюда) равна $f(t)dt$. Именно случайность микроскопического закона движения ответственна за стохастичность соответствующего макроскопического переноса: в его процессе происходит «забывание» начального состояния $n_0(x) = n(x,0)$ и выход распределения $n(x,t)$ на универсальный автомодельный профиль (см. цитированную литературу и ниже).

Исторически первым исследованным примером таких блужданий была толпа пьяных матросов с весьма примитивными g и f (см. [1]), но изложенная модель весьма универсальна и допускает самые разные физические наполнения математических выкладок. Нам, например, в качестве реальной базы наиболее симпатичен перенос излучения в линиях в корональной плазме [11, 12]. В этом варианте пробег микроскопической частицы (фотона или γ-кванта) до поглощения зависит от того, излучилась ли она (он) в центре или на крыле линии, так что $g(x)$ однозначно определяется формой контура последней, в то время как $f(t)$ описывает спонтанный излучательный распад возбужденного состояния иона, в которое трансформируется квант после своего поглощения. Реальный процесс лучистого переноса, конечно, сложнее изучаемой модели (в частности, она требует однородности и стационарности плазменных характеристик, например концентрации и температуры), но многие его черты она все же охватывает.

Конкретным вопросом, решению которого посвящена статья, является определение влияния на рас-

[*] E-mail: chukbar@dap.kiae.ru

плывание «облака» возбуждений конечности фиксированной скорости движения частиц v, т. е. учет отклонения от стандартной модели. Однако для лучшего понимания возникающей проблематики требуется краткое изложение специфики процесса в классической постанове задачи, т. е. с $v = \infty$. Мы будем следовать в основном [5], хотя рассмотрению подобных вопросов посвящены и другие работы.

2. ОСОБЕННОСТИ ОПИСАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПЕРЕНОСА

Важными величинами, определяющими расплывание облака частиц, являются такие характеристики пространственной и временной функций распределения как средний квадрат смещения (длины пробега) и среднее время ожидания

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\,dx, \quad \langle t \rangle = \int_0^{\infty} t f(t)\,dt. \tag{1}$$

В случае их конечности эффективное уравнение переноса асимптотически (т. е. на макроскопических временах $t \gg \langle t \rangle$ и пространственных масштабах $|x| \gg \sqrt{\langle x^2 \rangle}$) переходит в классическое уравнение диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad D = \frac{\langle x^2 \rangle}{2\langle t \rangle}.$$

В случае же расходимости этих выражений (из–за наличия медленно убывающих степенных «хвостов» у g и f) ситуация кардинально меняется. Случай $\langle x^2 \rangle = \infty$, называемый «полетами Леви», приводит к пространственной нелокальности процесса переноса (в уравнении появляется дробная степень лапласиана — интегральный оператор типа свертки с некоторой степенной функцией x) и более быстрому расплыванию облака, тогда как случай с $\langle t \rangle = \infty$ (для него используется термин «ловушки») порождает временную нелокальность (дробную производную по времени, причем несколько другого типа!) и замедляет макроскопическое движение. В общем случае асимптотическое уравнение переноса выглядит как

$$\frac{\partial^\gamma n}{\partial t^\gamma} = -K(-\Delta)^\beta n, \tag{2}$$

где постоянная K и показатели $\gamma \le 1$, $\beta \le 1$ связаны со степенями «хвостов» f и g, так что характерная ширина облака $n(x,t)$ эволюционирует по закону

$$\overline{x} \propto t^\alpha, \quad \alpha = \frac{\gamma}{2\beta}. \tag{3}$$

«Лишние» минусы при лапласиане легко объясняются видом соответствующего оператора в пространстве Фурье, см. ниже.

Стандартная терминология характеризует любые стохастические процессы, описываемые (3), в случаях $\alpha > 1/2$ и $\alpha < 1/2$ как супер- и субдиффузионные соответственно[1)]. Эта уже неоднократно упомянутая стохастичность или «забывание» начальных условий заключается здесь в «навязывании» общему решению (2) автомодельности его функции Грина

$$G(x,t) = (1/t^\alpha)\Phi(x/t^\alpha),$$

а именно, как только характерная ширина G, увеличивающаяся согласно (3), начинает превышать начальный размер облака (часто говорят о «достаточности удвоения масштаба в процессе расплывания»), распределение плотности

$$n(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_0(x')G(x-x',t)\,dx' \tag{4}$$

становится все более и более универсальным:

$$n(x,t)|_{t\to\infty} \to G(x,t)\int_{-\infty}^{+\infty} n_0(x')\,dx'$$

(см. ниже). Иными словами, автомодельность, вообще облегчающая исследование свойств уравнений математической физики, здесь является еще и «притягивающей», что сильно упрощает анализ возможного поведения таких физических систем. Интересно, что конкретный вид G (Φ) зависит не от показателя автомодельности α, а от β и γ по отдельности.

Итак, в данной модели за супердиффузионное поведение отвечают полеты Леви[2)]. Величина α в зависимости от особенностей физической задачи (например, от формы контура линии) может принимать

[1)] На самом деле при этом негласно подразумеваются упомянутые во Введении временная и пространственная однородности физических систем, поскольку вполне обычный диффузионный процесс с $\overline{x} \sim \sqrt{Dt}$ в случае $D = D(x,t)$ способен обеспечить выполнение (3) с любым α (что достаточно часто и происходит).

[2)] Обратное, вообще говоря, не верно: наличие оператора $(-\Delta)^\beta$ в уравнении переноса далеко не всегда свидетельствует о существовании полетов Леви в описываемом им физическом явлении. Так, в задачах о скин–эффекте [13] или максвелловской релаксации заряда [14] в тонких пленках возникновение $(-\Delta)^{1/2}$ связано с чисто геометрическими причинами, а микроскопические частицы вообще отсутствуют — n там является нормальной (к пленке) компонентой магнитного (электрического) поля.

любые значения. Нам здесь наиболее интересен случай $\alpha > 1$ (при $\langle t \rangle \neq \infty$ его граница связана с расходимостью следующего момента $g - \langle |x| \rangle$), когда расплывание облака происходит с нарастающей скоростью. Устойчивого термина для его обозначения нет, но используемая в названии «ускоренная супердиффузия» выглядит достаточно естественной.

Как говорилось выше, все изложенное в этом разделе с различных сторон и с различной полнотой уже было исследовано ранее во многих работах. Тем не менее практически незатронутым и непроясненным остался вопрос, касающийся такого важного обобщения модели блужданий, как учет конечной скорости движения микроскопических частиц в процессе перемещения в соседние точки, несомненно присущей реальным физическим ситуациям. Для недиффузионных уравнений он был поднят лишь очень недавно в работах [6, 7], и далеко не со всеми сделанными там утверждениями можно согласиться.

3. ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОСТИ СКОРОСТИ ПОЛЕТОВ. ИСХОДНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ

На самом деле достаточно серьезные выводы об ожидаемых эффектах можно сделать уже из качественного анализа возникающей новой ситуации (ср. [7]). Прежде всего следует осознать, что мы хотим выявить. Очевидное влияние конечности скорости полетов заключается в том, что функция Грина эффективного уравнения (представляющая собой, напомним, распределение концентрации $n(x,t)$ в (2) при $n_0 = \delta(x)$, см. (4)) тождественно обращается в нуль при $|x| > vt$. Это обстоятельство, которое может быть очень важным, например в физических задачах, требующих строгого учета релятивистского принципа причинности, далеко не всегда сильно сказывается на поведении основной группы частиц. В случае $\alpha < 1$ граница $G \equiv 0$ движется быстрее характерного автомодельного параметра (3), так что асимптотически (а уравнение типа (2) вообще имеет смысл только в этом режиме) формируется старая функция Грина с искажением $\Phi(\xi)$ лишь на «далеких» хвостах (причем граница этих искажений $\xi_{bound}|_{t\to\infty} \to \infty$). Этот эффект мы не будем рассматривать. Достаточно подробное его обсуждение для обычного уравнения диффузии (гауссов профиль $\Phi(\xi)$) содержится, например, еще в [15].

Совсем по-другому обстоят дела с ускоренной супердиффузией. Здесь, наоборот, быстрее эволюционирует автомодельная ширина облака, поэтому асимптотическое условие $|x| < vt$ существенно меняет вид G и перестраивает саму структуру уравнения (2). Выводу его с учетом новых обстоятельств и посвящена наша работа.

Справедливости ради надо отметить, что в случае $\alpha < 1$ конечность v, не сказываясь (в указанном смысле) на дробных показателях (2), вполне может изменить значение коэффициента K. Достаточно очевидным представляется то обстоятельство, что в случае конечности величин $\langle t \rangle$ и $\langle |x| \rangle$ в K происходит замена

$$\langle t \rangle \to \langle t \rangle + \frac{\langle |x| \rangle}{v}. \qquad (5)$$

Для диффузионного процесса это общеизвестный факт. Впрочем, и для бесконечных значений среднего времени ожидания (5) должно быть справедливым (в том смысле, что в этом случае конечные значения $\langle |x| \rangle$ уже не сказываются на значении K).

Предшествующие работы [6, 7] по-разному пролили свет на обсуждаемые «v-эффекты». В первой из них содержится весьма загадочное утверждение, что конечность v превращает вообще все уравнения (2) (с любыми β и γ) в диффузионные. Во второй работе, лишь частично посвященной этой проблеме, ошибка была исправлена, но авторы ограничились выводом и анализом уравнений вида (2) с учетом соотношения (5). Что же касается ускоренной супердиффузии (для которой, напомним, всегда $\langle |x| \rangle = \infty$), то для нее в [7] сделан странный вывод о том, что, поскольку конечность v при $\alpha > 1$ качественно перестраивает функцию Грина первоначального уравнения (2), это уравнение «вообще неприменимо к описанию реальных процессов», и в результате наиболее сильное влияние конечности скорости движения частиц осталось неисследованным.

На самом деле насколько степенная функция с высоким показателем «обгоняет» линейную при больших значениях аргумента, настолько же она «отстает» от нее при малых. Сначала при ускоренной супердиффузии облако расплывается весьма медленно, так что ограничение $|x| < vt$ начинает сказываться на автомодельности (3) очень нескоро, и при достаточно больших значениях v перестройка процесса, происходящая при $t \propto v^{1/(\alpha-1)}$, может оставить вполне достаточно времени для первоначальной макроскопической эволюции по закону (2), (3) (промежуточная асимптотика).

Яркий физический пример такой возможности демонстрирует лучистый перенос в корональной плазме: для него чрезвычайно характерны и значительные величины α, и огромные значения v (все-таки скорость света!). Последнее обстоятельство позволяет в большинстве плазменных задач полагать ее бесконечной, однако с методической точки зрения это не всегда правильно. Кроме того, это просто может оказаться неверным даже в данной постановке, не говоря уже о других возможных физических реализациях модели, что и заставляет нас дать анализ описанной перестройки. При этом в математических процедурах мы будем основываться на подходе, использованном в [5].

4. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для адекватного описания кинетики процесса переноса помимо упомянутых величин n, g и f, нам потребуется ввести еще несколько новых: N, F и Q. Как уже говорилось во Введении, частицы, находящиеся в данной точке x, «помнят» момент своего прибытия туда, так что их пространственная плотность n в этом случае представляет собой интеграл некоторого распределения N по «времени жизни» τ:

$$n(x,t) = \int\limits_0^\infty N(x,t,\tau)\,d\tau.$$

Переход к последующему движению удобнее выражать в терминах не непосредственно f, а связанной с ней «вероятности дожить до τ»

$$F(\tau) = 1 - \int\limits_0^\tau f(t)\,dt.$$

И, наконец, выходящий (в обе стороны и на все расстояния) из данной точки поток можно обозначить $Q(x,t)$. Поскольку, согласно своему определению, f характеризует темп вылета в терминах исходно прилетевших сюда частиц, из которых к моменту τ остается лишь часть, определяемая $F(\tau)$, по формуле условной вероятности (см. [5]) имеем

$$Q(x,t) = \int\limits_0^\infty \frac{N(x,t,\tau)}{F(\tau)}\,f(\tau)\,d\tau. \qquad (6)$$

Теперь уравнение баланса для находящихся в данный момент в данной точке («сидящих») частиц записывается вполне компактно:

$$n(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x')\theta\left(t - \frac{|x'|}{v}\right) \times$$
$$\times \int\limits_0^{t-|x'|/v} Q\left(x - x', t - \frac{|x'|}{v} - t'\right) F(t')\,dt'\,dx' +$$
$$+ \int\limits_t^\infty \frac{N_0(x,\tau - t)}{F(\tau - t)}\,F(\tau)\,d\tau, \qquad (7)$$

где $N_0(x,\tau) \equiv N(x,0,\tau)$ — начальное распределение частиц по времени жизни. Система (6), (7) полностью описывает ситуацию.

Нетрудно видеть, что если использование величин F и Q нужно лишь для компактности записи, то потребность во введении распределения N принципиальна в том смысле, что уравнение для n, вообще говоря, не записывается в терминах лишь самой плотности частиц n, т. е. макроскопическая кинетика в общем случае неприятным образом зависит от микроскопических деталей. К сожалению, эта методическая тонкость далеко не всегда отмечается в литературе, где, как правило, сразу выписывается исключительно макроскопическое уравнение переноса (см., например, [7]), в действительности справедливое лишь в некотором асимптотическом смысле.

Проблем не возникает лишь для

$$f = \mu\exp(-\mu t), \quad \mu = 1/\langle t\rangle,$$

когда F и f (и, следовательно, Q и n) просто пропорциональны друг другу. Впрочем, такой закон встречается в физических приложениях весьма часто: в частности, он очень характерен именно для излучательного распада возбужденных состояний. Для других (также встречающихся) f в игру вступают особенности зависимости N от своих аргументов. Дело в том, что вновь прибывающие частицы формируют автомодельный профиль

$$N_{new} = \theta(t-\tau)P(t-\tau)F(\tau)$$

с коррелированной зависимостью от t и τ, где P — «входящий» поток. Старое начальное распределение сдвигается в область $\tau > t$ и монотонно убывает вследствие вылета в соседние точки (см. (7)). Когда такая автомодельность занимает бóльшую часть профиля $N(\tau)$ и начинает играть доминирующую роль в Q, интегралы по dt' и $d\tau$ (последний входит в определение Q (6)) в (7) могут быть переставлены и вместо N здесь возникает его интеграл — макроскопическая плотность n. Для простоты выкладок (как это было предложено в [5]) можно выбрать N_0 в виде «сдвинутой» дельта-функции Дирака:

$$N_0 = n_0\delta_+(\tau), \quad \int\limits_0^\infty \delta_+(\tau)\,d\tau = 1.$$

Это обеспечивает автомодельную связь зависимостей N от t и τ с самого начала процесса. Тогда вместо (6), (7) получается одно базовое уравнение (ср. с [5] при $v = \infty$ и [7]):

$$n(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x')\theta\left(t - \frac{|x'|}{v}\right) \times \\ \times \int\limits_0^{t-|x'|/v} f(t')n\left(x - x', t - \frac{|x'|}{v} - t'\right) dt'dx' + \\ + F(t)n_0(x). \quad (8)$$

В общем случае оно, как мы видим, справедливо лишь асимптотически, что делает не совсем тривиальной задачу об описании эволюции облака на малых временах $t \to 0$, но никак не влияет на настоящее исследование. На самом деле в рассматриваемой нами задаче (8) еще недостаточно асимптотично: для поставленных нами целей требуется осуществить в нем переход $t \to \infty$ (одновременно в силу эффекта расплывания происходит и переход $\overline{x} \to \infty$). Технически наиболее просто это сделать, совершив в нем преобразование Лапласа по временной переменной и преобразование Фурье по пространственной — это избавит нас от сверточных интегралов, а проводить вычисления с функциями проще, чем с операторами.

5. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ

Для удобства промежуточных выкладок и определенности некоторых численных коэффициентов на этом этапе желательно конкретизировать выражения для функций распределения g и f (F), не потеряв, однако, возможности описывать весь спектр вариантов уравнения (2). Весьма удобным оказывается следующий класс функций (см. [5], для упрощения и без того громоздких выражений всюду ниже используются безразмерные переменные, так что микроскопическим масштабам соответствуют значения $x, t \sim 1$):

$$g(x) = \frac{\Gamma(\beta + 1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta)}\,\frac{1}{(1+x^2)^{\beta+1/2}}, \\ f(t) = \frac{\gamma}{(1+t)^{\gamma+1}}, \quad F(t) = \frac{1}{(1+t)^{\gamma}}. \quad (9)$$

Здесь Γ — гамма–функция Эйлера, численные коэффициенты определяются условиями нормировки g и f на 1. Существенными для дальнейшего являются лишь степенные показатели «хвостов» функций, параметризуемые положительными индексами β и γ, совпадающими с введенными в уравнениях (2) и (3) (варианты (9) с $\beta, \gamma > 1$ дают в макроскопических уравнениях переноса стандартные производные целого порядка[3]).

Приведем для справок упомянутые ранее степенные моменты этих распределений (до тех пор, пока они существуют):

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{2(\beta-1)}, \quad \langle |x|\rangle = \frac{\Gamma(\beta-1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta)}, \quad \langle t\rangle = \frac{1}{\gamma-1}.$$

В дальнейшем нас будут интересовать исключительно случаи $\beta < 1$ (впрочем, и в противоположном случае выкладки будут аналогичными) и, главным образом, $\beta < 1/2$.

В результате указанных совместных преобразований Лапласа и Фурье уравнение (8) превращается в

$$n_{pk} = [g(x)\exp(-p|x|/v)]_k f_p n_{pk} + F_p n_{0k} \quad (10)$$

(символ $[\cdot]_k$ обозначает фурье-компоненту соответствующей функции). Асимптотическому переходу $|x|, t \to \infty$ в (8) соответствует «дуальный» переход $k, p \to 0$ в (10). Для последнего же достаточно разложить уравнение в степенной ряд по k и p, удержав лишь первые члены разложения. При этом технически удобно одновременно вычесть из левой и правой частей (10) одинаковое выражение $f_p n_{pk}$. Тогда для g и f из (9) исходное уравнение (10) преобразуется в (соответствующие интегралы и разложения их в ряды можно найти, например, в [17])

[3] Стохастические переносы типа (2) и с дробной производной $\gamma > 1$ все же возможны, но совсем в других задачах — например, при сносе пассивной примеси турбулентным потоком жидкости [16].

$$\left[p^\gamma\Gamma(1-\gamma)+\frac{p}{\gamma-1}\right]n_{pk}=$$
$$=-\left\{\frac{\Gamma(\beta-1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta)}\,\frac{p}{v}+\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\beta)}\,\frac{1}{2^{2\beta+1}\cos(\pi\beta)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\frac{p}{v}+ik\right)^{2\beta}+\left(\frac{p}{v}-ik\right)^{2\beta}\right]\right\}n_{pk}+$$
$$+\left[p^{\gamma-1}\Gamma(1-\gamma)+\frac{1}{\gamma-1}\right]n_{0k} \quad (11)$$

(ср. с [5] и (2) при $v=\infty$).

На самом деле для каждого конкретного значения β и γ уравнение (11) выглядит проще: скажем, при $\gamma>1$ (т.е. конечном $\langle t\rangle$) в квадратных скобках в обеих частях уравнения можно пренебречь степенью $p^{\gamma-1}$ по сравнению с единицей (p^0), а при $\gamma<1$ ситуация противоположна. Аналогично обстоят дела в случаях $\beta>1/2$ и $\beta<1/2$. Чуть более сложную проблему (требующую раскрывать неопределенности типа «$\infty-\infty$») представляют «критические» значения индексов $\beta=1/2$ и $\gamma=1$ (а также и $\beta=1$) — в уравнении наряду со степенными членами появляются логарифмы (см. [5]). Наличие множителей p^γ и $|k|^{2\beta}$ (при $v=\infty$) объясняет использованную в (2) терминологию $\partial^\gamma/\partial t^\gamma$ и $(-\Delta)^\beta$.

Комбинация, содержащая $(p/v\pm ik)^{2\beta}$ (как и первый член в правой части — в нем слагаемые $\pm ik$ просто сократились), возникла из разложения в ряд интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-p|x|/v)\cos(kx)}{(1+x^2)^{\beta+1/2}}\,dx. \quad (12)$$

Поэтому требуется выделить ветвь, на которой принимаются действительные значения при действительных k и положительных p, т.е. указанную комбинацию можно представить как

$$2\left|\frac{p^2}{v^2}+k^2\right|^\beta\cos(2\beta\varphi),\quad \cos\varphi=\frac{p/v}{\sqrt{(p/v)^2+k^2}}. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что в случае конечных значений $\langle|x|\rangle$ ситуация действительно совпадает со случаем, который мы обсуждали в разд. 3. Например, если $\langle t\rangle$ также конечно, то первый член в фигурных скобках в правой части (11) объединяется с выражением, стоящим в его левой части, в результате чего мы получаем член вида

$$(\langle t\rangle+\langle|x|\rangle/v)pn_{pk}$$

(ср. [7]). Интересно, что аналогичный коэффициент при n_{0k} справа не возникает, и это, естественно, означает, что число частиц, описываемых уравнением (11), асимптотически уменьшилось в

$$\langle t\rangle/(\langle t\rangle+\langle|x|\rangle/v)$$

раз по сравнению со своим начальным значением. Причина этого проста: конечная скорость движения приводит к естественному разделению частиц на два типа: «сидящие», для которых и выписаны уравнения (8), (10) и (11), и «летящие». Очевидно, что на макроскопических временных и пространственных масштабах, удовлетворяющих неравенствам

$$t\gg\langle t\rangle,\quad |x|\gg\langle|x|\rangle,$$

плотности частиц каждого вида пропорциональны времени их пребывания в данном состоянии, поэтому (ср. [7])

$$n_{fly}(x,t)=\frac{\langle|x|\rangle}{v\langle t\rangle}\,n(x,t). \quad (14)$$

Если в начальный момент в системе уже присутствуют летящие частицы, то в (11) происходит замена

$$n_{0k}\to n_{0k}+n_{fly\,0k}.$$

Это тривиальное обстоятельство приводит к еще одному (помимо обсужденных в третьем разделе) нетривиальному эффекту в случае $\langle|x|\rangle=\infty$: число летящих частиц в этом случае должно асимптотически возрастать, т.е. в процессе такого переноса происходит необратимая «конверсия» «сидящих» частиц (число которых асимптотически стремится к нулю) в «летящие». Напомним, что в физической задаче о транспорте излучения через плазму эти два состояния на самом деле весьма различны, так что общее число возбуждений в среде будет убывать, а число γ-квантов будет асимптотически стремиться к константе. Естественно, это не может не сказываться на структуре функции Грина, поскольку в эффективном уравнении переноса

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}n\,dx$$

больше не является интегралом движения.

Таким образом, поставленная нами задача решена: уравнение (11) представляет собой асимптотическое уравнение стохастического переноса с конечной скоростью полетов Леви. В следующем разделе мы обсудим особенности полученного уравнения.

6. СМЕНА РЕЖИМОВ ПРИ УСКОРЕННОЙ СУПЕРДИФФУЗИИ

Помимо указанной в [7] перенормировки коэффициента K в (2), согласно (11), при конечных значениях v происходит также замена дробной степени лапласиана на несколько более экзотическую комбинацию:

$$|k|^{2\beta} \to \frac{(p/v + ik)^{2\beta} + (p - ik)^{2\beta}}{2\cos(\pi\beta)}. \tag{15}$$

В принципе, в рамках используемой терминологии эту комбинацию можно обозначить через соответствующую сумму дробных производных

$$\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x}\right)^{2\beta}$$

(наверное, при этом нагляднее проявляется обязательное условие $G \equiv 0$ для $|x| > vt$), но такая запись, в отличие от $(-\Delta)^\beta$ или $\partial^\gamma/\partial t^\gamma$, не является общеупотребительной. Каким же образом такая трансформация операторов сказывается на структуре функции Грина уравнения переноса?

Поскольку нас интересует именно изменение автомодельности (т. е. максимально сильное воздействие, см. разд. 3), то и в уравнении (11) следует изучать автомодельную связь характерного масштаба волнового вектора $\overline{k}$ с p. Перепишем (11) в более компактном виде, положив для определенности $\gamma > 1$, но $\beta < 1/2$ (ср. (2)):

$$\begin{gathered} pn_{pk} = -K\frac{\cos(2\beta\varphi)}{\cos(\pi\beta)}\left(k^2 + \frac{p^2}{v^2}\right)^\beta n_{pk} + n_{0k}, \\ K = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\beta)}\frac{\gamma - 1}{2^{2\beta}}, \end{gathered} \tag{16}$$

и будем считать, что $v \gg 1$ — для «переключения» режимов на стадии именно макроскопической эволюции, только для которой (16) и имеет смысл, поскольку при его выводе предполагалось, что $\overline{x}, t \gg 1$.

Рассмотрим два предельных режима в уравнении (16): старую, теперь промежуточную, асимптотику и новую, окончательную, асимптотику. Первоначально (т. е. при не слишком больших t или не слишком малых p) в (16) можно пренебречь членом $(p/v)^2$ по сравнению с k^2 в круглых скобках в правой части (полагая $\varphi = \pi/2$). Действительно, при этом (16) переходит в (2) с зависимостью $\overline{x} \propto t^{1/2\beta}$ (см. (3)) или $\overline{k} \propto p^{1/2\beta}$ (ср. правую и левую части (16)), что позволяет опускать $(p/v)^2$ по сравнению с $p^{1/\beta}$ вплоть до $p \sim v^{-2\beta/(1-2\beta)}$ (а при $\beta > 1/2$ — всегда) или $t \sim v^{2\beta/(1-2\beta)}$ ($t \sim v^{1/(\alpha-1)}$ в случае $\gamma < 1$ — ср. со сказанным в разд. 3).

Однако по прошествии указанного времени ситуация кардинально меняется и устанавливается новая автомодельность $\overline{x} \sim vt$ ($\overline{k} \sim p/v$), так что может быть опущена уже вся левая часть (16):

$$K\frac{\cos(2\beta\varphi)}{\cos(\pi\beta)}\left(k^2 + \frac{p^2}{v^2}\right)^\beta n_{pk} = n_{0k}.$$

Следовательно, искомая функция Грина «перестроенного» уравнения имеет вид

$$G_{pk} = \frac{\cos(\pi\beta)}{K\cos(2\beta\varphi)(k^2 + p^2/v^2)^\beta}. \tag{17}$$

Она действительно удовлетворяет объявленным условиям тождественного обращения в нуль на больших расстояниях и асимптотического убывания полного числа сидящих частиц: поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n\,dx = n_k|_{k=0},$$

эффект определяется нулевой гармоникой G. Кроме того,

$$G_{p0} \propto p^{-2\beta},$$

поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n\,dx \propto t^{2\beta-1} \quad (\text{или} \quad t^{2\beta-\gamma} \quad \text{при} \quad \gamma < 1)$$

(напомним, что при $\gamma < 2\beta$ или $\alpha < 1$ этот режим не реализуется!). Это выражение совпадает с «проинтегрированным» выражением (14) при следующей интерпретации:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n_{fly}\,dx \to \text{const}, \quad \langle|x|\rangle \to \int_{-vt}^{vt} g(x)|x|\,dx \propto t^{1-2\beta},$$

$$\langle t\rangle \to \int_0^t f(t)t\,dt \propto t^{1-\gamma}.$$

Отметим, что показатели степени при переходе от p к t в зависимостях реальной функции времени G и автомодельного параметра $\overline{x}$ (ср. с обычным уравнением диффузии) различаются на единицу.

Собственно переключение режимов с сохранения полного числа частиц на его убывание, согласно общему уравнению (16), происходит по закону

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n_p\,dx \propto \frac{1}{p + K(p/v)^{2\beta}}. \tag{18}$$

Как следует из (11), в случае $\gamma < 1$ второй член в знаменателе этого выражения дополнительно умножается на $p^{1-\gamma}$.

7. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ И ОБСУЖДЕНИЕ ОБЩИХ СВОЙСТВ

Асимптотическое соотношение (17) (или его полный вариант, следующий из (11) или (16)) позволяет, согласно (4), получать решение задачи об ускоренной супердиффузии с конечной скоростью полетов Леви для любого начального распределения $n_0(x)$. Однако оперирование в пространстве Лапласа–Фурье бывает не слишком наглядным, поэтому для представления о характере нового вида функций Грина приведем для некоторых из них простые выражения в обычных переменных.

Для случая $\beta = 1/4$ ($\overline{x} \propto t^2$), соответствующего часто встречающемуся на практике лоренцовому контуру линий в физической задаче о транспорте излучения, имеем

$$G \sim \frac{\theta(vt - |x|)}{v^{1/2} t^{3/2}} \tag{19}$$

(напомним, что это выражение справедливо лишь для $t \gg v$). Здесь обращение (17) проводится до конца вследствие простой связи косинусов простого и половинного углов. Переключение режимов (18) здесь происходит по закону

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} n\,dx \propto \exp\left(K^2\,\frac{t}{v}\right) \operatorname{erfc}\left[K\left(\frac{t}{v}\right)^{1/2}\right].$$

Другой случай соответствует целому классу предельно быстрых переносов с $\beta \to 0$: здесь можно положить $\cos(2\beta\varphi) \to 1$ (что не вполне строго, поскольку вопросы о скорости сходимости в дуальных пространствах очень непросты, но все-таки $\varphi \sim 1$ в «области автомодельности» $\overline{k} \sim p/v$) и, следовательно,

$$G \sim \frac{v\theta(vt - |x|)}{(v^2t^2 - x^2)^{1-\beta}} \tag{20}$$

(для $t \gg v^{2\beta} \gg 1$ это неравенство, накладывает некоторые ограничения на β при данном v).

Несмотря на «похожесть» полученных функций Грина на встречающиеся в волновых задачах аналоги, рассматриваемый процесс имеет все характерные черты именно стохастического переноса. Действительно, мы по-прежнему имеем дело с неограниченно «расплывающейся» функцией

$$G = \frac{1}{t^{2-2\beta}}\Phi(x/t),$$

поэтому любой начальный профиль $n_0(x)$ со временем, согласно (4), стремится к малопараметрическому универсальному распределению (см. [5])

$$n(x,t) \approx AG(x - x_0)[1 + O(1/t^2)],$$

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} n_0\,dx, \quad Ax_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xn_0\,dx,$$

т. е. «забывание» проявляется в полной мере (ср. с гамильтоновой задачей об истинно волновом движении). Заметим, что поскольку $n(x,t)$ есть свертка n_0 с G, резкие градиенты (и даже разрывы) последней при $|x| \sim vt$ в асимптотическом профиле макроскопической концентрации на самом деле сглажены на размере порядка начальной ширины облака.

Тем не менее вариант функции Грина (17) все же отличается от полученных в исследованных ранее случаях. Для любой скорости v при $\langle|x|\rangle \neq \infty$ можно явно указать границы, начиная с которых эффективное уравнение переноса теряет «чувствительность» к начальным условиям: это происходит при $\overline{x} \gg \langle|x|\rangle$. Мы же на самом деле все время находимся на границе установления режима. Это проявляется в следующем. Если при $\beta > 1/2$, как указывалось ранее, при $n_{fly\,0}(x) \neq 0$ мы получаем лишь некоторую «перенормировку» начального условия, то в нашем случае эта функция уже не полностью характеризует истинное положение вещей: для адекватного описания ситуации требуется ввести в рассмотрение распределение n_{fly} по тому месту, где они намерены «сесть» — ср. с необходимостью ввести распределение $N(\tau)$. Поэтому подбором функции $n_{fly}(x)$ можно кардинально изменить всю последующую эволюцию[4)]. При этом функции n и n_{fly} даже при $n_{fly\,0} \equiv 0$ связаны между собой уже не простой пропорцией (см. [7]):

$$n_{fly} = \frac{1}{2v}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q\Big(x - x', t - \frac{|x'|}{v}\Big)\theta\Big(t - \frac{|x'|}{v}\Big) \times \\ \times \int\limits_{|x'|}^{\infty} g(y)\,dy\,dx'.$$

Причина этого состоит в предельной пространственной нелокальности задачи и эффекте асимптотического «вымирания» сидящих частиц.

[4)] Заметим, что, аналогичным образом, при $\langle t\rangle = \infty$ в случае очень «неравновесных» начальных функций распределения $N_0(\tau)$ для формирования автомодельного «$t - \tau$» профиля N может потребоваться весьма длительное время.

8. УВЕЛИЧЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ЗАДАЧИ

Хорошо известно, что в обычной супердиффузии (с $v = \infty$) трансформация эффективных уравнений при переходе от одномерной задачи к многомерной тривиальна: дробная степень лапласиана в уравнении (2) в пространстве любой размерности соответствует $-|\mathbf{k}|^{2\beta}$ (см. [1–7]). Совсем по-другому обстоят дела в нашем случае — далеко не просто переписать (11) или (16) в новом виде. Проблема здесь в том, что простая аддитивность p и $\pm ik$ возникает исключительно благодаря удобным свойствам выражения (12), которые в общем случае не сохраняются в пространствах другой размерности.

Тем не менее в наиболее часто встречающемся трехмерном случае ситуация выглядит очень похоже:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-pr/v)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})g(r)\,d\mathbf{r} = \\ = -4\pi\int\limits_0^{\infty}\frac{\exp(-pr/v)\sin(kr)}{k}\,g(r)r\,dr$$

(в двумерном случае вместо синуса стоит функция Бесселя). Следовательно, в эффективном уравнении блок членов, содержащих $k^{2\beta}$ (здесь уже k — модуль волнового вектора), при $v \neq \infty$ заменяется на

$$\frac{(p/v+ik)^{2\beta+1}-(p/v-ik)^{2\beta+1}}{2ik\cos(\pi\beta)} \qquad (21)$$

и при выделении нужной ветви возникает не косинус, а $\sin[(2\beta+1)\varphi]$. В обычных физических переменных это выглядит не так просто, как в (15), поскольку, хотя p/v по–прежнему соответствует $\partial/\partial t$, но $\pm ik$ с самого начала является интегральным оператором типа $\Delta^{1/2}$. Однако с математической точки зрения оперирование с (21) не намного сложнее, чем с (15).

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, последовательное решение поставленной нами задачи по определению асимптотических свойств стохастического переноса микроскопических частиц позволило вывести новые макроскопические уравнения, описывающие кинетику этого процесса с учетом конечности скорости движения частиц. Несмотря на иной тип присутствующих в них дробных производных, эти уравнения оказались вполне удобными для достаточно подробного изучения появляющихся вследствие конечности v эффектов: «переключения» автомодельности функций Грина, «вымирания» «сидящих» частиц и влияния размерности задачи на эволюцию системы. Все эти вопросы могут иметь непосредственное практическое применение, в частности, к изучению транспорта излучения в плазме.

Авторы признательны А. С. Кингсепу за ценные замечания. Работа выполнена при частичной поддержке программы «Нелинейная динамика» Министерства науки РФ и гранта INTAS 97-0021.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. W. Montroll and M. F. Schlesinger, in *Studies in Statistical Mechanics*, ed. by J. Leibowitz and E. W. Montroll, Noth-Holland, Amsterdam (1984), Vol. 2, p. 1.
2. J.-P. Bouchand and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
3. M. B. Isichenko, Rev. Mod. Phys. **64**, 961 (1992).
4. G. M. Zaslavsky, Physica D **76**, 110 (1994).
5. К. В. Чукбар, ЖЭТФ **108**, 1875 (1995).
6. В. В. Учайкин, ТМФ **115**, 154 (1998).
7. В. М. Золотарев, В. В. Учайкин, В. В. Саенко, ЖЭТФ **115**, 1411 (1999).
8. I. M. Sokolov, Phys. Rev. E **63**, 056111 (2001).
9. E. Lutz, Phys. Rev. Lett. **86**, 2208 (2001).
10. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).
11. Л. М. Биберман, В. С. Воробьев, И. Т. Якубов, *Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы*, Наука, Москва (1982), с. 1.
12. В. И. Коган, В. С. Лисица, в сб. *Итоги науки и техники. Физика плазмы*, т. 4, под ред. В. Д. Шафранова, ВИНИТИ, Москва (1983), с. 194.
13. Е. Б. Татаринова, К. В. Чукбар, ЖЭТФ **92**, 809 (1987).
14. М. И. Дьяконов, А. С. Фурман, ЖЭТФ **92**, 1012 (1987).
15. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. 1, Изд-во иностр. лит., Москва (1958), § 7.4.
16. К. В. Чукбар, ЖЭТФ **109**, 1335 (1996).
17. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981), гл. 2.