

# СИММЕТРИЧНЫЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС ВО ВРАЦАЮЩЕМСЯ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

*С. В. Старченко\**

*Геофизическая обсерватория «Борок» Объединенного института физики Российской академии наук  
152742, Ярославская область, Россия*

*М. С. Котельникова*

*Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской академии наук  
142017, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 28 сентября 2001 г.

Впервые построена общая теория тепломассопереноса, поддерживающего вращение со слегка различными скоростями в условиях, типичных для ядер планет Солнечной системы. Получено аналитическое решение тепловых и диффузионных уравнений без нелинейных членов, ответственных за конвективный перенос. Это сферически-симметричное базовое решение применимо тогда, когда величина теплового потока из ядра планеты меньше или близка к величине адиабатического (радиационного) потока. В общем случае, вычитая базовое решение, мы упрощаем неоднородную систему конвективных уравнений до полностью однородной и безразмерной системы. Последнюю систему контролируют два асимптотически малых параметра: число Россби  $\epsilon \leq 10^{-5}$ , характеризующее относительную величину дифференциального вращения, и обобщенное число Экмана  $E \leq 10^{-12}$ , характеризующее относительную роль вязко-диффузионных эффектов при быстром вращении. Главный порядок решения при  $\epsilon \rightarrow 0$  и потом при  $\sqrt{E} \rightarrow 0$  при значениях коэффициентов переноса, близких к молекулярным, приводит к симметричному относительно оси вращения базовому течению, направленному преимущественно по азимуту. Жидкость в базовом течении поднимается от твердого ядра по спиральям внутри осевого цилиндра, касающегося экватора твердого ядра, а опускается вдоль узкого слоя вдоль стенок цилиндра. Момент вязких сил во внутреннем пограничном слое Экмана обеспечивает более быстрое вращение внутреннего твердого ядра планет земной группы по сравнению с массивной внешней мантией вследствие роста твердого ядра за счет менее плотного жидкого ядра.

PACS: 44.35.+c, 47.27.-i, 95.30.Lz, 66.20.+d

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Явления, связанные с планетарным магнетизмом, непосредственно наблюдаются и используются человечеством не один десяток веков. Но только зародившийся в середине прошлого века палеомагнетизм позволил исчислять уже миллиардами лет доступную нам историю о геомагнитном поле. А космические исследования, проведенные от 10 до 20 лет назад, дали нам наконец достаточно детальные сведения о собственных магнитных полях большинства планет Солнечной системы и их спутников. Накопленный обширный наблюдательный материал позволяет теперь как непосредственный, так и сравни-

тельный анализ геомагнитного поля для решения проблемы геодинамо.

В 1995 г. была построена первая успешная численная трехмерная модель МГД-динамо планетного типа в настолько упрощенном приближении Буссинеска, что приложения этого решения к планетам вызывало большие сомнения [1]. Поэтому через два года те же авторы опубликовали несколько частных решений полной системы уравнений геодинамо [2], которая была ранее выведена в реалистичном для ядер планет неэластичном приближении [3]. Решение этих сложнейших уравнений позволяло получить магнитное поле на поверхности планеты вполне сравнимое с тем, которое получалось при решении упрощенной системы.

\*E-mail: starche@izmiran.rssi.ru

С тех пор различными авторами, имеющими доступ к мощным суперкомпьютерам в Европе, Японии и США было построено множество численных моделей МГД-динамо, достаточно убедительно воспроизводящих морфологию, величину и эволюцию наблюдаемого на поверхности Земли магнитного поля (см. в [4, 5]). Однако все эти модели использовали нереальное для недр планет приближение Буссинеска [13] и трактовали вязко-диффузионные эффекты исходя исключительно из соображений устойчивости численных схем. Это неизбежно приводит и в обозримой перспективе будет приводить не только к огромному (на 7 и более порядков!) завышению коэффициентов переноса по сравнению с их истинными планетарными величинами [7], но и к таким совершенно нефизическим эффектам как гипервязкость.

Таким образом, в настоящее время наиболее актуальными задачами в решении проблемы геодинамики являются следующие:

- 1) обоснованное упрощение полной системы уравнений геодинамо;
- 2) построение адекватной модели вязко-диффузионных эффектов;
- 3) выявление кинематических механизмов генерации наблюдаемого на поверхности планеты магнитного поля, с целью максимального сужения круга допустимых МГД динамо моделей.

Естественно начать изучение тепломассопереноса в ядрах планет земной группы без учета магнитного поля. Решив эту задачу, можно исследовать, в состоянии ли полученное течение проводящей жидкости возбуждать магнитное поле или нет, что позволит дать заодно и ответ, почему Венера и Марс не в состоянии поддерживать собственное магнитное поле.

Сами течения порождаются архимедовой силой плавучести, возникающей в основном за счет всплывания избыточной легкой примеси от границы с внутренним твердым ядром планет земной группы в процессе роста последнего. Соответствующую конвекцию, движимую тепловыми и композиционными эффектами в быстро вращающемся сферическом слое, не изучал еще никто. Исходные для такой конвекции уравнения (см. разд. 2) рассматривались уже тридцать лет назад авторами [3]. Эти уравнения представлялись настолько сложными, что никто даже и не пытался исследовать их аналитически. Более того, в единственном известном нам численном исследовании этих уравнений [2, 8] сразу рассматривается магнитогидродинамический вариант, а базовое немагнитное исследование не проведено.

В разд. 3 настоящей работы показано, что исходные уравнения из разд. 2 допускают базовое сферически-симметричное аналитическое решение, если пренебречь нелинейными членами, ответственными за конвективный перенос. Вычитая базовое решение, в разд. 4 мы упрощаем неоднородную исходную систему конвективных уравнений до полностью однородной и безразмерной системы. Далее в разд. 5 показано, что в главном порядке немагнитное течение жидкости направлено по азимуту и сосредоточено внутри осевого цилиндра, касающегося экватора твердого ядра. Соответствующий момент вязких сил во внутреннем пограничном слое Экмана обеспечивает более быстрое вращение внутреннего твердого ядра планет земной группы по сравнению с массивной внешней мантией из-за того, что твердое ядро растет за счет менее плотного жидкого ядра. В разд. 6 оцениваются как скорость роста твердого ядра, так и диапазон непосредственной применимости найденного нами сферически-симметричного базового решения, которое является чисто диффузионным. Заключительный разд. 7 посвящен обсуждениям и выводам.

## 2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваемый здесь сферический слой жидкости всегда находится в состоянии, близком к такому состоянию гидростатического равновесия, которое осуществлялось бы при полном отсутствии конвекции. Это исходное состояние мы считаем полностью заданным и сокращенно обозначаем далее как RS (Reference State). Все соответствующие RS исходные величины имеют далее черту сверху. Конвекция происходит за счет остывания планеты и всплывания легкой примеси в жидком внешнем ядре в процессе роста твердого внутреннего ядра. Массовая доля легкой примеси, называемая здесь концентрацией, обозначена далее как  $\xi$ , а удельная энтропия — как  $S$ .

Исходное RS — это адиабатическое и хорошо перемешанное состояние. Поэтому RS-энтропия и концентрация зависят только от времени, т. е.

$$\nabla \bar{S} = 0, \quad \nabla \bar{\xi} = 0.$$

Остальные RS-величины (плотность  $\bar{\rho}$ , обобщенное давление  $\bar{p}$ , температура  $\bar{T}$  и химический потенциал  $\bar{\mu}$ ) зависят и от времени  $t$ , и от сферического радиуса  $r$ , причем  $r = 0$  в центре планеты. Штрих обо-

значает далее радиальную производную. Например, радиальная производная

$$\bar{\mu}' = d\bar{\mu}/dr$$

пропорциональна гравитационному ускорению  $\bar{g}$ , причем, согласно [3],  $\bar{\mu}' \approx 0.6\bar{g}$  для Земли. Гравитационное ускорение  $\bar{g}$  в RS также связано с адиабатическим температурным градиентом

$$\bar{T}' = \alpha\bar{T}\bar{g}/c_p,$$

где  $\alpha$  — изотермический коэффициент объемного расширения,  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Во внешнем ядре Земли  $c_p \approx 8 \cdot 10^2$  Дж/(кг·К), а  $\alpha \approx 10^{-5}$  К<sup>-1</sup> [3, 9].

Конвекция описывается переменными без черты, представляющими собой поле возмущений RS, т.е.  $\mathbf{V}$ ,  $\bar{p} + p$ ,  $\bar{\xi} + \xi$  и  $\bar{S} + S$  — это реальные физические величины. Исходными для описания конвекции в ядрах планет являются приведенные ниже уравнения для скорости (1), диффузии (2а) и переноса тепла (2б). Эти уравнения были изначально выведены для земного ядра в [3] с использованием определенных выше свойств RS и неупругого приближения  $\nabla(\bar{\rho}\mathbf{V}) = 0$ , являющегося таким упрощением уравнения непрерывности, которое вполне допустимо в жидких ядрах планет:

$$\nabla(\bar{\rho}\mathbf{V}) = 0, \quad (1a)$$

$$\kappa_V \nabla^2 \mathbf{V} = D\mathbf{V}/Dt + 2\Omega \times \mathbf{V} + \nabla(p/\bar{\rho}) + (\bar{T}'S + \bar{\mu}'\xi)\mathbf{1}_r; \quad (16)$$

$$\nabla(\bar{\rho}\kappa_\xi \nabla \xi) = \bar{\rho}(D\xi/Dt + \dot{\xi}), \quad (2a)$$

$$\nabla(\bar{\rho}\bar{T}\kappa_S \nabla S) = \bar{\rho}\bar{T} \left( \frac{DS}{Dt} + \dot{S} \right) + \frac{(r^2\bar{q})'}{r^2} - \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\rho}\bar{\mu}'} \kappa_\xi \frac{\partial \xi}{\partial r}. \quad (26)$$

Здесь

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)$$

— субстанциональная производная, средние значения  $\xi, S$  равны нулю и

$$A \equiv -\bar{T}'S - \bar{\mu}'\xi$$

— направленное по радиусу ускорение силы Архимеда, определяющее скорость конвекции. Отток или

отрицательный тепловой поток  $(r^2\bar{q})'/r^2$  в уравнении (2б) возникает из-за отклонения от адиабатического значения удельного тепла радиации или проводимости, определенного как

$$\bar{q}(r) = -c_p \kappa_T \bar{\rho} \bar{T}' > 0.$$

Этот отток компенсируется охлаждающим слагаемым  $\bar{\rho}\bar{T}\dot{S} < 0$ , что в наибольшей степени способствует поддержанию RS. Малыми тепловыми слагаемыми, обусловленными вязкостью, в уравнении (2б) пренебрегается.

Молекулярные величины плохо известных коэффициентов переноса  $\kappa_{V, \xi, S}$  (т.е. коэффициентов вязкости и диффузии) близки по порядку величины к коэффициенту термической диффузии  $\kappa_T$ . Величина последнего оценивается между  $2 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с и  $6 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с для Земли [3, 9]. При развитой конвекции коэффициенты переноса представляют собой сложные турбулентные тензоры. Предполагается, что все их характерные значения близки к  $\kappa \approx 2$  м<sup>2</sup>/с в ядре Земли [3].

Долговременное поведение процессов охлаждения и перемешивания в уравнениях (2) описывают производные

$$\dot{S} = \frac{d\bar{S}}{dt} \leq 0, \quad \dot{\xi} = \frac{d\bar{\xi}}{dt} \geq 0.$$

Положительное значение  $-\dot{S} \sim 10^{-15}$  Вт/кг·К для Земли имеет тот же порядок, что и удельная энтропия, обусловленная тепловой проводимостью  $(r^2\bar{q})'/r^2\bar{\rho}\bar{T}$ .

На скорость из уравнений (1) у границы твердого внутреннего ядра (где  $r = r_i$ ) накладывается условие прилипания  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_i$ . При этом скорость движения ядра как твердого тела  $\mathbf{V}_i \approx \omega_i r_i \sin \theta \mathbf{1}_\varphi$  в основном обусловлена угловым вращением  $\omega_i$ . Условие прилипания также накладывается на внешней ( $r = r_o$ ) сфере (мантии). Скорость массивной мантии  $\mathbf{V}_o \approx 0$  в нашей системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega = \Omega \mathbf{1}_z$ , так что суммарный момент инерции планеты равен нулю<sup>1)</sup>.

Вымораживание внешнего ядра во внутреннее приводит к следующим граничным условиям для уравнений (2) при  $r = r_i(t, \theta, \varphi)$ :

$$\rho_i \Delta S \frac{\partial r_i}{\partial t} = -\bar{\rho} \kappa_S \frac{\partial S}{\partial r}, \quad (3a)$$

$$\rho_i \Delta \xi \frac{\partial r_i}{\partial t} = -\bar{\rho} \kappa_\xi \frac{\partial \xi}{\partial r}. \quad (36)$$

<sup>1)</sup> Здесь и далее индекс «i» относится к переменным, взятым во внутренних, а индекс «o» — во внешних слоях.

Медленный темп роста внутреннего ядра

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} = -r_i \left( \frac{f_S}{c_p} \frac{\partial S}{\partial t} + f_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)$$

зависит от соответствующих чисел вымораживания  $f_{S,\xi}$ , которые для Земли в соответствии с оценками авторов [3] приблизительно равны  $f_S \approx 33$ ,  $f_\xi \approx 70$ ; скачки энтропии и концентрации при переходе через границу соответственно приблизительно равны  $\Delta S \approx 190$  Дж/кг·К и  $\Delta \xi \approx 0.065$ . Отметим, что значения этих величин, приведенные в [9], примерно в 2 раза меньше указанных выше.

Со стороны внешнего ядра не должно быть потока концентрации через непроницаемую границу с мантией, а для энтропии граничное условие определяется удельным тепловым потоком  $q_S$ . Отсюда получаем следующее внешнее граничное условие для уравнений (2) при  $r = r_o$ :

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = 0, \tag{4a}$$

$$-\bar{T} \bar{\rho} \kappa_S \frac{\partial S}{\partial r} = q_o - \bar{q}_o. \tag{4б}$$

Неадиабатический удельный тепловой поток  $q_o - \bar{q}_o$  определяется как разница между полным заданным удельным тепловым потоком  $q_o(t, \theta, \varphi)$  и потоком, обусловленным тепловой проводимостью  $\bar{q} = -c_p \kappa_T \bar{\rho} \bar{T}'$  при  $r = r_o$ , т.е.  $\bar{q}_o = \bar{q}(r_o)$ . Полный тепловой поток  $q_o$ , выходящий из земного ядра, недостаточно хорошо известен и в действительности может быть даже меньше, чем адиабатический поток, обусловленный проводимостью. Таким образом, даже знак среднего значения  $q_o - \bar{q}_o$  по поверхности сферы  $q_S$  не определен. Величина  $q_S \approx \pm 10^{-2}$  Вт/м<sup>2</sup> для Земли [2].

Пренебрегая нелинейными слагаемыми в (2), можно получить общее решение (2), удовлетворяющее граничным условиям (3), (4) для заданных параметров. Такое решение позволяет переписать основные уравнения (1), (2) в простой однородной (без слагаемых, обусловленных источниками) форме, определяя характерные значения неоднородных энтропии  $S$  и концентрации  $\xi$ . Исходное пренебрежение нелинейными слагаемыми в (2) также будет обосновано в асимптотической системе ниже.

### 3. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Источники в (1), (2) могут зависеть только от сферического радиуса  $r$  и времени  $t$ . Поэтому, чтобы

учесть их влияние, найдем радиально-симметричное решение  $\xi_r, S_r$  для линеаризованных уравнений (2а), (2б) из уравнений

$$\frac{(r^2 \bar{\rho} \kappa_\xi \xi_r')'}{r^2 \bar{\rho}} = \dot{\xi}_r + \dot{\xi}, \tag{5а}$$

$$\frac{(r^2 \bar{\rho} \bar{T} \kappa_S S_r')'}{r^2 \bar{\rho} \bar{T}} = \dot{S}_r + \dot{S} + \frac{(r^2 \bar{q})'}{r^2 \bar{\rho} \bar{T}} - \frac{\bar{\mu}' \kappa_\xi \xi_r'}{\bar{T}}. \tag{5б}$$

На уравнения (5а), (5б) накладываются четыре граничных условия в соответствии с условиями (3), (4):

$$\frac{\bar{\rho} \kappa_S}{\rho_i \Delta S} \frac{S_r'}{r_i} = \frac{f_S}{c_p} \dot{S}_r + f_\xi \dot{\xi}_r = \frac{\bar{\rho} \kappa_\xi}{\rho_i \Delta \xi} \frac{\xi_r'}{r_i} \text{ при } r = r_i, \tag{6а}$$

$$\xi_r' = 0, \quad \bar{T} \bar{\rho} \kappa_S S_r' = -q_S (= \text{const}) \text{ при } r = r_o. \tag{6б}$$

Параметры в (1)–(6) считаются постоянными, т.е.

$$\bar{\rho} \kappa_\xi = \rho \kappa, \quad \bar{\rho} \bar{T} \kappa_S = \rho T \kappa$$

с постоянными значениями  $\bar{\rho} = \rho$ ,  $\bar{T} = T$  и  $\kappa$ . Исключение составляют радиальные производные величин RS, которые с достаточной в данном случае точностью оцениваются через линейную радиальную зависимость:

$$\bar{T}' = -T'' r, \quad \bar{\mu}' = -\mu'' r,$$

$$\bar{\rho}' = -\rho'' r, \quad \bar{q} = -c_p \kappa_T \bar{\rho} \bar{T}' = (\bar{q}_o / r_o) r.$$

Используя указанные упрощения, можно получить решение (5) в следующем виде, удовлетворяющем внешним граничным условиям (6б):

$$\xi_r' = \frac{1}{r^2 \kappa} \int_{r_o}^r (\dot{\xi}_r + \dot{\xi}) r^2 dr,$$

$$S_r' + \frac{q_S}{T \rho \kappa} = \frac{1}{r^2 \kappa} \int_{r_o}^r \left( \dot{S}_r + \dot{S} + \frac{3q_o}{r_o \rho T} + \frac{\mu'' r \kappa \xi_r'}{T} \right) r^2 dr.$$

Предполагая, что искомое решение (5) представимо в виде

$$(\xi_r, S_r) = f(t) + F(r),$$

получаем

$$\xi_r' = \frac{\dot{\xi}_r + \dot{\xi}}{3\kappa} \left( r - \frac{r_o^3}{r^2} \right),$$

$$S_r' = \frac{\dot{S}_r + \dot{S} + 3q_o / r_o \rho T}{3\kappa} \left( r - \frac{r_o^3}{r^2} \right) + \mu'' \frac{\dot{\xi}_r + \dot{\xi}}{15\kappa T} \left( r^3 - \frac{5}{2} r_o^3 + \frac{3r_o^5}{2r^2} \right) - \frac{q_S}{T \rho \kappa}.$$

Эти уравнения после подстановки во внутреннее граничное условие (6а) дают общее решение (5), (6) в виде

$$\xi_r = \xi_o + \frac{(\dot{\xi}_r + \dot{\xi})}{3\kappa} \left( r^2 + \frac{r_o^3}{r} - \frac{3r_o^2}{2} \right), \quad (7a)$$

$$S_r = S_o + \frac{q_S}{T\rho\kappa}(r_o - r) + \frac{(\dot{S}_r + \dot{S} + 3q_o/r_o\rho T)}{3\kappa} \left( r^2 + \frac{r_o^3}{r} - \frac{3r_o^2}{2} \right) + \frac{\mu''(\dot{\xi}_r + \dot{\xi})}{6\kappa T} \left( \frac{r^4}{10} - r_o^3 r - \frac{3r_o^5}{5r} + \frac{3r_o^4}{2} \right), \quad (7б)$$

где  $\xi_o$  и  $S_o$  — константы, которые определяются из условия равенства нулю средних значений  $\xi_r$  и  $S_r$  и из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_r + \dot{\xi} = & \left\{ \frac{q_S}{T\rho} - \frac{\bar{q}_o}{r_o T\rho} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{c_p}{3f_s} (f_\xi \dot{\xi} + \frac{f_S}{c_p} \dot{S}) \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{\mu''}{30T} \left( 2r_i^3 - 5r_o^3 + \frac{3r_o^5}{r_i^2} \right) + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{c_p}{3f_s} \left( \frac{\rho}{3\rho_i \Delta\xi r_i} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) - f_\xi \right) - \frac{\Delta S}{3\Delta\xi} \right] \times \right. \\ & \left. \times \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \right\}^{-1}, \quad (7в) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_r + \dot{S} = & \frac{c_p}{f_s} (\dot{\xi}_r + \dot{\xi}) \times \\ & \times \left[ \frac{\rho}{3\rho_i \Delta\xi r_i} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) - f_\xi \right] + \\ & + \frac{c_p}{f_s} \left( f_\xi \dot{\xi} + \frac{f_S}{c_p} \dot{S} \right). \quad (7г) \end{aligned}$$

Для вычисления  $\xi_o$  и  $S_o$  воспользуемся интегралами по объему внешнего ядра FOC (Fluid Outer Core) [8]:

$$\int_{FOC} \bar{\rho} S_r dV = 4\pi\rho \int_{r_i}^{r_o} S_r r^2 dr = 0, \quad (8a)$$

$$\int_{FOC} \bar{\rho} \xi_r dV = 4\pi\rho \int_{r_i}^{r_o} \xi_r r^2 dr = 0. \quad (8б)$$

На рис. 1 приведены графики концентрации и энтропии для значений параметров, использованных авторами [8] при построении их численного решения; параметры  $r_o = 3.480 \cdot 10^6$  м,  $r_i = 1.222 \cdot 10^6$  м,

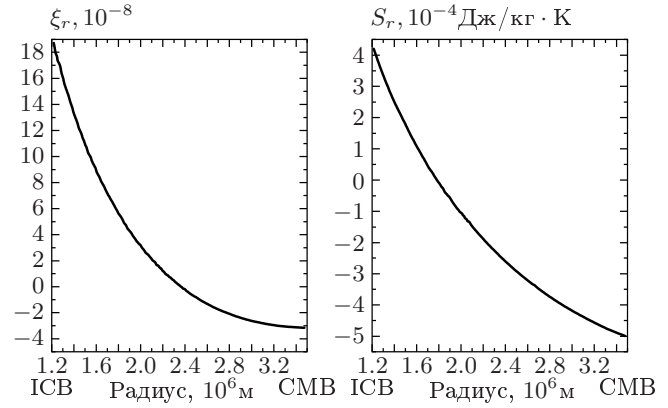


Рис. 1. Распределение по радиусу сферически-симметричной массовой доли легкой компоненты (концентрации)  $\xi_r$  и удельной энтропии  $S_r$  для значений параметров из [5]

$\rho = 11 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_i = 12.1666 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> взяты из сейсмической модели PREM [10];  $c_p = 840$  Дж/кг·К,  $T = 4800$  К,  $\mu'' = 2 \cdot 10^{-6}$  с<sup>-2</sup>,  $T'' = 2.5 \cdot 10^{-10}$  К/м<sup>2</sup>,  $\kappa_T = 5 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\bar{q}_o = 4 \cdot 10^{-2}$  Вт/м<sup>2</sup>,  $f_\xi = 70$ ,  $f_S = 33$ ,  $\Delta\xi = 0.065$ ,  $\Delta S = 190$  Дж/кг·К,  $q_S = 1.4 \cdot 10^{-2}$  Вт/м<sup>2</sup>,  $\kappa = 2$  м<sup>2</sup>/с и  $\dot{\xi} = 5 \cdot 10^{-20}$  с<sup>-1</sup>,  $\dot{S} = -1 \cdot 10^{-16}$  Вт/кг·К из [8]. При этом получаем, что  $S_o = -4.999 \cdot 10^{-4}$  Дж/кг·К,  $\xi_o = -2.976 \cdot 10^{-8}$ . Полученные значения сферически-симметричной энтропии и концентрации всего в несколько раз отличаются от результатов численного магнитогидродинамического моделирования [8].

Полученные нами типичные значения градиентов этих величин практически совпадают с результатами [2, 8], несмотря на то что в этих работах значения энергии не учтенного нами магнитного поля на несколько порядков превышают энергию поля скорости. Поэтому найденное нами чисто диффузионное решение (7) должно определять источники не только немагнитной, но и МГД-конвекции.

Все величины используемых в (7) параметров известны с достаточной точностью, за исключением коэффициента диффузии  $\kappa$ , среднего теплового потока  $q_S$  и временных производных  $\dot{\xi}$  и  $\dot{S}$ . Последние прямо связаны с относительно хорошо известными тепловыми и композиционными потоками в планетах. Одну из этих производных можно исключить из решения, используя уравнение общего энергетического баланса во внешнем ядре Земли в форме, приведенной в уравнении (11) в [5]

$$M_o (\bar{T}_* \dot{S} + \bar{\mu}_* \dot{\xi}) = -Q_o + L\dot{M}_i + Q_i, \quad (9)$$

где  $M_o$  — масса внешнего ядра,  $L$  — внутреннее тепло, высвобождающееся при вымораживании,  $M_i$  — масса внутреннего ядра. Следуя [2, 3, 9] и PREM [10], находим  $M_o = 1.9 \cdot 10^{24}$  кг, а  $\bar{T}_*$ ,  $\bar{\mu}_*$  близки к рассмотренным выше значения  $\bar{T}$ ,  $\bar{\mu}$ . Положительные величины  $Q_o$  и  $Q_i$  — полные радиальные тепловые потоки соответственно из внешнего ядра и во внешнее ядро. Притоком тепла из внутреннего ядра  $Q_i$ , а также любыми вкладами энергии, связанными с прецессионными и приливо-отливными процессами во внешнем ядре, при записи уравнения энергетического баланса можно пренебречь, поскольку они значительно меньше по сравнению с  $Q_o$ . Кроме того, при записи баланса пренебрегается любыми вкладами энергии, создаваемыми радиоактивностью в ядре, которые в настоящее время точно не известны. Величину  $\dot{\bar{\xi}}$  можно оценить и с помощью скорости роста внутреннего ядра

$$\dot{\bar{\xi}} = \bar{\xi} \frac{\dot{M}_i}{M_o} = \bar{\xi} \frac{4\pi r_i^2 \rho_i \dot{r}_i}{M_o}. \quad (10a)$$

А после подстановки этого выражения в уравнение энергетического баланса и замены в нем полных тепловых потоков на удельные получим и связь величины  $\dot{\bar{S}}$  со скоростью роста внутреннего ядра:

$$\dot{\bar{S}} = \frac{4\pi}{TM_o} [-r_o^2(q_s + \bar{q}_o) + r_i^2 \rho_i \dot{r}_i (L - \mu \bar{\xi})]. \quad (10b)$$

Таким образом, задавая скорость роста внутреннего ядра  $\dot{r}_i$ , коэффициент переноса  $\kappa$  и тепловой поток  $q_s$ , мы всегда можем получить из (7)–(10) чисто диффузионное и сферически-симметричное решения  $(\xi_r, S_r)$  линеаризованных уравнений тепломассопереноса (2), удовлетворяющих условиям (3), (4) на границах жидких ядер планет.

#### 4. ОДНОРОДНАЯ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СИСТЕМЫ

Заменяя в (1), (2)  $S$  на  $S + S_r$ ,  $\xi$  на  $\xi + \xi_r$ , где  $S_r(t, r)$ ,  $\xi_r(t, r)$  — рассмотренные выше сферически-симметричные решения (7) уравнений (5), (6), и используя параметры из разд. 3, получим следующую однородную систему:

$$\nabla(\bar{\rho}\mathbf{V}) = 0, \quad (11a)$$

$$\kappa_V \nabla^2 \mathbf{V} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \nabla P - (T''S + \mu''\xi)\mathbf{r}, \quad (11b)$$

$$\kappa \nabla^2 \xi = \frac{D\xi}{Dt} + \xi'_r V_r, \quad (12a)$$

$$\kappa \nabla^2 S = \frac{DS}{Dt} + S'_r V_r + \frac{\mu''\kappa}{T} r \frac{\partial \xi}{\partial r}. \quad (12b)$$

Здесь  $P$  — обобщенное давление, такое что

$$\nabla P = \nabla \frac{p}{\rho} - (T''S_r + \mu''\xi_r)\mathbf{r}.$$

Решения системы (11), (12) должны удовлетворять граничным условиям

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_i \text{ при } r = r_i(t, \theta, \varphi), \quad (13a)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_o \text{ при } r = r_o, \quad (13b)$$

$$\rho_i \Delta S \frac{\partial r_i}{\partial t} = -\bar{\rho} \kappa \frac{\partial S}{\partial r}, \quad (14a)$$

$$\rho_i \Delta \xi \frac{\partial r_i}{\partial t} = -\bar{\rho} \kappa \frac{\partial \xi}{\partial r} \text{ при } r = r_i(t, \theta, \varphi), \quad (14b)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = 0, \quad (15a)$$

$$-\bar{T} \bar{\rho} \kappa_S \frac{\partial S}{\partial r} = q \text{ при } r = r_o. \quad (15b)$$

Заданный тепловой поток  $q$  имеет нулевое среднее значение, вычисленное по поверхности внешней сферы при  $r = r_o$ .

В качестве оптимальных единиц измерения энтропии и концентрации легкой примеси естественно выбрать характерные значения радиально-симметричного решения (7), т. е.  $S_*$  и  $\xi_*$ . Измеряя далее расстояния через радиус внутреннего ядра  $r_i$ , скорость — через типичное дифференциальное вращение  $r_i \Delta \Omega$  и время — через  $1/\Delta \Omega$  (т. е.  $r := r_i r$ ,  $t := t/\epsilon \Omega$ ,  $\mathbf{V} := r_i \epsilon \Omega \mathbf{V}$ ,  $\xi := \xi_* \xi$ ,  $S := S_* S$ ), получаем из однородной системы (11), (12) безразмерную асимптотическую систему:

$$\nabla \mathbf{V} = ar V_r, \quad (16a)$$

$$\epsilon \frac{D\mathbf{V}}{Dt} - (hS + \xi)\mathbf{r} + 2\mathbf{1}_z \times \mathbf{V} + \nabla P = E_V \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (16b)$$

$$\epsilon \left( \frac{D\xi}{Dt} + \xi'_r V_r \right) = E_\xi \nabla^2 \xi, \quad (17a)$$

$$\epsilon \left( \frac{DS}{Dt} + S'_r V_r \right) + \frac{\epsilon}{R} r \frac{\partial \xi}{\partial r} = E_S \nabla^2 S, \quad (17b)$$

$$\epsilon = \frac{\mu'' r_i \xi'_*}{\Omega^2} \ll 1, \quad (18a)$$

$$E_{V, \xi, S} = \frac{\kappa_V \xi_* S}{r_i^2 \Omega} \ll 1. \quad (18b)$$

Здесь  $\epsilon = \Delta \Omega / \Omega$  — главный асимптотический параметр (число Россби), характеризующий очень малое отклонение от почти «твердотельного» вращения в рассматриваемом сферическом слое. Малые числа  $E_{V, \xi, S}$  можно назвать обобщенными числами

Экмана, поскольку как при молекулярном, так и при «турбулентном» тепломассопереносе для коэффициента вязкости  $\kappa_V$  естественно выбирать то же значение, что и для коэффициента диффузии  $\kappa_{\xi,S}$ . Прочие параметры выбраны из геофизических соображений:

$$a = \frac{r_i^2 \rho''}{\rho} < 1, \quad h = \frac{T'' S'_*}{\mu'' \xi'_*} < 1, \quad (19)$$

$$R = \frac{T S'_* r_i}{\Omega \kappa_{\xi}} \gg 1$$

( $a$  — стратификация,  $h$  — тепловая плавучесть и  $R$  — число Рэлея). На асимптотическую систему (16), (17) накладываются следующие десять безразмерных граничных условий:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_o, \quad \xi' = 0, \quad S' = -q(t, \theta, \varphi) \quad (20)$$

при  $r = r_o/r_i, \quad \int q d^2 r = 0,$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_i, \quad E_S I_S S' = \epsilon (I_t \dot{S} + \dot{\xi}) = E_{\xi} I_{\xi} \xi' \quad (21)$$

при  $r = 1.$

Здесь заданный тепловой поток  $q$  имеет нулевое среднее значение, вычисленное по поверхности внешней сферы при  $r = 1$ . Модуль внутренней угловой скорости вращения  $\omega_i$  меньше или порядка единицы, а его характерный масштаб  $\Delta\Omega$  определяется уравнением (18а). Значения величин, задаваемые внутренними граничными условиями, и соответствующие характерные геофизические значения определяются следующим образом:

$$I_S = \frac{\rho S'_*}{\rho_i \Delta S f_{\xi} \xi'_*} \approx I_{\xi} = \frac{\rho}{\rho_i \Delta \xi f_{\xi}} \approx \frac{1}{5}, \quad (22)$$

$$I_t = \frac{f_S S'_*}{c_p f_{\xi} \xi'_*} \approx 2.$$

Асимптотический параметр  $\epsilon$  также является параметром, управляющим конвекцией, в соответствии с его определением (18а). Таким образом, в момент начала конвекции величина  $\epsilon$  должна возрастать от нуля. Это дает основания пренебрегать нелинейными слагаемыми в (2), что мы и сделали в предыдущем разделе и ниже. При развившейся конвекции подобное пренебрежение уже не всегда может быть оправдано, поскольку в (16)–(21) присутствуют и другие малые параметры  $E_V \sim E_S \sim E_{\xi} \ll 1$ . Связанные с последними эффекты могут оказаться уже не так существенны, как эффекты, обусловленные возрастанием  $\epsilon$ . Это потребует рассмотрения сначала асимптотического предела по фиксированным числам Экмана, а потом по числу Россби,

что, по-видимому, приведет к известным конвективным решениям (например, см. [11]). Исследуя ниже неизученное начало конвекции в ядрах планет, мы сначала вычислим асимптотический предел по малому параметру  $\epsilon$ , а потом — по  $E$ .

### 5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Будем искать решение (16), (17) в виде разложения по степеням малого параметра  $\epsilon$ :

$$(\mathbf{V}, P, \xi, S) = (\mathbf{V}_0, P_0, \xi_0, S_0) + (\mathbf{V}_1, P_1, \xi_1, S_1)\epsilon + O(\epsilon^2). \quad (23)$$

Энтропия  $S$  и концентрация  $\xi$  в нулевом порядке тождественно равны нулю согласно следствию из теоремы Неймана:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \xi_0 &= 0, \\ \xi'_0(r=1, r=r_o/r_i) &= 0, \\ \int \xi_0 d^3 r &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \xi_0 = 0. \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 S_0 &= 0, \\ S'_0(r=1, r=r_o/r_i) &= -q = 0, \\ \int S_0 d^3 r &= 0, \end{aligned} \right\} \rightarrow S_0 = 0. \quad (25)$$

На уравнения для скорости в нулевом порядке

$$\nabla \mathbf{V}_0 = arV_{0r}, \quad 2\mathbf{1}_z \times \mathbf{V}_0 + \nabla P_0 = E_V \nabla^2 \mathbf{V}_0, \quad (26)$$

накладываются соответствующие граничные условия (20), (21), которые при бесконечно тяжелой твердой мантии в терминах дифференциального вращения  $d(t)$  и прецессии  $p(t)$  внутреннего твердого ядра принимают следующий вид:

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{0}, \quad (27a)$$

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{1}_{\varphi} [d \sin \theta - p \cos \theta \cos(\varphi - \varphi_p)] - \mathbf{1}_{\theta} p \sin(\varphi - \varphi_p). \quad (27b)$$

Эти условия определяют  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_0(E_V, d, p, \mathbf{r})$ , как будет показано ниже.

После перехода к (почти невязкому) приближению быстрого вращения получаем

$$\delta \equiv \sqrt{E_V} \ll 1 \rightarrow (\mathbf{V}_0, P_0) = (\mathbf{V}_{00}, P_{00}) + (\mathbf{V}_{01}, P_{01})\delta + O(\delta^2) + \dots \quad (28)$$

Вне тонких сдвиговых (при  $s \equiv r \sin \theta = 1$ ) и пограничных ( $r = 1, r = r_o/r_i$ ) слоев имеем

$$\nabla \mathbf{V}_{00} = arV_{00r}, \quad 2\mathbf{1}_z \times \mathbf{V}_{00} = -\nabla P_{00}. \quad (29)$$

Условия непроникновения

$$V_{00r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 1, \quad r = r_o/r_i$$

и уравнения (29) дают условия

$$V_{00\theta} = 0, \tag{30a}$$

$$V_{00r} = 0, \tag{30б}$$

$$V_{00\varphi} = V_{00\varphi}(t, s), \tag{30в}$$

$$P_{00} = P_{00}(t, s). \tag{30г}$$

Внутри пограничных слоев Экмана условия (30б) и (30в) остаются справедливыми, в то время как  $V_{00\theta} \neq 0$  и  $P_{00} = 0$ , тогда уравнения для скорости (26) приобретают вид (за исключением ее геофизической части)

$$-2V_{00\varphi} \cos \theta = \delta^2 V_{00\theta}''', \tag{31a}$$

$$2V_{00\theta} \cos \theta = \delta^2 V_{00\varphi}'''. \tag{31б}$$

Для уравнений (31) должны выполняться граничные условия (27), в то время как вне пограничных слоев имеем  $V_{00\theta} \rightarrow 0$  и  $V_{00\varphi} \rightarrow (30в)$ .

Таким образом, параметр  $p \sim \max(\delta, \epsilon)$  в (27б) является малым и в главном порядке рассматриваемое течение, поддерживаемое при  $d \sim 1$  (см. ниже) из (27), симметрично относительно оси вращения. Решение уравнений (31) с учетом (30) дает начальный профиль нулевого порядка дифференциального вращения вне (при  $|\eta| \gg 1$ ) и внутри (при  $\eta \sim 1$ ) пограничных слоев Экмана [12] в виде

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \frac{V_{00\varphi}}{s} = d(1 - e^{\eta_o} \cos \eta_o) \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{(1 - e^{-\eta_i} \cos \eta_i) \sqrt[4]{1 - s^2}}{\sqrt[4]{1 - s^2} + \sqrt[4]{1 - s^2} r_i^2 / r_o^2} \right], \quad s \leq 1, \tag{32} \\ \omega &= 0, \quad s > 1. \end{aligned}$$

Здесь

$$\eta_{i,o} \equiv (r_{i,o} - 1) \cos \theta / \delta$$

— «растянутые» переменные во внутреннем и внешнем пограничных слоях Экмана при  $1 \geq r \geq r_o/r_i$ .

Уравнение (32) определяет внутренний вязкий вращающий момент  $M$  [13] в размерных единицах:

$$\begin{aligned} M &= -(r_i^3 \kappa_V \rho \epsilon \Omega) 4\pi \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial r} \right]_{r=1} \sin^3 \theta d\theta \approx \\ &\approx r_i^4 \rho (\epsilon d \Omega) \sqrt{\kappa_V \Omega}. \tag{33} \end{aligned}$$

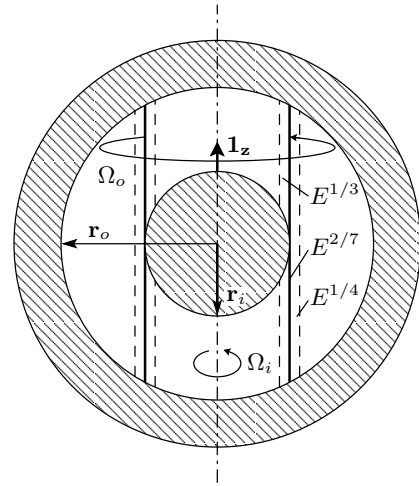


Рис. 2. Структура симметричного относительно оси вращения течения в сферическом слое с внутренним радиусом  $r_i$ , внешним радиусом  $r_o$  и малым числом Экмана  $E$ . Внешняя угловая скорость вращения  $\Omega_o$  чуть меньше внутренней скорости  $\Omega_i$

Приравнивая выражение для возрастающего углового момента к выражению (33) при постоянной угловой скорости вращения  $\epsilon d \Omega$  и плотности  $\rho_i$  внутренней сферы, можно записать уравнение момента инерции  $I$

$$\dot{I}(\Omega + \epsilon d \Omega) = M, \tag{34a}$$

где

$$I = (8\pi/15) r_i^5 \rho_i. \tag{34б}$$

Учитывая малость  $\epsilon$ , получаем из (33) и (34) оценку

$$\epsilon d \Omega \approx 10 r_i \sqrt{\Omega / \kappa_V} \tag{35}$$

для более высокой угловой скорости вращения внутренней сферы относительно внешней. Это дает

$$d \approx \frac{10}{\tau_i \Omega \epsilon E_V^{1/2}} = 1$$

для параметров планет земного типа  $\tau_i \equiv r_i / \dot{r}_i = 10^{17}$  с (примерно 3 млрд лет [2, 9]),  $\Omega = 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>, типичного  $\epsilon = 10^{-5}$  из предыдущего раздела и  $E_V = 10^{-14}$  с молекулярной вязкостью  $\kappa_V \approx 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с.

На рис. 2 приведена структура осесимметричного течения (32), генерируемого за счет более быстрого вращения внутренней сферы (твердого ядра) относительно внешней (мантии). Это более быстрое вращение формирует в жидком внешнем ядре так называемую колонну Тейлора — объем жидкости, увлекаемый движущимся в жидкости твердым телом, когда основными силами в системе являются



сила Кориолиса и градиент давления, а влияние вязкости мало. Ее поверхность носит название тангенциального цилиндра. Образующие этого цилиндра параллельны оси вращения и касаются внутреннего ядра в точках экватора. Динамика течения внутри и вне тангенциального цилиндра сильно различается.

Жидкость за пределами тангенциального цилиндра участвует в твердотельном вращении со скоростью мантии, а жидкость внутри цилиндра движется со скоростью промежуточной между скоростями внутреннего ядра и мантии. Мелкомасштабные течения сконцентрированы в пограничном слое Экмана и в свободном сдвиговом слое, который обеспечивает возвратный меридиональный поток и сглаживает сильные градиенты у тангенциального цилиндра. Структура этого слоя определена Стюартсоном [14, 15]. Скачок скорости уничтожается за пределами тангенциального цилиндра в слое Стюартсона толщиной  $E^{1/4}$ . Оставшийся сдвиговый разрыв устраняется внутри тангенциального цилиндра в слое Стюартсона толщиной  $E^{2/7}$ , а разрыв непрерывности меридионального потока жидкости — в слое толщиной  $E^{1/3}$ .

### 6. ДОПУСТИМЫЕ ДИФFUЗИОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Определим диапазон теплового потока  $q_S$  и скоростей роста твердого ядра  $\dot{r}_i$ , в котором полностью работает полученное в разд. 3 сферически-симметричное диффузионное решение. Для того чтобы использовалось как можно меньше недостаточно хорошо известных параметров, исключим из уравнений (7в) и (7г) временные производные  $\dot{\xi}$  и  $\dot{S}$ . Используя уравнения (8а) и (8б) и граничное условие

$$\dot{r}_i = -\frac{\rho}{\rho_i \Delta \xi} (\dot{\xi}_r + \dot{\xi}) \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right), \quad (36)$$

выразим через скорость роста внутреннего ядра  $\dot{r}_i$  сумму

$$f_\xi \dot{\xi} + \frac{f_S}{c_p} \dot{S} = \dot{r}_i \frac{4\pi r_i^2 \rho_i}{M_o} \left[ f_\xi \bar{\xi} + \frac{f_S}{c_p T} (L - \mu \bar{\xi}) \right] \times \times \frac{f_S}{c_p} \frac{4\pi r_o^2}{T M_o} (q_S + \bar{q}_o). \quad (37)$$

Подставляя (37) в (7в) и (7г) и полученный результат в условие (36), получаем уравнение для опреде-

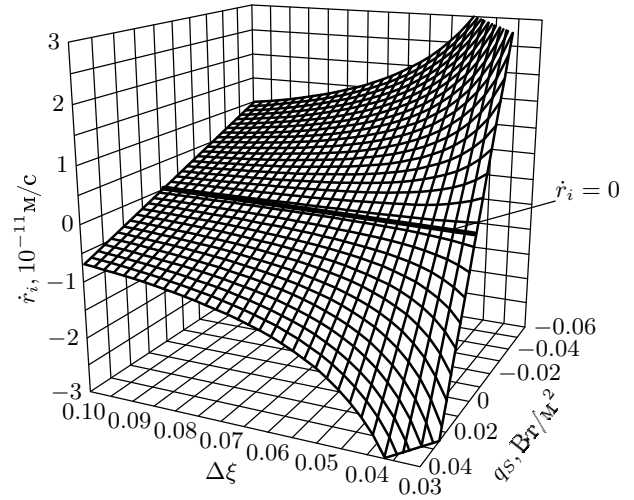


Рис. 3. Зависимость скорости роста внутренней сферы (ядра)  $\dot{r}_i$  от величины удельного неадиабатического теплового потока  $q_S$  и от скачка концентрации  $\Delta \xi$

ления  $\dot{r}_i$  через известные параметры и тепловой поток  $q_S$ :

$$\dot{r}_i = - \left\{ \frac{\rho}{3\rho_i \Delta \xi T} \frac{1}{D} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \times \times \left[ q_S \left( \frac{1}{\rho} + \frac{4\pi r_o^2}{3M_o} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \right) - - \bar{q}_o \left( \frac{1}{\rho r_o} - \frac{4\pi r_o^2}{3M_o} \right) \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \right] \right\} \times \times \left\{ 1 - \frac{4\pi \rho r_i^2}{9\Delta \xi M_o} \frac{c_p}{f_S} \frac{1}{D} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right)^2 \times \times \left[ f_\xi \bar{\xi} + \frac{f_S}{c_p T} (L - \mu \bar{\xi}) \right] \right\}^{-1}, \quad (38)$$

где через  $D$  обозначен знаменатель из (7г):

$$D = \frac{\mu''}{30T} \left( 2r_i^3 - 5r_o^3 + \frac{3r_o^5}{r_i^2} \right) + + \left[ \frac{c_p}{3f_S} \left[ \frac{\rho}{3\rho_i \Delta \xi r_i} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) - f_\xi \right] - \frac{\Delta S}{3\Delta \xi} \right] \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right).$$

График зависимости скорости роста внутреннего ядра  $\dot{r}_i$  от величины теплового потока  $q_S$  представлен на рис. 3. Условие роста  $\dot{r}_i > 0$  не выполняется, если полный тепловой поток  $q_o$ , выходящий из земного ядра, больше адиабатического потока  $\bar{q}_o$ , обусловленного тепловой проводимостью (т.е. при  $q_S > 0$ ). При этом одного сферически-симметричного диффузионного решения недо-

статочно, и для обеспечения положительности скорости роста ядра необходима дополнительная (пусть и слабая) конвекция.

Наоборот, когда тепловой поток меньше адиабатического (т. е.  $q_S < 0$ ), диффузионное решение само (без конвекции) может поддерживать дифференциальное вращение (32). При этом скорость роста внутреннего ядра линейно растет с увеличением модуля теплового потока  $|q_S|$ . Так, для приведенного в [2] значения  $q_S = -0.01$  Вт/м<sup>2</sup> она составляет примерно  $0.27 \cdot 10^{-11}$  м/с. Для сравнения, предложенное авторами [9] значение  $\dot{r}_i \approx 10^{-11}$  м/с. В [3] используется меньшее значение  $\dot{r}_i = 0.6 \cdot 10^{-11}$  м/с, а численная модель [2], основывающаяся на возрасте внутреннего ядра примерно 1.3 млрд лет, дает  $\dot{r}_i \approx 1.3 \cdot 10^{-11}$  м/с.

После подстановки  $\dot{r}_i$  в (37) неопределенная сумма  $f_{\xi}\dot{\xi} + (f_S/c_p)\dot{S}$  в уравнениях (7) выражается уже только через  $q_S$  и известные величины, после чего можно переписать (7в) и (7г), исключив из них временные производные  $\dot{\xi}$  и  $\dot{S}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_r + \dot{\xi} = & \frac{1}{DT} \left[ q_S \left( \frac{1}{\rho} + \frac{4\pi r_o^2}{3M_o} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \right) - \right. \\ & \left. - \bar{q}_o \left( \frac{1}{\rho r_o} - \frac{4\pi r_o^2}{3M_o} \right) \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \right] \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{4\pi \rho r_i^2}{9\Delta\xi M_o} \frac{c_p}{f_S} \frac{1}{D} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right)^2 \times \right. \\ & \left. \times \left[ f_{\xi}\bar{\xi} + \frac{f_S}{c_p T} (L - \mu\bar{\xi}) \right] \right\}^{-1}, \quad (39a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_r + \dot{S} = & \frac{c_p}{f_S} \left[ \frac{\rho}{3\Delta\xi} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \times \right. \\ & \times \left( \frac{1}{\rho_i r_i} - \frac{4\pi r_i^2}{M_o} \left( f_{\xi}\bar{\xi} + \frac{f_S}{c_p T} (L - \mu\bar{\xi}) \right) \right) - f_{\xi} \right] \times \\ & \times \left( \dot{\xi}_r + \dot{\xi} \right) - \frac{4\pi r_o^2}{T M_o} (q_S + \bar{q}_o). \quad (39б) \end{aligned}$$

После подстановки (39а) и (39б) в (7а) и (7б) остаются два неопределенных параметра — средний тепловой поток  $q_S$  и коэффициент диффузии  $\kappa$ . Этот коэффициент определен с разбросом в несколько порядков, поэтому для определения характерных значений градиентов энтропии и концентрации и их зависимостей от величины теплового потока удобно ввести в рассмотрение безразмерные аналоги градиентов радиально-симметричного решения, из кото-

рых  $\kappa$  можно исключить, умножая  $\xi'_r$  и  $S'_r$  на комбинации  $\kappa\rho\mu''r_i^2/\bar{q}_o$  и  $\kappa\rho\mu''r_i^2/c_p\bar{q}_o$  соответственно, т. е.

$$\xi'_{dl} = \frac{\kappa\rho\mu''r_i^2}{\bar{q}_o}\xi'_r = \frac{\rho\mu''r_i^2}{\bar{q}_o} \frac{\dot{\xi}_r + \dot{\xi}}{3} \left( r - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right), \quad (40a)$$

$$\begin{aligned} S'_{dl} = & \frac{\kappa\rho\mu''r_i^2}{c_p\bar{q}_o}S'_r = \frac{\rho\mu''r_i^2}{c_p\bar{q}_o} \times \\ & \times \left[ \frac{\dot{S}_r + \dot{S} + 3q_o/r_o\rho T}{3} \left( r - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) + \right. \\ & \left. + \mu'' \frac{\dot{\xi}_r + \dot{\xi}}{15T} \left( r^3 - \frac{5}{2}r_o^3 + \frac{3r_o^5}{2r_i^2} \right) - \frac{q_S}{T\rho} \right]. \quad (40б) \end{aligned}$$

На рис. 4 приведены графики зависимостей безразмерных градиентов от величины теплового потока  $q_S$ , нормированной на адиабатический поток  $\bar{q}_o$ . Рассмотрены значения теплового потока  $q_S$  из промежутка  $-0.05$  Вт/м<sup>2</sup>  $< q_S < 0.08$  Вт/м<sup>2</sup>, таким образом, безразмерный параметр  $q_S/\bar{q}_o \in (-1.25; 2)$ . Промежуток значений теплового потока  $q_S$ , при которых минимумы градиентов достигаются на границе внутреннего ядра, включает в себя область значений  $q_S$ , для которой справедливо полученное сферически-симметричное диффузионное решение. Точные значения границ этой области будут вычислены ниже.

Скорость роста внутреннего ядра должна быть положительной величиной. Из этого следуют условия для определения диапазона теплового потока  $q_S$ , при котором полученное диффузионное решение будет удовлетворять данному требованию. Из граничного условия (6а) получаем

$$\xi'_r = \frac{\dot{\xi}_r + \dot{\xi}}{3\kappa} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) < 0, \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} S'_r = & \frac{\dot{S}_r + \dot{S} + 3q_o/r_o\rho T}{3\kappa} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) + \\ & + \mu'' \frac{\dot{\xi}_r + \dot{\xi}}{15T\kappa} \left( r_i^3 - \frac{5}{2}r_o^3 + \frac{3r_o^5}{2r_i^2} \right) - \frac{q_S}{T\rho\kappa} < 0. \quad (41б) \end{aligned}$$

Множитель

$$\frac{\rho\mu''r_i^2}{3\bar{q}_o} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right)$$

в (41а) отрицателен, значит сумма  $\dot{\xi}_r + \dot{\xi}$  должна

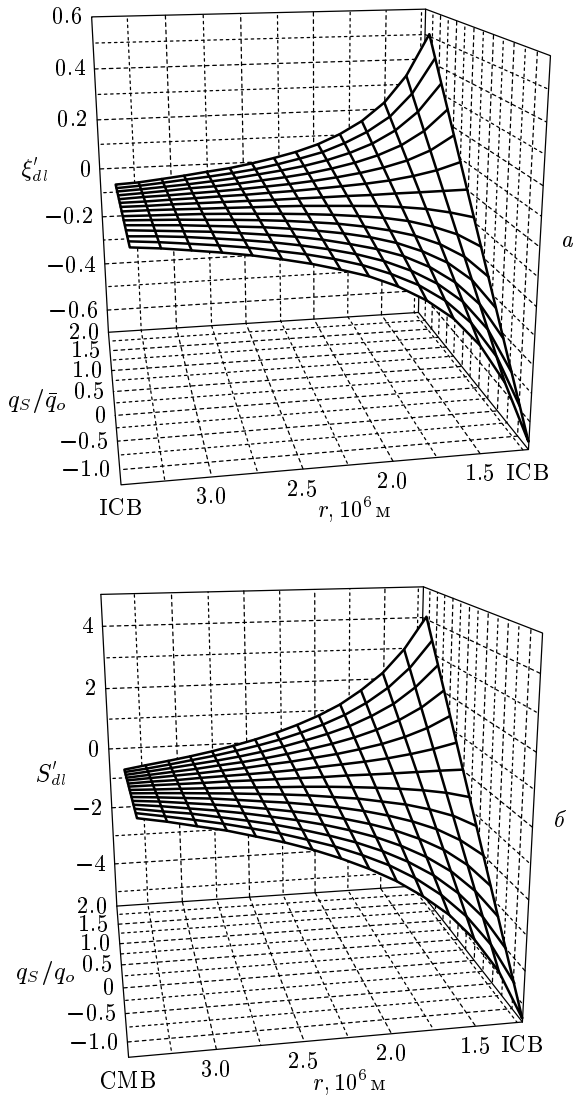


Рис. 4. Зависимость сферически-симметричного безразмерного градиента массовой доли легкой компоненты (концентрации)  $\xi'_{dl}$  (а) и удельной энтропии  $S'_{dl}$  (б) от неадиабатического  $q_s$ , нормированного на адиабатический тепловой поток  $\bar{q}_o$

быть положительна. Знак этой суммы определяется знаком множителя

$$\left[ q_s \left( \frac{1}{\rho} + \frac{4\pi r_o^2}{3M_o} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \right) - \bar{q}_o \left( \frac{1}{\rho r_o} - \frac{4\pi r_o^2}{3M_o} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \right) \right],$$

поскольку остальные множители положительны. Таким образом, получаем условие, ограничивающее  $q_s$

сверху:

$$q_s < \bar{q}_o \left( \frac{1}{\rho r_o} - \frac{4\pi r_o^2}{3M_o} \right) \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \times \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{4\pi r_o^2}{3M_o} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \right]^{-1}. \quad (42a)$$

Далее из (41б) получаем условие

$$\frac{\dot{S}_r + \dot{S} + 3q_o/r_o\rho T \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) - \frac{q_s}{T\rho}}{3} < \mu'' \frac{\dot{\xi}_r + \dot{\xi}}{15T} \left( -r_i^3 + \frac{5}{2} r_o^3 \frac{3r_o^5}{2r_i^2} \right).$$

При этом величина  $\dot{\xi}_r + \dot{\xi}$  в правой части положительна. Используя это условие, требование убывания энтропии со временем (охлаждение внутреннего ядра) и формулу (39б), получаем условие, ограничивающее значение теплового потока  $q_s$  снизу:

$$q_s > -\bar{q}_o\alpha, \quad (42б)$$

где коэффициент

$$\alpha = \left| \left[ \left( \frac{1}{\rho r_o} - \frac{4\pi r_o^2}{3M_o} \right) \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) C_\alpha - 4\pi \frac{f_s r_o^2 D}{c_p M_o} \right] \times \left[ \left( \frac{1}{\rho} + \frac{4\pi r_o^2}{3M_o} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \right) C_\alpha - 4\pi \frac{f_s r_o^2 D}{c_p M_o} \right]^{-1} \right|,$$

$$C_\alpha = \left[ \left( \frac{\rho}{3\Delta\xi} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right) \times \left( \frac{1}{\rho_i r_i} - \frac{4\pi r_i^2}{M_o} \left[ f_\xi \bar{\xi} + \frac{f_s}{c_p T} (L - \mu \bar{\xi}) \right] \right) - f_\xi \right) \times \left[ 1 - \frac{4\pi \rho r_i^2}{9\Delta\xi M_o} \frac{c_p}{f_s} \frac{1}{D} \left( r_i - \frac{r_o^3}{r_i^2} \right)^2 \times \left[ f_\xi \bar{\xi} + \frac{f_s}{c_p T} (L - \mu \bar{\xi}) \right] \right]^{-1} \right|.$$

Для значений параметров модели PREM [10] и  $\bar{\xi} = 0.07$ ,  $L = 1 \cdot 10^6$  Дж/кг [5] верхний предел величины теплового потока, при котором для описания течения достаточно только одного диффузионного решения без учета конвекции, равен  $q_s \approx -0.0095$  Вт/м<sup>2</sup>, а нижний —  $q_s \approx -0.043$  Вт/м<sup>2</sup>.

## 7. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя концентрическими сферами, быстро вращающимися вокруг одной оси со слегка различными скоростями (см. рис. 2), начали исследовать еще в середине прошлого века [12, 15]. Позже с его помощью предлагалось описывать как немагнитные [13], так и МГД-течения [2, 16] в ядрах Земли и других планет.

Однако до настоящей работы механизма для описания более быстрого вращения внутренней сферы (твердого ядра) относительно внешней (мантии) предложено не было. Оценка (35) впервые дает совершенно реалистическое значение угловой скорости вращения  $\epsilon d\Omega \approx 10^{-9} \text{ с}^{-1}$  твердого ядра относительно мантии для земных параметров роста радиуса ядра  $\dot{r}_i \approx 10^{-11} \text{ м/с}$  (см. [3, 9] и разд. 6 настоящей работы) и молекулярной вязкости  $\kappa_V \approx 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  [17].

Соответствующее симметричное относительно оси дифференциальное вращение и слабая меридиональная циркуляция (см. разд. 5 выше) могут оказаться недостаточными для возбуждения собственного магнитного поля планеты, описывая ситуацию подобную той, что существует в жидких ядрах Марса и Венеры. Достаточно мощное течение в первую очередь должно возбуждать резко несимметричное относительно оси вращения планеты магнитное поле. Если это несимметричное магнитное поле будет не в состоянии породить значимое несимметричное течение, планетарное динамо останется в кинематическом режиме, как это, по-видимому, наблюдается для Урана и Нептуна [18]. В более реалистичном для Земли, Сатурна и Юпитера динамическом режиме [5] несимметричное МГД-течение будет порождать уже преимущественно симметричное относительно оси вращения магнитное поле. Поэтому дальнейшее развитие предложенных в настоящей работе подходов позволит получить эффективное решение основных проблем планетарного МГД-динамо.

Таким образом, в работе получены следующие основные результаты.

1) Описана конвекция, управляющая композиционно-тепловыми эффектами при почти твердотельном вращении сферического слоя в неупругом приближении, подходящем для жидких ядер планет земного типа.

2) Найдено аналитическое сферически-симметричное решение уравнений теплотеноса и диффузии, позволяющее настолько упростить эти исходно

неоднородные уравнения, что они становятся полностью однородными.

3) Масштабированием уравнений плавучести и скорости и граничных условий получена безразмерная система, в которой в качестве асимптотических параметров использованы малые числа Россби и Экмана, характеризующие неоднородность и быстроту вращения.

4) Главный асимптотический порядок по числу Россби, а затем по числу Экмана дает решение, определяющее течение, поддерживаемое дифференциальным вращением твердых границ сферического слоя.

5) За счет роста внутренней сферы перераспределяется угловой момент в жидкой оболочке, что приводит к более быстрому вращению внутренней сферы относительно внешней (мантии).

Авторы признательны А. Soward, С. Jones, А. Ануфриеву и М. Решетняку за плодотворные дискуссии, способствовавшие улучшению этой работы. Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 99-00348).

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, *Phys. Earth Planet. Inter.* **91**, 63 (1995).
2. G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, *Contemporary Physics* **38**, 269 (1997).
3. S. I. Braginsky and P. H. Roberts, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **79**, 1 (1995).
4. P. H. Roberts, C. A. Jones, and A. R. Calderwood, in *Earth's Core and Lower Mantle*, ed. by C. A. Jones, A. M. Soward, and K. Zhang, Gordon and Breach, London (2001).
5. S. V. Starchenko and C. A. Jones, submitted to *Icarus* (2002).
6. С. В. Старченко, *ЖЭТФ* **115**, 1708 (1999); S. V. Starchenko, *NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry* **26**, 217 (2001).
7. S. V. Starchenko, *Phys. Earth Planet. Inter.* **117**, 225 (2000).
8. G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, *Physica D* **97**, 81 (1996).
9. J. R. Lister and B. A. Buffett, *Phys. Earth Planet. Inter.* **91**, 17 (1995).

10. A. M. Dziewonski and D. L. Anderson, *Phys. Earth Planet. Inter.* **25**, 297 (1981).
11. F. H. Busse, *J. Fluid Mech.* **44**, 441 (1970).
12. I. Proudman, *J. Fluid Mech.* **1**, 505 (1956).
13. Л. В. Никитина, А. А. Рuzмаикин, *Геомагнетизм и аэрономия* **30**, 127 (1990).
14. K. Stewartson, *J. Fluid Mech.* **3**, 299 (1957).
15. K. Stewartson, *J. Fluid Mech.* **26**, 131 (1966).
16. С. В. Старченко, *ЖЭТФ* **112**, 1 (1997).
17. G. A. Wijs et al., *Nature* **392**, 805 (1998).
18. A. A. Ruzmaikin and S. V. Starchenko, *Icarus* **93**, 82 (1991).