ЖЭТФ, 2002, том 121, вып. 3, стр. 603–608

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ КИЛЬВАТЕРНЫХ ВОЛН

А. Г. Хачатрян *

Ереванский физический институт
375036, Ереван, Армения

Поступила в редакцию 4 мая 2001 г.

Рассмотрено влияние продольного магнитного поля на линейные кильватерные поля, возбуждаемые релятивистским электронным сгустком в холодной однородной плазме. Полученные результаты показали, что присутствие внешнего магнитного поля ведет к зависимости длины кильватерной волны от поперечной координаты, к изменению амплитуды волны с удалением от сгустка и появлению ангармоничности. Обнаружено, что сильное магнитное поле существенно уменьшает амплитуду волны для случая нешироких сгустков и незначительно меняет амплитуду в случае широких сгустков.

PACS: 52.40.Mj, 52.35.Lv, 52.75.Di

1. ВВЕДЕНИЕ

Плазменные волны, возбуждаемые релятивистскими электронными сгустками или интенсивными лазерными импульсами (кильватерные волны), могут обеспечить необычно сильные ускоряющие и фокусирующие поля. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что темп ускорения в кильватерной волне может достигать десятков ГэВ/м, что на три порядка больше темпов, достигнутых в традиционных ускорителях (см. обзорную работу [1] и цитируемую там литературу). В настоящее время плазменные методы ускорения интенсивно развиваются.

Обычно в экспериментах плазма помещается во внешнее магнитное поле для удержания плазмы и подавления различных неустойчивостей. Можно предположить, что когда электронная гирочастота $\omega_H = eH_0/m_e c$ становится сравнимой или больше плазменной частоты $\omega_p = \sqrt{4\pi n_p e^2/m_e}$ (здесь H_0 — напряженность магнитного поля, n_p — невозмущенная плотность электронов плазмы), магнитное поле может оказывать заметное влияние на возбуждение кильватерных полей. Таким образом, в качестве естественного параметра задачи можно выбрать безразмерную гирочастоту

$$\Omega_H \equiv \frac{\omega_H}{\omega_p} = 3.12 \cdot 10^5 \frac{H_0[\text{кГс}]}{\sqrt{n_p[\text{см}^{-3}]}}.$$

Например, при $n_p = 10^{12}$ см$^{-3}$ (что характерно для экспериментов по возбуждению кильватерных волн релятивистскими электронными сгустками [2]) $\Omega_H = 1$, когда $H_0 \approx 3.2$ кГс. При возбуждении кильватерных полей интенсивным лазерным импульсом требуемая плотность плазмы составляет 10^{16}–10^{18} см$^{-3}$. Такая плотность плазмы обусловлена длиной интенсивных лазерных импульсов, которая, в свою очередь, должна быть примерно равна половине длины плазменной волны. При $n_p = 10^{17}$ см$^{-3}$ величина $\Omega_H = 1$ для $H_0 \approx 1$ МГс, что намного превышает магнитные поля, достижимые обычными методами. Мегагауссовые магнитные поля могут генерироваться в плазме лазерным излучением (см., например, [3]). В частности, сильное продольное магнитное поле может быть создано в плазме циркулярно поляризованным лазерным импульсом благодаря обратному эффекту Фарадея [4, 5], однако такое поле локализовано в области, занятой лазерным импульсом, и отсутствует в кильватере. Поэтому ниже мы ограничимся рассмотрением кильватерных полей, возбуждаемых электронными сгустками.

Линейная теория плазменных кильватерных волн в изотропной плазме была изучена ранее как

*E-mail: khachatr@moon.yerphi.am

для лазерных импульсов (см. ссылки в [1]), так и для электронных сгустков [6, 7]. В этом случае за источником возбуждаются регулярные потенциальные плазменные колебания, амплитуда которых зависит от параметров источника. Влияние конечного продольного магнитного поля на возбуждение трехмерных кильватерных полей релятивистским электронным сгустком, по-видимому, впервые было рассмотрено Балакиревым, Карасем и Сотниковым в работе [8]. Они обнаружили, что в случае достаточно сильного магнитного поля, когда $\Omega_H \gg 1$, амплитуда кильватерной волны на оси убывает с удалением от сгустка. В данной работе мы получим аналитическое решение линейной проблемы возбуждения кильватерных полей во внешнем магнитном поле, справедливое для произвольных величин Ω_H и распределения плотности электронов в сгустке, а также приведем численные результаты.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим цилиндрический моноэнергетический сгусток электронов с плотностью $n_b(Z-v_bt, r)$, летящий вдоль оси Z со скоростью v_b в однородной плазме. Как обычно, ионы плазмы считаем неподвижными благодаря их большой массе. Тепловым движением электронов плазмы пренебрежем, полагая $v_{Te} \ll v_b$, что практически всегда выполнено в лабораторных условиях. Динамикой электронов сгустка также пренебрежем, что справедливо на временах $t < t_d \sim \gamma_b/\omega_p$ [9], где $\gamma_b = 1/\sqrt{1-(v_b/c)^2}$ — релятивистский фактор сгустка. Для удобства дальнейших вычислений, введем следующие безразмерные величины. Возбуждаемые сгустком электрическое $\mathbf{E}(E_r, E_\theta, E_Z)$ и магнитное $\mathbf{H}(H_r, H_\theta, H_Z)$ поля нормируем на нерелятивистское поле опрокидывания $E_{WB} = m_e c\omega_p/e$ (E_{WB}[В/см] $\propto \sqrt{n_p[\text{см}^{-3}]}$), пространственные координаты — на v_b/ω_p. Тогда уравнения Максвелла и уравнение движения для электронов плазмы запишем в виде

$$\begin{aligned} &\nabla\times\mathbf{H} = V_b\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\tau} - \mathbf{V}_e - N_b\mathbf{V}_b, \\ &\nabla\times\mathbf{E} = -V_b\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\tau}, \\ &\frac{\partial\mathbf{V}_e}{\partial\tau} = -V_b\mathbf{E} - \mathbf{V}_e\times\mathbf{\Omega}_H, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\tau = \omega_p t$, $N_b = n_b/n_p$, $\mathbf{V}_b = \mathbf{v}_b/c$ и $\mathbf{V}_e(V_r, V_\theta, V_Z) = \mathbf{v}_e/c$ — безразмерные скорости сгустка и плазменных электронов, $\Omega_H = e\mathbf{H}_0/m_e c$, $\mathbf{H}_0$ — вектор напряженности внешнего магнитного поля.

Пусть внешнее магнитное поле направлено вдоль оси Z: $\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{e}_Z$, $H_0 = \text{const}$. Будем рассматривать ультрарелятивистские сгустки и положим $V_b \approx 1$ ($\gamma_b \gg 1$). Вследствие аксиальной симметрии задачи зависимость от азимутального угла θ отсутствует. Тогда для стационарных (т. е. зависящих только от $z = Z - \tau$ и r) кильватерных полей из системы (1) получим

$$\frac{\partial H_\theta}{\partial z} = \frac{\partial E_r}{\partial z} + V_r, \tag{2а}$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_Z}{\partial r} = -\frac{\partial E_\theta}{\partial z} - V_\theta, \tag{2б}$$

$$\nabla_\perp H_\theta = -\frac{\partial E_Z}{\partial z} - N_b - V_Z, \tag{2в}$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial z} = -\frac{\partial H_r}{\partial z}, \tag{2г}$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_Z}{\partial r} = \frac{\partial H_\theta}{\partial z}, \tag{2д}$$

$$\nabla_\perp E_\theta = \frac{\partial H_Z}{\partial z}, \tag{2е}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} = E_r + \Omega_H V_\theta, \tag{2ж}$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial z} = E_\theta - \Omega_H V_r, \tag{2з}$$

$$\frac{\partial V_Z}{\partial z} = E_Z, \tag{2и}$$

где $\nabla_\perp = \partial/\partial r + 1/r$. Из (2г) следует $E_\theta = -H_r$. Тогда на релятивистские электроны, летящие за возбуждающим сгустком, со стороны кильватерной волны действует сила $\mathbf{F}(eE_{WB}(H_\theta - E_r), 0, -eE_{WB}E_Z)$. Согласно (2д)

$$\frac{\partial E_Z}{\partial r} = -\frac{\partial(H_\theta - E_r)}{\partial z} \equiv -\frac{\partial f_r}{\partial z}. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что поле сил $\mathbf{F}$ является потенциальным, т. е. можно записать $\mathbf{F} = \nabla\Phi$, что справедливо также для нелинейных кильватерных волн. Отметим также, что из (2а) и (2д) следует

$$V_r = -\frac{\partial E_Z}{\partial r}. \tag{4}$$

Чтобы решить систему уравнений (2), будем следовать методике, примененной в [10]. Перейдем в (2) к фурье-образам по z и преобразованиям Ганкеля по поперечной координате согласно выражениям (см., например, [11])

$$Y(z,r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} Y_{\lambda\xi} \exp(i\lambda z)\xi J_n(\xi r) d\xi\, d\lambda, \tag{5а}$$

$$Y_{\lambda\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} Y(z',r') \exp(-i\lambda z') r' J_n(\xi r') dr'\, dz', \tag{5б}$$

где J_n — функции Бесселя, $n = 1$ для величин, равных нулю на оси ($r = 0$), а именно, для $E_{r,\theta}$, $H_{r,\theta}$ и $V_{r,\theta}$ и $n = 0$ для E_Z, H_Z, V_Z и N_b. Тогда, уравнения (2) сведутся к системе алгебраических уравнений, из которой имеем

$$E_{Z,\lambda\xi} = \frac{i\lambda N_{b,\lambda\xi}}{(1+\xi^2)(\lambda^2 - w^2)}, \quad w = \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_H \xi^2}{1+\xi^2}\right)^2} \geq 1. \tag{6}$$

Представим плотность электронов сгустка в виде $N_b(z,r) = N_{b0} g_1(z) g_2(r)$. Затем подставим (6) в (5а) и, интегрируя по λ, получим

$$E_Z(z,r) = N_{b0} \int\limits_0^{\infty} \frac{\xi J_0(\xi r)}{1+\xi^2} G_1 G_2 d\xi, \tag{7}$$

где

$$G_1 = \int\limits_z^{\infty} g_1(z') \cos\left[w(z-z')\right] dz',$$

$$G_2 = \int\limits_0^{\infty} g_2(r') r' J_0(\xi r') dr'.$$

При вычислении интеграла по λ мы обошли полюсы $\lambda_{1,2} = \pm w$ на комплексной плоскости сверху [10]. Это равнозначно введению бесконечно малого затухания и связано с тем, что исходные уравнения «не знают» об устойчивости плазмы, т. е. что плазма стремится к равновесному состоянию при $t \to \infty$. Действительно, если бы мы изначально ввели в исходные уравнения диссипативный член (например, столкновительный член в уравнение движения), то полюсы лежали бы вне пути интегрирования и были бы обойдены «правильно».

Таким образом, мы получили общее решение (7) для продольного поля. При известном E_Z можно вычислить и остальные величины в системе (2). Например, V_Z и V_r могут быть вычислены соответственно из (2и) и (4). Фокусирующее поле f_r можно найти из (3). При $\Omega_H = 0$ ($w = 1$) интеграл по ξ в выражении (7) может быть легко вычислен и мы получим известное решение для изотропной плазмы [7, 10]. Заметим также, что так как внешнее магнитное поле входит в выражение (7) в виде H_0^2, то направления магнитного поля вдоль или против движения электронного сгустка являются физически эквивалентными.

В случае однородного сгустка с плотностью

$$N_b = \begin{cases} N_{b0}, & -d < z \leq 0, \quad r \leq r_b, \\ 0, & z \leq -d, \quad\quad r > r_b, \end{cases}$$

где d — длина, а r_b — радиус сгустка, выражения для E_Z и f_r примут вид

$$E_Z = N_{b0} r_b \int\limits_0^{\infty} \frac{J_0(\xi r) J_1(\xi r_b)}{(1+\xi^2) w} L\, d\xi, \tag{8}$$

$$f_r = -N_{b0} r_b \int\limits_0^{\infty} \frac{\xi J_1(\xi r) J_1(\xi r_b)}{(1+\xi^2) w^2} L'\, d\xi, \tag{9}$$

где

$$L = \begin{cases} -\sin(wz), & -d < z \leq 0, \\ 2\sin(wd/2)\cos\left[w(z+d/2)\right], & z \leq -d, \end{cases}$$

$$L' = \begin{cases} 1 - \cos(wz), & -d < z \leq 0, \\ -2\sin(wd/2)\sin\left[w(z+d/2)\right], & z \leq -d. \end{cases}$$

Хотя вычисление интегралов по ξ в (7)–(9) для произвольных Ω_H затруднительно, однако можно видеть, что конечное магнитное поле эффективно ведет к появлению компонент поля с меньшими по сравнению с длиной плазменной волны в изотропной плазме длинами волн, или, что то же самое, с бо́льшими по сравнению с ω_p частотами. Как известно, в холодной магнитоактивной плазме с неподвижными ионами существуют две собственные колебательные моды, частота одной из которых монотонно растет с ростом угла между волновым вектором и направлением магнитного поля, достигая своего максимального значения $\omega_p\sqrt{1+\Omega_H^2}$ при перпендикулярном распространении [12]. Очевидно, волны, распространяющиеся под конечными углами к магнитному полю (и имеющие конечную групповую скорость), и дают вклад в компоненты кильватерной волны, имеющие частоту $\omega > \omega_p$. При этом кильватерная волна, в отличие от случая изотропной плазмы, перестает быть плоской. Конечность групповой скорости кильватерной волны, как будет продемонстрировано ниже и на что указывали авторы работы [8], ведет к переносу энергии кильватерного поля в радиальном направлении и, как следствие отсутствия диссипации, к падению амплитуды поля вблизи оси с ростом расстояния от сгустка.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО СГУСТКА

В данном разделе приведем численные результаты для случая однородного сгустка. Длину сгустка выберем равной половине длины кильватерной волны в изотропной плазме: $d = \pi$. На рис. 1 приведен пример кильватерной волны, возбуждаемой в плазме без внешнего магнитного поля ($\Omega_H = 0$). На рис. 2 представлена типичная картина поведения кильватерной волны в конечном магнитном поле; параметры сгустка те же, что и на рис. 1. Можно видеть, что присутствие внешнего магнитного поля ведет а) к зависимости длины кильватерной волны от поперечной координаты, б) к изменению амплитуды волны с удалением от сгустка, в) к появлению ангармоничности в колебаниях поля, или, что то же самое, появлению гармоник. Причина этих явлений обсуждалась выше. Заметим, что наибольшей «деформации» подвержено поле вблизи оси. В случае $r < r_b$, имеет место заметное уменьшение амплитуды кильватерной волны с удалением от сгустка. Случай узкого сгустка ($r_b < 1$) показан на рис. 3. Здесь отличие состоит в немонотонном падении амплитуды волны за сгустком. Легко видеть, что изменение длины кильватерной волны с расстоянием r от оси ведет к усиливающемуся с ростом расстояния от сгустка искривлению фазового фронта волны и к немонотонному изменению поля в поперечном направлении. Последнее показано на рис. 4, из которого видно также, что по мере удаления от сгустка область, занятая кильватерным полем, расширяется в поперечном направлении. Это происходит благодаря конечной групповой скорости возбуждаемых плазменных колебаний (см. также [8]). В свою очередь, амплитуда кильватерного поля вблизи оси убывает, так как полная энергия волны должна сохраняться.

Интересно отметить, что зависимость длины кильватерной волны от поперечной координаты и искривление волнового фронта имеют место при

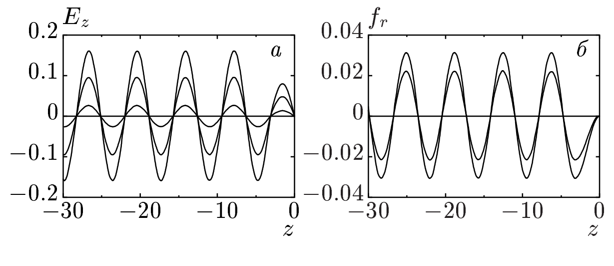

Рис. 1. Кильватерная волна в плазме без внешнего магнитного поля. Здесь и в случаях всех последующих рисунков электронные сгустки являются однородными с длиной, равной половине длины плазменной волны в изотропной плазме: $d = \pi$. Безразмерные радиус и плотность сгустка равны $r_b = 1$ и $N_b = 0.2$. *а*) Продольное электрическое поле кильватерной волны; нормированное расстояние r от оси равно 0, 1 и 2 в порядке убывания амплитуды. *б*) Фокусирующая сила, $r = 1$ и 2 в порядке убывания амплитуды колебаний

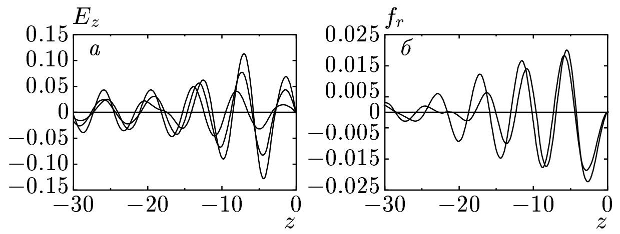

Рис. 2. Кильватерная волна, возбуждаемая в присутствии конечного магнитного поля, $\Omega_H = 1$. Параметры сгустка те же, что и на рис. 1. *а*) $E_Z(z)$, $r = 0$, 1, 2 в порядке убывания амплитуды непосредственно за сгустком. *б*) $f_r(z)$, $r = 1$, 2 в порядке убывания амплитуды непосредственно за сгустком

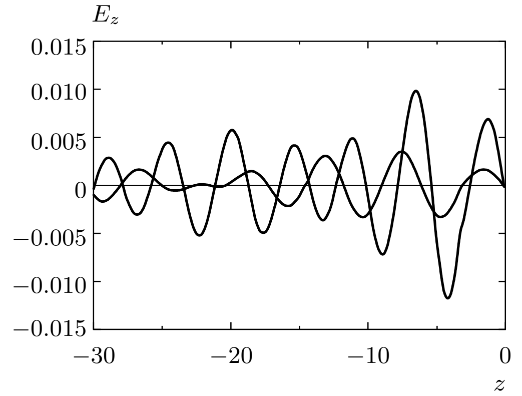

Рис. 3. Продольное электрическое поле кильватерной волны, возбуждаемой узким сгустком. $\Omega_H = 1$, $r_b = 0.2$ и $N_b = 0.2$, $r = 0$, 1 в порядке убывания амплитуды

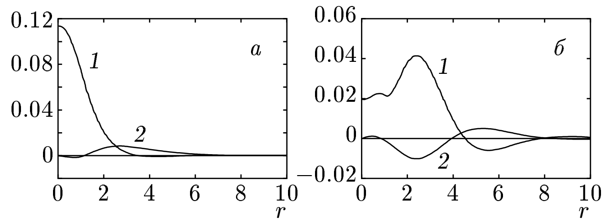

Рис. 4. Радиальное поведение кильватерного поля представленного на рис. 2: *а*) *1* — $E_Z(z=-7,r)$; *2* — $f_r(z=-7,r)$; *б*) *1* — $E_Z(z=-20,r)$; *2* — $f_r(z=-20,r)$

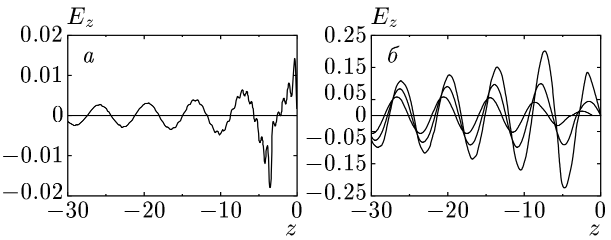

Рис. 5. Возбуждение кильватерного поля в сильном магнитном поле, $\Omega_H=10$. *а*) Продольное электрическое поле кильватерной волны на оси; параметры сгустка: $r_b=1$ и $N_b=0.2$. *б*) Случай широкого сгустка, $r_b=10$, $N_b=0.1$, $r=0$, 10 и 15 в порядке убывания амплитуды

$H_0=0$ также в плазменном канале (см., например, [13]) и в нелинейном режиме в однородной плазме [14]. В этих двух случаях длина волны на оси максимальна и уменьшается с увеличением расстояния от оси r. В нашем случае, когда кильватерная волна возбуждается в присутствии продольного магнитного поля, длина волны на оси непосредственно за сгустком минимальна и растет с r (см. рис. 2 и 3). Поэтому можно было бы попытаться компенсировать нежелательное искривление волнового фронта в случае нелинейной кильватерной волны, налагая продольное магнитное поле.

Полученные численные результаты показали, что присутствие слабого магнитного поля ($\Omega_H \ll 1$) лишь незначительно влияет на линейные кильватерные волны (по крайней мере, на расстояниях за источником порядка десяти длин волн). Случай сильного магнитного поля ($\Omega_H \gg 1$) представлен на рис. 5. Здесь для неширокого сгустка ($r_b=1$) амплитуда продольного электрического поля более чем на порядок меньше по сравнению со случаем отсутствия магнитного поля (ср. рис. 5*а* и 1*а*); фокусирующая сила уменьшилась на два порядка. Таким образом, в случае неширокого сгустка, когда безразмерный радиус сгустка меньше или порядка единицы, сильное магнитное поле существенно уменьшает амплитуду кильватерной волны, которая в данном случае непригодна для эффективного ускорения и фокусировки заряженных сгустков.

За широким сгустком ($r_b \gg 1$; см. рис. 5*б*), амплитуда кильватерной волны сравнима со случаем изотропной плазмы. Это связано с тем, что в случае широкого сгустка движение электронов при $r<r_b$ носит преимущественно продольный характер. Последнее справедливо для произвольных Ω_H и ведет к тому, что амплитуда продольной компоненты электрического поля кильватерной волны в замагниченной плазме близка к таковой в одномерной теории, а поперечные компоненты (в том числе и фокусирующая сила) пренебрежимо малы по сравнению с продольным полем. Это согласуется с теорией кильватерных полей в изотропной плазме и с общеизвестным результатом теории плазмы, что продольное магнитное поле не влияет на распространение одномерных плазменных волн.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы обнаружили качественно новые свойства трехмерных кильватерных волн, возбуждаемых в плазме в присутствии продольного магнитного поля, такие как изменение амплитуды с продольной координатой и увеличение длины волны с ростом расстояния от оси. Последняя особенность может помочь компенсировать нежелательное искривление волнового фронта в трехмерном нелинейном случае. Выявленные особенности кильватерных полей в присутствии продольного магнитного поля обусловлены свойствами собственных мод магнитоактивной плазмы, а именно ростом их частоты с ростом угла между волновым вектором и магнитным полем и их ненулевой групповой скоростью.

Автор благодарит С. Элбакяна за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке Международного научно-технического центра (проект А-405).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Esarey, P. Sprangle, J. Krall, and A. Ting, IEEE Trans. Plasma Sci. **24**, 252 (1996).

2. J. B. Rosenzweig, P. Schoessow, B. Cole et al., Phys. Rev. A **39**, 1586 (1989); H. Nakanishi, A. Emomoto, A. Ogata et al., Nucl. Instrum. Meth. A **328**, 596 (1993); А. К. Березин, Я. Б. Файнберг, В. А. Киселев и др., Физика плазмы **20**, 663 (1994).

3. S. V. Bulanov, T. Zh. Esirkepov, M. Lontano et al., Phys. Rev. Lett. **76**, 3562 (1996); L. Gorbunov, P. Mora, and T. M. Antonsen, Jr., Phys. Rev. Lett. **76**, 2945 (1996); M. Borghesi, A. J. Mackinon, R. Gaillard et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 5137 (1998).

4. В. Ю. Быченков, В. И. Демин, В. Т. Тихончук, ЖЭТФ **105**, 118 (1994).

5. Л. М. Горбунов, Р. Р. Рамазашвили, ЖЭТФ **114**, 849 (1998).

6. P. Chen, J. M. Dawson, R. W. Huff, and T. Katsouleas, Phys. Rev. Lett. **54**, 693 (1985); R. D. Ruth, A. W. Chao, P. L. Morton, and P. B. Wilson, Particle Accelerat. **17**, 171 (1985).

7. R. Keinigs and M. E. Jones, Phys. Fluids **30**, 252 (1987).

8. В. А. Балакирев, И. В. Карась, Г. В. Сотников, Физика плазмы **26**, 948 (2000).

9. K. V. Lotov, Phys. Plasmas **5**, 785 (1998).

10. А. Г. Хачатрян, А. Ц. Аматуни, Э. В. Сехпосян, С. С. Элбакян, Физика плазмы **22**, 638 (1996).

11. I. H. Sneddon, *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York (1972).

12. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, *Электродинамика плазмы*, Наука, Москва (1974), гл. 5; В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, *Волны в магнитоактивной плазме*, Наука, Москва (1975), § 8.

13. N. E. Andreev, L. M. Gorbunov, V. I. Kirsanov et al., Phys. Plasmas **4**, 1145 (1997).

14. A. G. Khachatryan, Phys. Rev. E **60**, 6210 (1999).