ЖЭТФ, 2002, том 121, вып. 3, стр. 596–602

ИЗИНГОВСКОЕ ОБМЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОПТИЧЕСКИХ ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ

А. Р. Кессель, И. С. Донская*

Казанский физико-технический институт им. Е. К. Завойского Российской академии наук 420029, Казань, Россия

Поступила в редакцию 10 июля 2001 г.

Показано, что косвенная связь между оптическими двухуровневыми системами через поле излучения имеет форму изинговского обменного взаимодействия, если связь атомов и поля осуществляется через электрические квадрупольные взаимодействия. Обсуждено проявление парного взаимодействия двухуровневых систем в виде неоднородной ширины оптического перехода и в кинетике неравновесных оптических процессов.

PACS: 42.50.-p

1. ВВЕДЕНИЕ

В оптике часто реализуется ситуация, когда оптические переходы возбуждаются между определенной парой уровней энергии атома (обычно это основной E_g и один из возбужденных E_e уровней энергии), а все остальные уровни в физических процессах не участвуют. Удобное описание таких ситуаций дает использование понятия двухуровневой системы и представления псевдоспина: изучаемая пара уровней энергии отдельного атома задается как собственные значения и состояния некоторого гамильтониана

$$H_S^j = \hbar\omega_0^j \hat{S}_j^z, \quad \hbar\omega_0^j = E_e^j - E_g^j, \tag{1}$$

имеющего форму оператора зеемановской энергии для частицы с эффективным псевдоспином $S_j = 1/2$ [1].

Из соображений четности (изучаемые состояния ψ_g и ψ_e обычно обладают различной четностью) можно заключить, что проекция оператора электрического дипольного момента атома $\mathbf{d}_j = e\mathbf{r}_j$ на состояния двухуровневой системы может содержать только недиагональные матричные элементы. Для атома в аксиально-симметричном электрическом кристаллическом поле решетки можно считать, что $\mathbf{d}_j = \mathbf{d}S_j^x$. В такой ситуации двухчастичное диполь-дипольное взаимодействие атомов будет содержать только произведения недиагональных операторов типа $\hat{S}_j^x\hat{S}_k^x$ [2].

Диполь-дипольные эффекты нашли свое отражение в обобщенных уравнениях Максвелла–Блоха. Необходимые изменения уравнений осуществляются феноменологически, посредством замены внешних для атомов электрических полей локальными полями от соседних атомов двухуровневой системы [3, 4]. В частности, в работе [4] перечислен целый ряд нелинейных оптических явлений, которые можно отнести на счет диполь-дипольных взаимодействий оптических атомов.

Между тем, ниже будет показано, что в дополнение к этому существует обменное взаимодействие псевдоспинов изинговского типа $\hat{S}_j^z\hat{S}_k^z$. Оно будет получено как косвенное взаимодействие диагональных энергетических составляющих псевдоспинов через электромагнитное поле вакуума. Предварительно сообщение об этих результатах опубликовано в работе [5].

2. МЕТОД ВЫВОДА ОПЕРАТОРА ПАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Структуру гамильтониана двух подсистем в задаче о косвенном взаимодействии можно в общем виде представить в форме

$$H = H_0 + V_{Sf}, \quad H_0 = H_S + H_f, \tag{2}$$

*E-mail: kessel@dionis.kfti.knc.ru

где H_S — гамильтониан динамической подсистемы, состоящей из невзаимодействующих между собой частиц, H_f — гамильтониан поля — переносчика взаимодействия, V_{Sf} — оператор взаимодействия между частицами двух подсистем.

Методика расчета косвенных взаимодействий [6, 7] состоит из двух этапов и строится на предположении, что для матричных элементов операторов выполняется неравенство:

$$|V_{Sf}| \ll |H_0|.$$

Первый этап — это переход к новому представлению с помощью унитарного преобразования $U = \exp\{-L\}$, где L — антиэрмитов оператор, удовлетворяющий условию

$$V_{Sf} + [H_0, L] = 0. \tag{3}$$

В результате этого, в новом представлении гамильтониан H приобретает форму

$$H \to \tilde{H} = H_S + H_f + \frac{1}{2}[V_{Sf}, L] + O(V_{Sf}^3), \tag{4}$$

т. е. не содержит линейные по V_{Sf} слагаемые. Решение операторного уравнения (3) имеет вид

$$L = \frac{1}{i\hbar} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon t} V_{Sf}(t)\, dt, \tag{5}$$

$$V_{Sf}(t) = \exp \frac{i(H_S + H_f)t}{\hbar} V_{Sf} \exp \frac{-i(H_S + H_f)t}{\hbar}.$$

Таким образом, генератор унитарного линейного преобразования L имеет порядок величины

$$L \sim \frac{|V_{Sf}|}{|H_0|}.$$

Второй этап заключается в усреднении выражения (4) для $\tilde{H}$ по состояниям поля — переносчика взаимодействия, так что член второго порядка

$$W_{SS} = \frac{1}{2}\langle [V_{Sf}, L] \rangle \tag{6}$$

теории возмущений в разложении (4) перестает зависеть от переменных переносчика взаимодействия, но сохраняет зависимость от динамических переменных различных частиц и вследствие этого приобретает смысл оператора их косвенного взаимодействия. В большинстве случаев это усреднение проводить не приходится, так как члены второго порядка в разложении (4) не содержат операторов поля.

3. ГАМИЛЬТОНИАН РЕШАЕМОЙ ПРОБЛЕМЫ

Для простоты записи будем считать, что уровни энергии двухуровневой системы определяются атомной оболочкой, содержащей один электрон; $e, m, \mathbf{p}$ — заряд, масса и импульс электрона. Гамильтониан атома j в поле излучения имеет вид [8]

$$H^j = H_0^j + H_1^j + H_2^j, \tag{7}$$

где

$$H_0^j = H_{e0}^j + H_{ph}^0, \quad H_{e0}^j = \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} + eV(\mathbf{R}_j), \tag{8}$$

$$H_1^j = -\mathbf{d}_j\, \mathbf{E}(\mathbf{R}_j, t), \quad H_2^j = Q_j \nabla_R \mathbf{E}(\mathbf{R}_j). \tag{9}$$

Здесь использовано мультиплетное разложение, причем H_1 соответствует электрическому дипольному, а H_2 — электрическому квадрупольному взаимодействию атомного электрона с электромагнитным полем, H_{e0}^j — основной гамильтониан атома j (ниже будет использоваться только «проекция» этого гамильтониана на состояния двухуровневой системы в форме (1)), $\mathbf{d}_j = e\mathbf{r}_j$ и $Q_j = e\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_j/2$ — операторы дипольного и квадрупольного момента атома j, $\mathbf{R}_j$ и $\mathbf{r}_j$ — радиус-векторы соответственно ядра j и электрона. Используя определение напряженности электромагнитного поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{R}, t)}{\partial t},$$

представим H_2^j в форме

$$H_2^j = -\frac{e}{2c} \sum_{\alpha, \beta} \mathbf{r}_\alpha^j \mathbf{r}_\beta^j \frac{\partial^2 A_\alpha(\mathbf{R}_j, t)}{\partial R_\beta \partial t}. \tag{10}$$

Выражение (9) для H_1 получено в дипольном приближении. Рассмотрение гамильтониана H_1 по методике, описанной в предыдущем разделе, приводит к известному выражению для оператора диполь-дипольной связи, содержащему парные операторы вида $S_i^x S_j^x$, $S_i^y S_j^y$ [2].

Во многих случаях оператором H_2 оказывалось возможным пренебречь. Ниже будет показано, что вклад этого взаимодействия в парную связь двухуровневых систем отнюдь не мал и может влиять на наблюдаемые физические свойства.

Подставив выражение векторного потенциала в представлении взаимодействия:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V}} \times \\ \times \sum_{\mathbf{k}, \mu} \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu}}{\sqrt{\omega_k}} \left\{ a_{\mathbf{k}\mu}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} + a_{\mathbf{k}\mu}^{+}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \right\}$$

в выражение для H_2^j, можно получить

$$H_2^j = -\frac{e}{2}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V}} \times \times \sum_{\mathbf{k},\mu} \omega_k^{1/2} \left\{ a_{\mathbf{k}\mu}(t) - a_{-\mathbf{k}\mu}^{+}(t) \right\} \times \times \sum_{\alpha,\beta} (\mathbf{r}_\alpha^j \mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu}^\alpha)(\mathbf{r}_\beta^j \mathbf{k}_\beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_j}. \quad (11)$$

Здесь $a_{\mathbf{k}\mu}^{+}$ и $a_{\mathbf{k}\mu}$ — операторы рождения и уничтожения фотона поляризации μ ($\mu = 1, 2$) с энергией $\hbar\omega_k$, волновым вектором $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu}^\alpha$ — α-компонента вектора поляризации, V — объем квантования поля излучения.

Поскольку, как отмечалось выше, собственные состояния ψ_g и ψ_e обладают разной четностью, четные относительно пространственных отражений операторы обладают только диагональными матричными элементами, что позволяет представить произведение $\mathbf{r}_\alpha^j \mathbf{r}_\beta^j$ для оптической двухуровневой системы в виде матрицы (см. Приложение)

$$\| \mathbf{r}_\alpha^j \mathbf{r}_\beta^j \| = \left(\boldsymbol{\rho}_\alpha^j \hat{S}_z^j + \boldsymbol{\rho}^{j'} \hat{E} \right) \delta_{\alpha\beta},$$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\rho}_\alpha^j = \langle \psi_e | (\mathbf{r}_\alpha^j)^2 \psi_e \rangle - \langle \psi_g | (\mathbf{r}_\alpha^j)^2 \psi_g \rangle.$$

Слагаемое, пропорциональное операторной единице $\hat{E}$, не порождает наблюдаемых эффектов и поэтому ниже не рассматривается. Поскольку выбор основного гамильтониана пропорциональным z-компоненте псевдоспина нарушает сферическую симметрию, следует считать, что, вообще говоря, $\rho_x = \rho_y \neq \rho_z$. Такое нарушение симметрии возникает в результате взаимодействия атома с электрическим полем кристаллической решетки. Ось z системы координат определяется этим выбором и не может быть ориентирована произвольно.

Перейдем к рассмотрению системы двухуровневых атомов. Подставляя первое соотношение из формул (12) в выражение (11) и суммируя по всем атомам образца, представим гамильтониан двухуровневых систем, взаимодействующих с полем, в форме

$$H_2 = -e\sqrt{\frac{\pi\hbar}{2V}} \sum_j S_j^z \sum_{\mathbf{k},\mu} G_{\mathbf{k}\mu}(\mathbf{R}_j) D_{\mathbf{k}\mu}(t), \quad (13)$$

$$D_{\mathbf{k}\mu}(t) = (a_{\mathbf{k}\mu}(t) - a_{-\mathbf{k}\mu}^{+}(t)),$$

$$G_{\mathbf{k}\mu}(\mathbf{R}_j) = \sqrt{\omega_k} \sum_\alpha (k_a \mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu}^\alpha) \boldsymbol{\rho}_\alpha e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_j}.$$

Оператор энергии электромагнитного поля в представлении вторичного квантования, как известно, равен

$$H_f = \hbar \sum_{\mathbf{k},\mu} \omega_k \left(a_{\mathbf{k}\mu}^{+} a_{\mathbf{k}\mu} + \frac{1}{2} \right). \quad (14)$$

И наконец, оператор H_{0e}^j может иметь большой набор собственных состояний ψ_α^j, пара из которых, ψ_g^j и ψ_e^j, выделена нами в качестве оптической двухуровневой системы и характеризуется в представлении псевдоспина гамильтонианом (1).

4. ПАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХУРОВНЕВЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Пользуясь формулами разд. 2, вычислим оператор парного взаимодействия для физической системы, описанной в разд. 3. В качестве гамильтонианов H_S, H_f и V_{Sf} в рассматриваемой задаче будут фигурировать операторы (1), (14) и (13). В таком случае генератор преобразования будет иметь вид

$$L = e\sqrt{\frac{\pi}{2V\hbar}} \sum_j S_j^z \sum_{\mathbf{k},\mu} G_{\mathbf{k}\mu}(\mathbf{R}_j) I_{\mathbf{k}\mu},$$
$$I_{\mathbf{k}\mu} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \frac{a_{\mathbf{k}\mu}}{\omega_k + i\varepsilon} + \frac{a_{-\mathbf{k}\mu}^{+}}{\omega_k - i\varepsilon} \right\}. \quad (15)$$

Подставив его в (6), получим следующее выражение для оператора взаимодействия двухуровневых систем:

$$W_{SS} = \hbar \sum_{ij} U_2(\mathbf{R}_{ij}) S_i^z S_j^z, \quad (16)$$

$$U_2(\mathbf{R}_{ij}) = -\frac{e^2}{2\hbar}\frac{\pi}{V} \times \times \sum_{\mathbf{k},\mu} \left[\sum_\alpha (k_\alpha e_{k\mu}^2) \rho_\alpha \right]^2 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)}, \quad (17)$$

где $\mathbf{R}_{ij} = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) \equiv \mathbf{R}$. Таким образом, видно, что рассмотренный здесь механизм привел к обменному взаимодействию двухуровневых систем изинговского типа. Насколько нам известно, взаимодействие такого типа применительно к оптическим двухуровневым системам ранее не рассматривалось.

Упростим выражение для потенциала взаимодействия $U_2(\mathbf{R})$. Найдем сначала сумму по поляризациям

$$\sum_\mu \left[\sum_\alpha (k_\alpha e^\alpha_{\mathbf{k}\mu})\rho_\alpha\right]^2 = \\ = |k|^2(\rho_z-\rho_x)^2\cos^2\theta_k\sin^2\theta_k, \quad (18)$$

где θ_k, φ_k — полярный и азимутальный углы вектора $\mathbf{k}$ в выбранной системе координат.

Переходя от суммирования по волновому вектору к интегрированию по формулам

$$\sum_{\mathbf{k}} \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty k^2dk\int\limits_0^\pi \sin\theta_k d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_k,$$

и воспользовавшись представлением экспоненты со скалярным произведением в показателе в виде разложения по сферическим функциям Бесселя $j_l(kR)$:

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})} = 4\pi\sum_{l,m} i^l j_l(kR)Y_{lm}(\theta_R,\varphi_R)Y_{lm}(\theta_k,\varphi_k),$$

вычислим интегралы по угловым переменным векторов $\mathbf{k}$. Далее разложим все функции угловых переменных θ_k,φ_k в ряды по сферическим гармоникам $Y_{lm}(\theta_k,\varphi_k)$ и вычислим соответствующие интегралы с использованием свойств ортогональности сферических функций. После этих расчетов можно перейти к следующему выражению для потенциала взаимодействия:

$$U_2(R) = \frac{e^2(\rho_z-\rho_x)^2}{2\pi\hbar}\times \\ \times\int\limits_0^{k_{max}} k^4\left\{\frac{1}{15}j_0(kR)P_0(\cos\theta_R) - \frac{1}{21}j_2(kR)P_2(\cos\theta_R) - \right. \\ \left. -\frac{4}{35}j_4(kR)P_4(\cos\theta_R)\right\}dk. \quad (19)$$

Здесь $P(\cos\theta_R)$ — полиномы Лежандра, θ_R — полярный угол между кристаллической осью z и вектором $\mathbf{R}$.

Верхний предел интегрирования k_{max} нельзя, к сожалению, устремить к бесконечности, поскольку при длинах волн, меньших размеров атома, атом не может рассматриваться как точечная частица и выбранная выше форма взаимодействия V_{Sf} вряд ли имеет место. В нашем случае уместно проводить интегрирование до $k_{max} = 2\pi/r_a$, где r_a — радиус атома.

И наконец, имеет место условие $k_{max}r > 1$, означающее, что расстояние между атомами в кристалле больше линейного размера атома. Это позволяет воспользоваться аппроксимацией

$$j_l(z) = \frac{1}{z}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}(l+1)\right),$$

применимой при больших значениях аргумента.

В этих условиях

$$J_0 = \int\limits_0^\infty j_0(kR)k^4dk \approx -\frac{a^3}{R^5}\cos a, \quad a = \frac{2\pi R}{r_a} \gg 1.$$

В результате этих упрощений получаем

$$U_2(R) = \hbar^{-1}\left[\frac{2\pi e(\rho_z-\rho_x)}{R}\right]^2\times \\ \times\frac{\cos(2\pi R/r_a)}{2r_a^3}\cos^2\theta_R\sin^2\theta_R. \quad (20)$$

Таким образом, потенциал (20), осциллируя, убывает как R_{ij}^{-2}. Такое убывание связано с уменьшением в точке R_j плотности фотонов, взаимодействующих с двухуровневой системой в точке R_i. Периодическая зависимость присуща многим косвенным взаимодействиям, наиболее известным из которых является взаимодействие ядерных спинов через электроны проводимости в металлах [7].

Оператор парного взаимодействия (16) вместе с выражением (20) для потенциала является окончательным результатом нашего аналитического вывода оператора косвенного взаимодействия двухуровневых систем. Этот оператор имеет форму гамильтониана изинговского обменного взаимодействия с потенциалом, зависящим от расстояния и направления между взаимодействующими двухуровневыми системами.

Также парное взаимодействие в форме (16) может быть получено, если для характеристики контакта атома и поля излучения выбирается квадратичное по векторному потенциалу слагаемое гамильтониана Паули:

$$H_3 = \frac{e^2}{2mc^2}\,\mathbf{A}^2,$$

обычно используемое для описания слабого диамагнетизма атомов. После некоторого унитарного преобразования этот оператор приобретает форму [9]

$$H_3 = -\frac{e^2}{2mc^2}\sum_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{r}^j_\alpha\mathbf{r}^j_\beta\frac{\partial A_\alpha}{\partial\mathbf{r}_\gamma}\frac{\partial A_\beta}{\partial\mathbf{r}_\gamma}, \quad \alpha,\beta,\gamma = x,y,z,$$

которая позволяет непосредственно применять схему вывода оператора W_{SS} из предыдущего раздела.

В результате получается оператор вида (16), потенциал которого равен

$$U_3(R) = \left(\frac{e^2}{2\pi m}\right)^2 J_{00}\left\{\rho_x^2(1+\cos^4\theta_R)+\right.$$
$$\left.+\rho_z^2\sin^4\theta_R + \frac{1}{2}\rho_x\rho_z\sin^2(2\theta_R)\right\}, \quad (21)$$

$$J_{00} = 0.26\frac{1}{c^3R^3}\left(\frac{\pi}{r_a}\right)^4\left(\sin a + 4\frac{\cos a}{a}\right).$$

Для его упрощения использовались те же приближения, что и для расчета потенциала $U_2(R)$ (20).

Наконец, как уже отмечалось во Введении, выражение для H_1^j из (9) приводит к косвенному взаимодействию поперечных компонент псевдоспинов с потенциалом [10]

$$U_1(R) = \frac{d^2}{R^3}(3\cos^2\theta_R - 1), \quad \frac{\omega_0 R}{c} \to 0,$$

где $d = |\mathbf{d}|$.

5. ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ ПОТЕНЦИАЛА ОБМЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ

Приступим к оценке потенциала изинговского взаимодействия (17). Для оценки порядка величины ρ_α (12) проведем расчет матричного элемента r_α^2 в простейшем частном случае. Выберем в качестве состояний ψ_g и ψ_e состояния (1,0,0) и (2,1,1) атома водорода (указаны тройки квантовых чисел (n,l,m)) [1]. Если использовать известные функции состояния $\psi_{2,1,1}$ и $\psi_{1,0,0}$ для водорода, то $\rho_x = \rho_y = 5r_B^2$, $\rho_z = 11r_B^2$, где r_B — боровский радиус. Выбрав для других параметров значения $r_a \sim 10^{-8}$ см и $R \sim 10^{-6}$ см, получаем следующее значение потенциала изинговского обменного взаимодействия: $U_2(R) \approx 10^{12}$ рад/с.

При этих же приближениях и значениях параметров другие потенциалы оказываются равными

$$U_1(R) \approx 10^8 \text{ рад/с}, \quad U_3(R) \approx 10^6 \text{ рад/с}.$$

И наконец, естественная ширина линии спонтанного излучения определяется формулой

$$\gamma = \frac{2d^2\omega_0^2}{3\hbar c^3}$$

[11] и для оптических частот $\omega_0/2\pi \sim 3\cdot10^{14}$ Гц приблизительно равна $\gamma \approx 2\cdot10^5$ Гц. Таким образом, потенциал косвенного взаимодействия значительно превосходит потенциалы другой природы и ширину линий спонтанного излучения.

Возникает вопрос, по какой причине потенциал U_2 оказывается больше всех остальных потенциалов. Можно задать его в более острой форме: почему связь между двухуровневыми системами за счет мультипольного момента второго порядка U_2 существенно превосходит величину связи за счет мультипольного момента первого порядка U_1? Причина лежит в особенностях взаимодействий H_2 и H_1, а также в природе квантовомеханической теории возмущений. Оператор W_{SS} из (16) является поправкой второго порядка к оператору энергии. Согласно теории возмущений, такая поправка должна иметь порядок $V_{Sf}^2(\Delta E \pm \hbar\omega_k)^{-1}$, где ΔE — интервал между уровнями энергии динамической системы, между которыми вычисляется матричный элемент оператора возмущения V_{Sf}. В случае дипольной связи атома и поля излучения оператор $V_{Sf} = H_1$ имеет только недиагональные матричные элементы в пространстве псевдоспина и $\Delta E = \hbar\omega_0$, где ω_0 — частота оптического перехода. В случае связи через взаимодействие H_2 оператор V_{Sf} имеет только диагональные матричные элементы и $\Delta E = 0$. Бо́льшая величина отношения $V_{Sf}/\hbar\omega_0$ по сравнению с $V_{Sf}^2(\Delta E \pm \hbar\omega_k)^{-1}$ и определяет численное превосходство U_2 над U_1. Малость потенциала U_3 и спонтанной ширины, обусловленных взаимодействиями другой природы, можно было ожидать заранее.

6. ВОЗМОЖНЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ПАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ

Обсудим, как взаимодействие (16) может проявиться в свойствах оптически активных веществ.

При неупорядоченном расположении двухуровневых систем в веществе взаимодействие W_{SS} может привести к так называемому неоднородному уширению оптического перехода, поскольку на каждом атоме j порождает смещение резонансной частоты ω_0:

$$\Delta\omega_j = \sum_i U_2(R_{ij})\langle S_j^z\rangle, \quad (22)$$

которое является случайной величиной. Среднее $\langle S_j^z\rangle$ в (22) соответствует приближению молекулярного поля для псевдоспиновых операторов, часто используемому при оценке сдвигов резонансных линий. Мерой ширины может служить среднеквадратичная величина $\Delta\omega_j$:

$$\overline{\Delta\omega_j} = \frac{\sqrt{2n}}{3\sqrt{35}} \left[\left(\frac{2\pi}{r_a} \right)^3 \frac{e^2(\rho_z - \rho_x)^2}{\hbar} \right] \times \\ \times \frac{\cos(2\pi R_0/r_a)}{\sqrt{\pi R_0}} \langle S_j^z \rangle,$$

где $\langle S_j^z \rangle$ — температурное среднее значение z-компоненты псевдоспина j при температуре эксперимента, которое, вообще говоря, можно считать не зависящим от точки, R_0 — ближайшее возможное расстояние между двухуровневыми системами и n — их концентрация. При $n = 10^{17}$ см$^{-3}$ получим $\overline{\Delta\omega_j} \approx 10^{12}$ рад/с.

Более интересное проявление изинговского обменного взаимодействия можно ожидать при упорядоченном расположении двухуровневых систем в кристаллической решетке. Как известно, в изинговском магнетике возникают дополнительные резонансные пики, если обменный интеграл больше естественной ширины линии [12]. В этих условиях величины $\Delta\omega_j$ перестают быть случайными, принимают несколько определенных значений в соответствии с числом неэквивалентных положений, где могут находиться соседние обменно-связанные двухуровневые системы. Это порождает дополнительные пики поглощения. Количество пиков зависит от числа обменно-связанных атомов. Например, в линейной изинговской системе при обменном взаимодействии ближайших соседей, расположенных на расстоянии R_0 друг от друга, существуют три резонансные частоты: ω_0 и $\omega_0 \pm U_2(R_0)$ [12].

Интегральные интенсивности этих линий проявляют характерную температурную зависимость, в частности, при приближении температуры к нулю все линии вымораживаются за исключением одной, интенсивность которой растет. К сожалению, расстояние между оптическими уровнями энергии $E_e - E_g$ настолько велико, что практически всегда в равновесии реализуется предел нулевой температуры. Поэтому дополнительные пики следует искать при неравновесных условиях.

Эксперименты такого рода хорошо известны в области, изучающей магнитный резонанс. При воздействии на неоднородно уширенную линию ЭПР узкополосным сильным переменным полем последующее прохождение контура линии другим слабым полем выделяет широкий контур с «выжженной дырой» [13]. Форма линии ЭПР претерпевает сложные преобразования при восстановлении равновесия, по кинетике этого процесса судят о релаксационных свойствах изучаемого объекта.

Приведем другой пример: при интенсивном узкочастотном насыщении однородно уширенной линии ЭПР ее контур сложным образом меняется вплоть до появления участков отрицательного поглощения. Сложная кинетика этого процесса, обязанная существованию резервуара магнитных диполь-дипольных взаимодействий, хорошо изучена экспериментальными методами [13].

Для экспериментального обнаружения изинговского обменного взаимодействия оптических двухуровневых систем следует вывести эту физическую систему из термодинамического равновесия, например, посредством π-импульса или интенсивного стационарного облучения с последующим сканированием широкой оптической линии двухуровневой системы монохроматическим, перестраиваемым по частоте лазерным лучом. В этой ситуации можно ожидать появления дополнительных пиков, проявляющих сложную кинетику. Спектральное выжигание провалов в неоднородно уширенной оптической линии наблюдалось экспериментально [14].

Авторы признательны К. М. Салихову и В. Н. Лисину за обсуждение работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Понятие псевдоспина (или эффективного спина) начали постоянно использовать в начале пятидесятых годов в теории парамагнитного резонанса [15] для экономного описания динамики и кинетики парамагнитных ионов, обладающих небольшой низколежащей группой из n уровней энергии в условиях, когда остальные уровни не участвуют в этих процессах. Высоколежащие уровни не заселены при не слишком высоких температурах и не участвуют в резонансных переходах под влиянием сравнительно низкочастотного (порядка 10^{10} Гц) переменного поля, применяемого в ЭПР.

На совокупность низколежащих состояний могут быть спроектированы любые операторы в виде квадратных матриц $n \times n$. Как известно, матрицы $n \times n$ натягивают линейное пространство размерности n^2, и, следовательно, обладают базисом, через линейные комбинации составляющих которого выражается любая матрица $n \times n$. В качестве такого базиса могут служить, например, единичные (или проективные) матрицы $\| p_{mn} \|$; все матричные элементы матрицы $\| p_{mn} \|$ равны нулю, за исключением одного, p_{mn}, равного единице.

Базисом матричного пространства $n \times n$, образованного на гильбертовом n-мерном пространстве физических состояний, могут служить и псевдоспиновые операторы, для n-мерного пространства — операторы псевдоспина $S = (n-1)/2$. Например, при рассмотрении пары уровней (как это имеет место в данной работе) достаточно $2^2 = 4$ операторов: операторной единицы E и трех компонент S_α псевдоспина $S = 1/2$. Подпространство матриц 3×3 должно иметь базис из 9 независимых матриц. Этот базис строится из компонент псевдоспина $S = 1$. Он состоит из четырех элементов базиса псевдоспина $1/2$ и пяти операторов $Y_2^m(S)$, которые строятся из компонент S_α псевдоспина в виде квадратичных комбинаций, преобразующихся при вращении как m-компонента ($m = 0, \pm 1, \pm 2$) тензора второго ранга. Для четырехмерного пространства физических состояний требуется использовать псевдоспин $S = 3/2$, а базис матричного пространства 4×4 строится как базис трехмерного пространства и включает компоненты тензора $Y_3^m(S)$ и т. д.

«Правильно» записанный оператор физической величины при проектировании на низколежащую группу уровней выражается через операторы псевдоспина. Специфика конкретной задачи отображается в эффективных коэффициентах: гиромагнитных отношениях, дипольных моментах и т. д., которые могут приобретать причудливую форму. Так, в случае рассматриваемых здесь оптических двухуровневых систем статическая энергия выражается через z-компоненту псевдоспина $1/2$, причем «зеемановская» частота ω_0 в выражении (1) не связана с магнитных полем, а порождается расщеплениями оптических термов в электрическом кристаллическом поле. «Гиромагнитное» отношение (или фактор Ланде) имеет определенное значение для «перпендикулярного» направления переменного поля и равно нулю для «параллельного» поля и т. д. В частности, из соображений симметрии следует, что матричные элементы операторов $\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta$ могут быть только диагональными и поэтому выражаются через операторную единицу и z-компоненту псевдоспина (см. (12)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Алан, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).

2. А. Р. Кессель, В. А. Попов, Опт. и спектр. **88**, 270 (2000).

3. M. E. Crenshow and C. M. Bowden, Phys. Rev. A **53**, 1139 (1996).

4. C. M. Bowden and J. P. Dowling, Phys. Rev. A **47**, 1237 (1993).

5. А. Р. Кессель, И. С. Донская, Письма в ЖЭТФ **74**, 283 (2001).

6. H. Frohlich, Phys. Rev. **79**, 845 (1950).

7. M. A. Ruderman and C. Kittel, Phys. Rev. **96**, 99 (1954).

8. Р. Лоудон, *Квантовая теория света*, Мир, Москва (1976).

9. У. Люиселл, *Излучение и шумы в квантовой электронике*, Наука, Москва (1972).

10. G. S. Agarwal, *Quantum Optics*, Springer Tracts in Modern Physics, Springer, Berlin (1974), Vol. 70, p. 95.

11. А. Н. Ораевский, УФН **164**, 415 (1994).

12. А. Р. Кессель, Г. О. Берим, *Магнитный резонанс изинговских магнетиков*, Наука, Москва (1982); Г. О. Берим, М. М. Зарипов, А. Р. Кессель, ЖЭТФ **66**, 734 (1974); ФТТ **17**, 2622 (1975).

13. В. А. Ацаркин, *Динамическая поляризация ядер в твердых диэлектриках*, Наука, Москва (1980).

14. M. Drobizhev, A. Korotki, and A. Rebane, Chem. Phys. Lett. **334**, 76 (2001).

15. A. Abragam and M. H. L. Pryce, Proc. Roy. Soc. A **205**, 135 (1951).