ЖЭТФ, 2002, том 121, вып. 3, стр. 624–636

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ СО СВОБОДНОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Н. М. Зубарев *

Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук
620016, Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 15 августа 2001 г.

Рассмотрена динамика развития неустойчивости свободной поверхности жидкого гелия, заряженной локализованными над ней электронами. Показано, что в случае, когда заряд полностью экранирует электрическое поле над поверхностью, а его величина существенно превышает пороговое для неустойчивости значение, асимптотическое поведение системы описывается хорошо известными уравнениями трехмерного лапласовского роста. Их интегрируемость в двумерной геометрии позволяет описать эволюцию поверхности вплоть до формирования на ней особенностей — точек заострения, в которых бесконечными оказываются напряженность электрического поля, скорость движения жидкости и кривизна ее поверхности. Получены точные решения задачи о профиле электрокапиллярной волны на границе жидкого гелия, свидетельствующие о тенденции к изменению топологии поверхности вследствие образования заряженных пузырьков.

PACS: 68.10.-m, 47.65.+a, 47.20.Ma

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно [1, 2], что поверхность жидкого гелия может быть заряжена до довольно больших значений поверхностной плотности отрицательного электрического заряда. Это связано с тем, что, с одной стороны, электроны притягиваются к поверхности силами электростатического изображения и, с другой стороны, граница жидкого гелия представляет собой потенциальный барьер для электронов, препятствующий их проникновению внутрь. При этом важной особенностью жидкого гелия, как диэлектрика с малой поляризуемостью, является относительная слабость сил изображения, приводящая к тому, что среднее расстояние локализованных электронов от поверхности значительно превышает межатомное. Как следствие, электроны не связываются с отдельными атомами вещества, а образуют двумерную проводящую систему.

Способность электронов свободно передвигаться вдоль поверхности жидкого гелия обеспечивает ее эквипотенциальность на характерных гидродинамических временах и масштабах. Аналогичным свойством обладает заряженная поверхность проводящей жидкости с той разницей, что в проводящую среду электрическое поле проникать не может, а для жидкого гелия подобного ограничения не существует. Это позволило авторам работ [3, 4] перенести ряд классических результатов из теории неустойчивости поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле [5–7] на случай заряженной границы жидкого гелия (геометрия системы качественно изображена на рис. 1). Так, естественным обобщением закона дисперсии линейных волн на поверхности

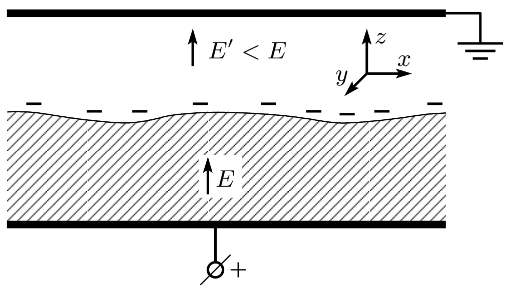

Рис. 1. Схематическое изображение заряженной электронами поверхности жидкого гелия, помещенного в плоский конденсатор

*E-mail: nick@ami.uran.ru

проводящей жидкости является следующее дисперсионное соотношение для жидкого гелия:

$$\omega^2 = gk + \frac{\alpha}{\rho}\, k^3 - \frac{E^2 + {E'}^2}{4\pi\rho}\, k^2, \tag{1}$$

где ω — частота, k — волновое число, g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность среды, E' и E — напряженности электрического поля соответственно над жидкостью и в жидкости (для проводящей среды $E = 0$). Из него следует, что при условии

$${E'}^2 + E^2 < {E_c}^2 = 8\pi\sqrt{g\alpha\rho}$$

при любых k выполняется неравенство $\omega^2 > 0$ и, следовательно, малые возмущения поверхности не нарастают со временем. В случае, если сумма квадратов полей ${E'}^2 + E^2$, играющая роль внешнего управляющего параметра, превышает критическое значение ${E_c}^2$, возникает область волновых чисел k, для которых $\omega^2 < 0$. Это соответствует апериодической неустойчивости границы жидкости.

Нарастание возмущений поверхности неизбежно приводит систему в состояние, когда ее эволюция определяется нелинейными процессами. Наиболее просто оценивается характер их влияния вблизи порога неустойчивости — при малой надкритичности

$$\varepsilon = \frac{E^2 + {E'}^2 - {E_c}^2}{E_c^2},$$

когда нарастают только возмущения с волновыми числами близкими к $k_0 = \sqrt{g\rho/\alpha}$ и в уравнениях движения можно перейти к огибающим. Так, в работе Горькова и Черниковой [8] было показано, что в случае плоской симметрии задачи комплексная амплитуда возмущений поверхности $A(x,t)$ подчиняется нелинейному уравнению Клейна–Гордона:

$$(gk_0)^{-1} A_{tt} = 2\varepsilon A + k_0^{-2} A_{xx} + \left(2S^2 - \frac{5}{8}\right) A|A|^2, \tag{2}$$

где

$$S = \frac{E^2 - {E'}^2}{E_c^2}$$

— безразмерный параметр, характеризующий плотность поверхностного заряда. Из уравнения (2) видно, что в зависимости от значения параметра S нелинейность либо насыщает неустойчивость, либо, наоборот, способствует взрывному росту амплитуд возмущений. Аналогичный вывод следует и в общем (трехмерном) случае с поправкой на то, что за счет взаимодействия трех образующих гексагональную структуру волн нелинейность в первом неисчезающем порядке всегда играет дестабилизирующую роль. При этом, как и в двумерном случае, стабилизирующее влияние для достаточно малых S оказывают кубические нелинейности [9, 10]. Вследствие этого при незначительной плотности поверхностного заряда (величины E и E' близки) возможно формирование возмущенного стационарного рельефа границы жидкого гелия, причем для исследования зарождающихся структур применима стандартная теория возмущений по малому параметру — характерному углу наклона поверхности (см. [11] и ссылки).

Вне рамок теоретических исследований до сих пор оставались процессы, происходящие в закритической области электрических полей, а также при относительно большом электронном поверхностном заряде, приводящем к значительной экранировке поля над поверхностью жидкости. Это связано с тем, что в указанных случаях развитие неустойчивости приводит к нарушению малоуглового приближения. Так, исследование поведения заряженной границы жидкого гелия методом скоростной микросъемки, проведенное Володиным, Хайкиным и Эдельманом [12], показало, что на поверхности появляются углубления, которые заостряются за конечное время (впоследствии на остриях рождаются пузырьки, уносящие заряд с поверхности гелия на положительную пластину конденсатора). Описание подобных процессов, ввиду их существенной нелинейности, требует построения решений непосредственно фундаментальных уравнений электрогидродинамики жидкого гелия.

В настоящей работе показано, что при выполнении условия $E \gg E'$, что соответствует полной экранировке поля над жидкостью поверхностным электронным зарядом, а также условия значительного превышения напряженностью электрического поля своего критического значения, $E \gg E_c$, уравнения движения жидкого гелия допускают бесконечное число точных аналитических решений. Их анализ позволил существенно продвинуться в изучении нерешенных проблем электрогидродинамики жидкостей со свободной поверхностью, связанных с образованием особенностей (точек заострения) и существенными изменениями геометрии поверхности (формированием пузырьков).

В разд. 2 приводятся уравнения безвихревого движения жидкого гелия со свободным поверхностным зарядом. Для предела сильного электрического поля, когда можно пренебречь влиянием силы тяжести и капиллярных сил, развивается предложенный в нашей работе [13] подход к аналитическому исследованию динамики жидкого гелия, основанный на выделении в уравнениях движения двух ветвей, соответствующих нарастающим и затухающим со временем решениям. В разд. 3 показано, что асимптотическое поведение системы задается известными уравнениями, описывающими процесс лапласовского роста в трехмерной геометрии (движение эквипотенциальной границы со скоростью, определяемой нормальной производной гармонического потенциала). Раздел 4 посвящен исследованию динамики формирования заостренных углублений в поверхности гелия в двумерной геометрии, когда уравнения лапласовского роста допускают неограниченное число точных нетривиальных решений. Далее, в разд. 5 рассматривается распространение нелинейных поверхностных волн в коротковолновой области, когда наряду с электростатическим давлением следует учитывать поверхностное. Показано, что задача о профиле прогрессивной электрокапиллярной волны на границе жидкого гелия допускает точные аналитические решения, аналогичные решениям Креппера для капиллярных волн [14]. С их использованием получено нелинейное дисперсионное соотношение для поверхностных волн произвольной амплитуды, анализ которого позволил сформулировать ряд выводов, касающихся устойчивости заряженной поверхности жидкого гелия по отношению к возмущениям конечной амплитуды, а также области существования волновых решений уравнений электрогидродинамики. В разд. 6 анализируются простейшие осесимметричные решения уравнений движения, описывающие втягивание поверхности вглубь жидкости с постоянной скоростью.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ; ПРЕДЕЛ СИЛЬНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим потенциальное движение помещенной в электрическое поле идеальной диэлектрической жидкости (жидкого гелия) со свободной заряженной электронами поверхностью. Положим, что в невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой плоскую горизонтальную поверхность $z = 0$, а вектор напряженности поля направлен вдоль оси z нашей системы координат (рис. 1). Введем функцию $\eta(x, y, t)$, задающую отклонение границы от плоской. Тогда форма возмущенной поверхности жидкого гелия задается уравнением $z = \eta(x, y, t)$. Потенциал скорости для несжимаемой жидкости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Phi = 0, \tag{3}$$

которое следует дополнить динамическим граничным условием

$$\begin{aligned} \Phi_t + \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} &= \frac{E^2 - (\nabla\varphi)^2}{8\pi\rho} + \\ &+ \frac{\alpha}{\rho}\nabla_\perp \frac{\nabla_\perp\eta}{\sqrt{1 + (\nabla_\perp\eta)^2}} - g\eta, \\ z &= \eta(x, y, t), \end{aligned} \tag{4}$$

где φ — потенциал электрического поля в жидкости (считаем, что заряд полностью экранирует поле над поверхностью гелия). Первый член в правой части нестационарного уравнения Бернулли (4) отвечает за электростатическое давление, второй — за капиллярное давление, а третий учитывает влияние поля тяжести. Будем считать, что характерный пространственный масштаб возмущений поверхности мал по сравнению с размерами области, занимаемой жидкостью. В таком случае можно считать, что

$$\Phi \to 0, \quad z \to -\infty, \tag{5}$$

т. е. движение жидкости затухает на бесконечности. Временная эволюция свободной поверхности определяется кинематическим соотношением (условием непротекания жидкости через ее границу):

$$\eta_t = \Phi_z - \nabla_\perp\eta \cdot \nabla_\perp\Phi, \quad z = \eta(x, y, t). \tag{6}$$

Наконец, потенциал электрического поля φ в отсутствие пространственных зарядов удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0, \tag{7}$$

которое следует решать с условием эквипотенциальности границы жидкого гелия и условием однородности поля на бесконечном удалении от поверхности:

$$\varphi = 0, \quad z = \eta(x, y, t), \tag{8}$$

$$\varphi \to -Ez, \quad z \to -\infty. \tag{9}$$

Отметим, что в отсутствие электрического поля ($E = 0$ и, как следствие, $\nabla\varphi = 0$) приведенные уравнения совпадают с уравнениями движения глубокой жидкости в поле тяжести.

Пусть напряженность электрического поля значительно превышает свое критическое значение ($E \gg E_c$), а для характерной длины поверхностных волн λ справедливо соотношение

$$\alpha E^{-2} \ll \lambda \ll \frac{E^2}{g\rho}.$$

Тогда, как следует из дисперсионного соотношения (1), при рассмотрении возмущений поверхности малой амплитуды можно пренебречь влиянием как капиллярных сил, так и силы тяжести. В разд. 4 будет показано, что подобное утверждение справедливо и для возмущений поверхности конечной амплитуды. Это означает, что в правой части граничного условия (4) можно опустить два последних слагаемых и учитывать лишь электростатическое давление.

Перейдем к безразмерным обозначениям, приняв λ за единицу длины, E за единицу напряженности электрического поля и $\lambda E^{-1}(4\pi\rho)^{1/2}$ за единицу времени. Тогда уравнения движения (3)–(9) примут вид

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad \nabla^2\Phi = 0, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\Phi_t + (\nabla\Phi)^2/2 + (\nabla\varphi)^2/2 = 1/2, \\ z = \eta(x,y,t),\end{gathered} \tag{11}$$

$$\eta_t = \Phi_z - \nabla_\perp\eta\cdot\nabla_\perp\Phi, \quad z = \eta(x,y,t), \tag{12}$$

$$\varphi = 0, \quad z = \eta(x,y,t), \tag{13}$$

$$\Phi \to 0, \qquad z \to -\infty, \tag{14}$$

$$\varphi \to -z, \quad z \to -\infty. \tag{15}$$

Перепишем их в форме, не содержащей в явном виде функцию η. Введем возмущенный гармонический потенциал $\tilde\varphi = \varphi + z$, затухающий на бесконечности ($\tilde\varphi \to 0$ при $z \to -\infty$). На границе имеем

$$\tilde\varphi|_{z=\eta} = \eta.$$

Отсюда несложно получить соотношения

$$\eta_t = \left.\frac{\tilde\varphi_t}{1-\tilde\varphi_z}\right|_{z=\eta}, \quad \nabla_\perp\eta = \left.\frac{\nabla_\perp\tilde\varphi}{1-\tilde\varphi_z}\right|_{z=\eta},$$

позволяющие исключить η из уравнения (12). Кинематическое и динамическое граничные условия (11) и (12) преобразуются к виду

$$\tilde\varphi_t - \Phi_z = -\nabla\tilde\varphi\cdot\nabla\Phi, \quad z = \eta(x,y,t),$$

$$\Phi_t - \tilde\varphi_z = -\frac{(\nabla\Phi)^2}{2} - \frac{(\nabla\tilde\varphi)^2}{2}, \quad z = \eta(x,y,t).$$

Складывая эти выражения между собой, а затем вычитая их друг из друга, находим:

$$(\tilde\varphi+\Phi)_t - (\tilde\varphi+\Phi)_z = -\frac{(\nabla(\tilde\varphi+\Phi))^2}{2}, \quad z = \eta(x,y,t),$$

$$(\tilde\varphi-\Phi)_t + (\tilde\varphi-\Phi)_z = \frac{(\nabla(\tilde\varphi-\Phi))^2}{2}, \quad z = \eta(x,y,t),$$

т. е. граничные условия можно задавать по отдельности для суммы и разности гармонических потенциалов $\tilde\varphi$ и Φ. Удобно ввести в рассмотрение пару вспомогательных потенциалов

$$\phi^{(\pm)}(x,y,z,t) = \frac{\tilde\varphi\pm\Phi}{2}.$$

С их использованием уравнения движения записываются в следующей симметричной форме:

$$\nabla^2\phi^{(\pm)} = 0, \tag{16}$$

$$\phi_t^{(\pm)} = \pm\phi_z^{(\pm)} \mp (\nabla\phi^{(\pm)})^2, \quad z = \eta(x,y,t), \tag{17}$$

$$\phi^{(\pm)} \to 0, \quad z \to -\infty, \tag{18}$$

а форма границы жидкого гелия определяется из соотношения

$$\eta = \left.(\phi^{(+)} + \phi^{(-)})\right|_{z=\eta}. \tag{19}$$

Таким образом, уравнения движения разделяются на две системы уравнений для потенциалов $\phi^{(+)}$ и $\phi^{(-)}$, связь между которыми задается неявным уравнением для формы поверхности (19). Принципиальным является то обстоятельство, что эти уравнения совместны с условием $\phi^{(-)} = 0$, либо с условием $\phi^{(+)} = 0$. В следующем разделе мы покажем, что первое условие соответствует решениям задачи, амплитуда которых нарастает со временем, а второе — не представляющим для нас интереса затухающим решениям.

Возможность разделения уравнений на отдельные ветви связана с симметриями уравнений электрогидродинамики, которые легко заметить при использовании гамильтоновского формализма. Действительно, уравнения движения жидкости со свободной поверхностью (10)–(15) обладают гамильтоновской структурой, причем функции $\eta(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t) = \Phi|_{z=\eta}$ являются канонически-сопряженными величинами [15]

$$\psi_t = -\frac{\delta H}{\delta\eta}, \quad \eta_t = \frac{\delta H}{\delta\psi},$$

где гамильтониан H с точностью до констант совпадает с полной энергией системы:

$$H = K + P, \quad K = \int\limits_{z\le\eta}\frac{(\nabla\Phi)^2}{2}\,d^3r,$$

$$P = \int\limits_{z\le\eta} \frac{1-(\nabla\varphi)^2}{2}\, d^3r = -\int\limits_{z\le\eta} \frac{(\nabla\tilde{\varphi})^2}{2}\, d^3r.$$

Напомним, что гармонические потенциалы Φ и $\tilde{\varphi}$ затухают при $z \to -\infty$, а их значения на поверхности жидкости задаются функциями, соответственно, ψ и η. Как следствие, если $\psi = \eta$, то $\Phi = \tilde{\varphi}$, и функционал кинетической энергии K с точностью до знака совпадает с функционалом потенциальной энергии P. Это позволяет переписать гамильтоновские уравнения движения с использованием только функционала K:

$$\psi_t = -\frac{\delta K}{\delta\eta} + \left(\frac{\delta K}{\delta\eta} + \frac{\delta K}{\delta\psi}\right)\bigg|_{\psi=\eta}, \quad \eta_t = \frac{\delta K}{\delta\psi}.$$

Видно, что если в этих уравнениях положить $\psi = \eta$, то они совпадут. Это означает, что условие $\psi = \eta$, или (что то же самое) условие $\phi^{(-)} = 0$, оказывается совместным с уравнениями движения жидкого гелия. Аналогично можно показать, что уравнения Гамильтона совпадут при $\psi = -\eta$, что соответствует условию $\phi^{(+)} = 0$. Отметим также, что уравнения, описывающие эволюцию системы на ветвях $\phi^{(+)} = 0$ и $\phi^{(-)} = 0$, совпадают с точностью до замены $t \to -t$, что связано с обратимостью времени в гамильтоновских уравнениях движения. При этом условия $\phi^{(\pm)} = 0$ выделяют решения задачи, для которых величина H равна нулю.

3. НАРАСТАЮЩАЯ ВЕТВЬ; УСТОЙЧИВОСТЬ

В линейном приближении, применимость которого ограничена условием малости углов наклона поверхности $|\nabla_\perp\eta| \ll 1$, граничные условия (17) примут вид

$$\phi_t^{(\pm)} = \pm\phi_z^{(\pm)}, \quad z = 0,$$

и уравнения (16)–(19) разделятся на две независимые системы. Дисперсионные соотношения для них можно найти, подставляя потенциалы в виде

$$\phi^{(\pm)} \propto \exp(kz + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\perp - i\omega t).$$

Получим

$$\omega^{(\pm)} = \pm ik$$

(тот же результат следует непосредственно из дисперсионного соотношения (1), рассматриваемого в пределе сильного поля). Отсюда видно, что для одной ветви малые периодические возмущения поверхности экспоненциально нарастают с характерными временами k^{-1}, а для другой затухают. В этом случае на достаточно больших временах можно считать $\phi^{(-)} = 0$ и рассматривать лишь уравнения для потенциала $\phi^{(+)}$. Покажем, что это утверждение справедливо и в общем случае, когда эволюция поверхности описывается нелинейными уравнениями (16)–(19).

Положим в нелинейных уравнениях движения (16)–(19)

$$\phi^{(+)} = \varphi + z, \quad \phi^{(-)} = 0,$$

что, как следует из линейного анализа, выделяет нарастающие со временем решения. Переходя в движущуюся систему координат $\{x, y, z'\} = \{x, y, z - t\}$, в которой плоская невозмущенная поверхность жидкости будет двигаться вниз (т. е. против направления оси z') с постоянной скоростью, получим после несложных преобразований:

$$\nabla^2\varphi = 0, \tag{20}$$

$$\eta'_t = \partial_n\varphi\,\sqrt{1 + (\nabla_\perp\eta')^2}, \quad z' = \eta'(x, y, t), \tag{21}$$

$$\varphi = 0, \quad z' = \eta'(x, y, t), \tag{22}$$

$$\varphi \to -z', \quad z' \to -\infty, \tag{23}$$

где $\eta'(x, y, t) = \eta - t$, а ∂_n обозначает производную в направлении нормали к границе жидкости. Данные уравнения в явной форме задают движение свободной заряженной поверхности жидкого гелия $z' = \eta'(x, y, t)$. Они совпадают с уравнениями, описывающими так называемый процесс лапласовского роста — движение фазовой границы со скоростью, прямо пропорциональной нормальной производной некоторого гармонического скалярного поля (в нашем случае φ). В зависимости от выбранной системы это поле может иметь смысл температуры (задача Стефана в квазистационарном пределе), электростатического потенциала (электролитическое осаждение), давления (течение через пористую среду).

Докажем, что решения уравнений (10)–(15), соответствующие системе (20)–(23), устойчивы по отношению к малым возмущениям потенциала $\phi^{(-)}$. Заметим, что описываемое уравнениями (20)–(23) движение границы всегда направлено в сторону жидкости — это связано с принципом экстремума для гармонических функций. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ функция η' является однозначной функцией переменных x и y. Тогда при $t > 0$ справедливо неравенство

$$\eta'(x,y,t) \leq \eta'(x,y,0).$$

В исходных обозначениях имеем

$$\eta(x,y,t) \leq \eta(x,y,0) + t \qquad (24)$$

при любых x и y. Это неравенство остается в силе и при достаточно малых возмущениях $\phi^{(-)}$, когда в соотношении (19) можно пренебречь влиянием потенциала $\phi^{(-)}$ по сравнению с влиянием потенциала $\phi^{(+)}$, и движение границы описывается теми же уравнениями (20)–(23).

Что касается эволюции потенциала $\phi^{(-)}$, то при малых $|\nabla\phi^{(-)}|$ она описывается уравнениями (16)–(18), где условие на границе (17) достаточно рассматривать в линейном приближении:

$$\phi_t^{(-)} = -\phi_z^{(-)}, \quad z = \eta(x,y,t).$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ распределение потенциала определялось выражением

$$\phi^{(-)}|_{t=0} = \phi_0(x,y,z),$$

где ϕ_0 — некоторая гармоническая при $z \leq \eta(x,y,0)$ функция, затухающая при $z \to -\infty$. Тогда временная динамика потенциала $\phi^{(-)}$ задается выражением

$$\phi^{(-)} = \phi_0(x,y,z-t).$$

Из него видно, что особенности функции $\phi^{(-)}$ будут перемещаться по направлению оси z — они могут находиться только в области

$$z > \eta(x,y,0) + t. \qquad (25)$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (24), видим, что особенности потенциала $\phi^{(-)}$ не приближаются к границе жидкого гелия $z = \eta(x,y,t)$, и потому значение потенциала на поверхности не возрастает со временем. Отметим, что в противном случае полученное нами решение для $\phi^{(-)}$ оказалось бы неприменимым.

Вследствие несжимаемости жидкости уровень ее поверхности (усредненная по пространственным переменным величина функции η) не перемещается. С другой стороны, усредненная по x и y граница задаваемой неравенством (25) области, в которой находятся особенности функции $\phi^{(-)}$, двигается вверх с постоянной скоростью. Это означает, что особенности удаляются от поверхности жидкого гелия и возмущение $\phi^{(-)}$ будет релаксировать к нулю.

Таким образом мы доказали, что при $t \to \infty$

$$\varphi(x,y,z,t) + z \to \Phi(x,y,z,t),$$

а уравнения (20)–(23) описывают асимптотическое поведение жидкого гелия с заряженной поверхностью в сильном электрическом поле.

4. РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

В предыдущем разделе мы показали, что анализ трехмерного потенциального движения жидкого гелия в сильном электрическом поле сводится к рассмотрению уравнений (20)–(23), описывающих процесс трехмерного лапласовского роста. Возможность точного решения этих уравнений в двумерной геометрии позволит нам эффективно исследовать динамику развития неустойчивости заряженной поверхности жидкости вплоть до формирования на ней особенностей.

Будем считать, что в системе уравнений (20)–(23) все величины не зависят от переменной y. Введем аналитическую при $z' \leq \eta'(x,t)$ функцию $w = v - i\varphi$ комплексного аргумента $Z = x + iz'$ (с точностью до постоянного множителя это так называемый комплексный потенциал поля). Здесь v — гармонически сопряженная φ функция, такая что условие $v = \text{const}$ задает силовые линии электрического поля в среде. Понятно, что $w \to Z$ при $Z \to x - i\infty$.

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти в систему координат, где роль независимой переменной будет играть величина w, а в качестве неизвестной функции будет выступать функция Z, аналитическая в нижней полуплоскости комплексного переменного w (т. е., при $\varphi > 0$). Из (23) следует, что на бесконечности выполняется условие

$$Z \to w, \quad w \to v - i\infty. \qquad (26)$$

Получим также условие для Z на границе полуплоскости $\varphi = 0$. Профиль поверхности жидкого гелия можно задать параметрическими соотношениями

$$z' = z'(v,t) = \eta'(x(v,t),t), \quad x = x(v,t).$$

С их помощью несложно выразить нормальную скорость движения поверхности и величину напряженности электрического поля, входящие в (21), через функции $z'(v,t)$ и $x(v,t)$:

$$\frac{\eta'_t}{\sqrt{1+{\eta'_x}^2}} = \frac{z'_t x_v - x_t z'_v}{\sqrt{{z'}^2_v + x_v^2}}, \quad \partial_n\varphi = -\frac{1}{\sqrt{{z'}^2_v + x_v^2}}.$$

Подставляя эти соотношения в условие на поверхности (21), получим

$$z'_t x_v - x_t z'_v = -1$$

или, что то же самое,

$$\mathrm{Im}(Z_t^* Z_w) = 1, \quad w = v. \qquad (27)$$

Таким образом, мы приходим к задаче отыскания аналитической в нижней полуплоскости комплексного переменного w функции Z, удовлетворяющей условиям (26) и (27). Нелинейное условие (27) — это так называемое уравнение лапласовского роста (Laplacian Growth Equation), широко используемое при описании двумерного движения границы двух жидкостей с существенно различными вязкостями [16, 17], эволюции свободной поверхности жидкости в поле тяжести [18, 19] и т. д. Уравнение лапласовского роста интегрируемо в том смысле, что оно допускает бесконечное число частных решений вида [20]

$$Z(w) = w - it - i\sum_{n=1}^{N} a_n \ln(w - w_n(t)) + \\ + i\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\ln(w - w_0(t)). \qquad (28)$$

Здесь a_n — комплексные постоянные, а для функций времени w_n справедливо условие $\mathrm{Im}(w_n) > 0$ (особенности функции Z могут находиться только в верхней полуплоскости комплексного переменного w). Последнее слагаемое в (28) добавлено для того, чтобы обеспечить выполнение условия (26) и, как следствие, условия локализации возмущения поверхности в некоторой области: $\eta \to 0$ при $|x| \to \infty$. Можно положить $\mathrm{Im}(w_0) \gg \mathrm{Im}(w_n)$, тогда влияние этого члена на эволюцию поверхности будет пренебрежимо мало.

Подставляя (28) в (27) и раскладывая получившееся выражение на простые дроби, получим систему N обыкновенных дифференциальных уравнений для $w_n(t)$:

$$\dot{w}_n + i + i\sum_{m=1}^{N} a_m^* \frac{\dot{w}_n - \dot{w}_m^*}{w_n - w_m^*} = 0.$$

Интегрирование по t приводит к следующим N трансцендентным уравнениям:

$$w_n + it + i\sum_{m=1}^{N} a_m^* \ln(w_n - w_m^*) = C_n,$$

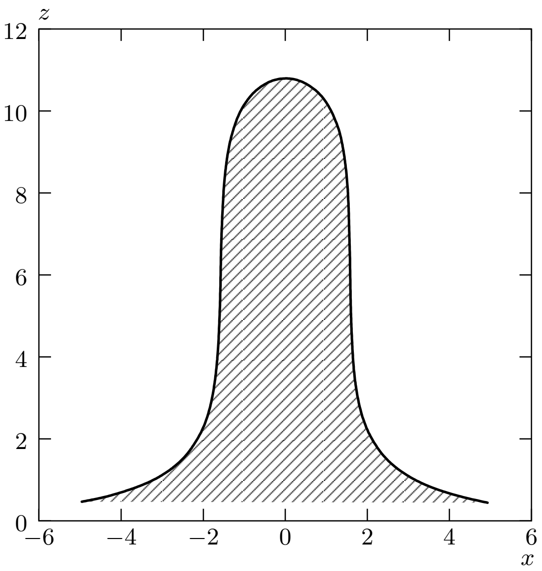

Рис. 2. Профиль поверхности жидкого гелия, соответствующий «однопальцевому» решению уравнения лапласовского роста, $a_1 = 1$, $q = 10^{-4}$, $w_0 = 5i$

где C_n — произвольные комплексные постоянные.

Рассмотрим простейшие решения этого типа, соответствующие $N = 1$, $\mathrm{Re}(w_1) = 0$ и $a_1 = \pm 1$:

$$Z(w) = w - it \mp i\ln(w - iq(t)), \qquad (29)$$

$$q(t) \pm \ln q(t) = 1 + t_c - t, \qquad (30)$$

где $q = \mathrm{Im}(w_1)$, t_c — действительная постоянная. Форма уединенного возмущения, соответствующего (29) и (30), задается параметрическими выражениями

$$z(v,t) = z'(v,t) + t = \mp\ln\sqrt{v^2 + q^2(t)},$$
$$x(v,t) = v \pm \mathrm{arctg}\,\frac{v}{q(t)}.$$

Пусть $a_1 = +1$ и мы имеем дело с уединенным возмущением поверхности, направленным «вверх». Из (30) видно, что при достаточно больших t величина $q \sim e^{-t}$ и, следовательно, амплитуда возмущения поверхности линейно растет со временем: $z|_{v=0} \to t$ при $t \to \infty$. Это так называемое «однопальцевое» решение уравнения лапласовского роста (см. рис. 2). Несложно понять, что аналогичные решения возможны и в трехмерном случае. Как видно из уравнений (20)–(23), описывающих процесс трехмерного лапласовского роста, если на поверхности изначально имеется область, где напряженность поля $\partial_n\varphi$ мала (например, вблизи вершины трехмерного пальцеобразного возмущения поверхности), то

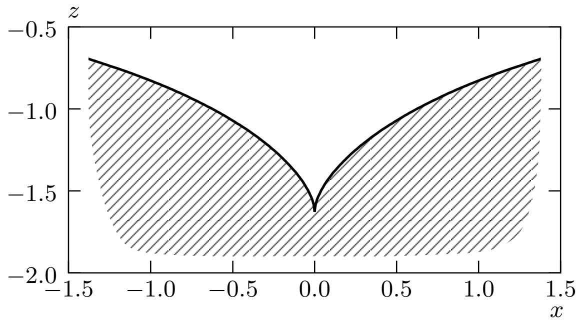

Рис. 3. Профиль поверхности жидкого гелия в момент формирования особенности — точки заострения, $a_1 = -1$, $q = 0.8$, $w_0 = 4i$

скорость ее движения в координатах $\{x, y, z'\}$ также будет малой. В лабораторной системе отсчета это будет соответствовать струе, двигающейся по направлению оси z с постоянной скоростью.

Рассмотрим теперь случай уединенного возмущения поверхности, направленного «вниз» ($a_1 = -1$, $q(t) \geq 1$). Это решение существует лишь конечное время, приводя в момент $t = t_c$ к формированию особенности на поверхности жидкости — точки возврата первого рода (рис. 3). Действительно, разлагая z и x по степеням v и τ с учетом того, что для функции $q(t)$ вблизи t_c справедливо

$$q(t) \approx 1 + \sqrt{2\tau}, \quad \tau = t_c - t,$$

получим в основном порядке:

$$z = \frac{v^2}{2} + \sqrt{2\tau}, \quad x = \frac{v^3}{3} + v\sqrt{2\tau}. \qquad (31)$$

Отсюда видно, что в момент $\tau = 0$, т. е. $t = t_c$, форма поверхности вблизи особой точки задается соотношением $2z = |3x|^{2/3}$, что соответствует точке заострения[1)]. В работах [17, 23] указывалось, что особенности $z^3 \propto x^2$ являются особенностями общего положения для процессов, описываемых уравнением лапласовского роста. Подобные решения уравнений движения жидкого гелия с заряженной границей отражают наблюдавшуюся в экспериментах [12, 24] тенденцию к появлению на свободной поверхности углублений, заостряющихся за конечное время. С математической точки зрения появление сингулярности на поверхности жидкости связано с обращением в нуль якобиана преобразования $\{x, z'\} \to \{v, \varphi\}$ при $\varphi = v = \tau = 0$. На острие происходит бесконечное увеличение напряженности электрического поля, а также скорости движения поверхности за конечное время:

$$|\nabla\varphi| \sim x_v^{-1}\big|_{v=0} \propto \tau^{-1/2}, \quad |\nabla\Phi| \propto z_t\big|_{v=0} \propto \tau^{-1/2}.$$

Важно отметить, что описываемое выражениями (31) сингулярное решение задачи справедливо и в случае, когда поле над поверхностью не экранируется полностью, т. е. условие $E' \ll E$ не выполняется. Дело в том, что в окрестности особенности условие малости поля над поверхностью по сравнению с полем в жидкости выполняется естественным образом. Кроме того, необязательным является условие $\lambda \ll E^2/g\rho$. Это связано с тем, что амплитуда возмущений поверхности остается конечной и влияние сил тяжести всегда пренебрежимо мало вблизи точки заострения.

Обсудим теперь влияние капиллярных эффектов. Несложно оценить поверхностное и электростатическое давления вблизи особенности:

$$P_S \propto \alpha\eta_{xx} \propto \alpha\rho^{1/2}E^{-1}\tau^{-1},$$

$$P_E \propto (\nabla\varphi)^2 \propto \lambda\rho^{1/2}E\tau^{-1}.$$

Здесь мы вернулись к размерным обозначениям. Из этих выражений видно, что при выполнении условия $\lambda \gg \alpha E^{-2}$ капиллярные силы малы по сравнению с электростатическими и, следовательно, учитывать их на стадии формирования острий не требуется. Это условие оказывается единственным необходимым условием применимости уравнения лапласовского роста и его решений (31) вблизи сингулярностей.

5. ЭЛЕКТРОКАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим случай, когда характерная длина поверхностных волн сравнима с величиной αE^{-2} и необходимо учитывать капиллярные эффекты. Будем считать выполненным условие $E \gg E_c$, тогда влиянием силы тяжести можно пренебречь. Дисперсионное соотношение (1) для электрокапиллярных волн на заряженной границе жидкого гелия при $E' = 0$ в безразмерных обозначениях, введенных в разд. 2, принимает вид

$$\omega^2(k) = k^3 - k^2, \qquad (32)$$

где за единицу длины принята величина $\lambda = 4\pi\alpha E^{-2}$. Из (32) видно, что $\omega^2 < 0$ при $k < 1$

1) На заряженной поверхности проводящей жидкости, для которой $E = 0$ и $E' \neq 0$, в пределе сильного поля формируются слабые корневые особенности вида $z \propto |x|^{3/2}$, для которых кривизна оказывается бесконечной, а сама поверхность остается гладкой [21, 22].

и, следовательно, развивается апериодическая электрогидродинамическая неустойчивость поверхности жидкости. Если же выполняется условие $k > 1$, то частота ω будет действительной, что соответствует распространению линейных диспергирующих волн.

Понятно, что основанный на анализе соотношения (32) подход к исследованию эволюции заряженной поверхности жидкости применим лишь в случае возмущений границы малой амплитуды: $A \ll k^{-1}$. Для волн с конечной амплитудой нелинейный эффект может заключаться в зависимости дисперсионного соотношения от A (см., например, [25]):

$$\omega = \omega(k, A).$$

Обычно зависимость частоты от амплитуды ищется в виде степенного ряда по A (разложение Стокса), что ограничивает рассмотрение слабонелинейным пределом. Покажем, что для электрокапиллярных волн можно найти точное выражение для нелинейного дисперсионного соотношения.

Уравнения, описывающие прогрессивную волну (волну, профиль которой не меняется в системе координат, связанной с волной), получаются из уравнений электрогидродинамики (3)–(9) при помощи следующих подстановок:

$$\varphi = \varphi(x', z), \quad \Phi = \Phi'(x', z) + Cx', \quad \eta = \eta(x'),$$

где $x' = x - Ct$, а постоянная C имеет смысл скорости движения волны по направлению оси x. Находим:

$$\Phi'_{x'x'} + \Phi'_{zz} = 0, \tag{33}$$

$$\varphi_{x'x'} + \varphi_{zz} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\Phi'^2_{x'}+\Phi'^2_z-C^2}{2}+\frac{\varphi^2_{x'}+\varphi^2_z-1}{2} = \frac{\eta_{x'x'}}{(1+\eta^2_{x'})^{3/2}}, \quad z = \eta(x'), \tag{35}$$

$$\Phi'_z = \eta_{x'}\Phi'_{x'}, \quad z = \eta(x'), \tag{36}$$

$$\varphi = 0, \quad z = \eta(x'), \tag{37}$$

$$\Phi' \to -Cx', \quad z \to -\infty, \tag{38}$$

$$\varphi \to -z, \quad z \to -\infty. \tag{39}$$

Эти уравнения можно упростить, если ввести функцию тока $\Psi(x', z)$, гармонически сопряженную потенциалу Φ':

$$\Psi_{x'} = -\Phi'_z, \quad \Psi_z = \Phi'_{x'}.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Psi_{x'x'} + \Psi_{zz} = 0 \tag{40}$$

с граничными условиями

$$\Psi = 0, \quad z = \eta(x'), \tag{41}$$

$$\Psi \to -Cz, \quad z \to -\infty, \tag{42}$$

следующими из (36) и (38). Как несложно заметить, уравнения (40)–(42) совпадают с уравнениями для потенциала электрического поля (34), (37) и (39). Следовательно, существует функциональная связь

$$\Psi = C\varphi.$$

С ее использованием уравнение Бернулли (35) существенно упрощается, принимая вид

$$\frac{C^2+1}{2}\left({\varphi_{x'}}^2 + {\varphi_z}^2 - 1\right) = \frac{\eta_{x'x'}}{(1+{\eta_{x'}}^2)^{3/2}}, \quad z = \eta(x'). \tag{43}$$

Это условие в сочетании с (34), (37) и (39) полностью определяет форму волны в движущейся системе координат $\{x', z\}$.

Уравнения (34), (37), (39) и (43) с точностью до постоянных множителей совпадают с уравнениями, описывающими форму прогрессивной капиллярной волны [14], а также равновесную конфигурацию заряженной поверхности жидкого металла [26]. Они допускают точные периодические решения, для которых граница жидкости задается параметрическими выражениями

$$z = \frac{4k^{-2}}{2(C^2+1)^{-1} + A\cos(kp)} + z_0, \tag{44}$$

$$x' = p - \frac{2Ak^{-1}\sin(kp)}{2(C^2+1)^{-1} + A\cos(kp)} + x'_0, \tag{45}$$

где z_0 и x'_0 — постоянные, p — параметр (один период соответствует изменению p на $2\pi/k$), а величина A имеет смысл амплитуды возмущения поверхности, т. е. $A = (z_{max} - z_{min})/2$. Ее зависимость от k и C задается соотношением

$$A = \left[\frac{4}{(C^2+1)^2} - \frac{4}{k^2}\right]^{1/2}. \tag{46}$$

Как указывалось в [14], решения (44) и (45) существуют только при

$$1 \le \frac{k}{C^2+1} \le \gamma,$$

где $\gamma \approx 1.52$.

Учитывая, что C является фазовой скоростью волны, положим в (46) величину C равной ω/k. Решая получившееся выражение относительно частоты ω, находим точное нелинейное дисперсионное соотношение

$$\omega^2(k,A) = \frac{k^3}{\sqrt{1+A^2k^2/4}} - k^2 \tag{47}$$

и условия его применимости:

$$k^3\gamma^{-1} \le \omega^2 - k^2 \le k^3. \tag{48}$$

Видно, что в пределе бесконечно малых амплитуд, $A \to 0$, выражение (47) переходит в линейное дисперсионное соотношение (32). Обсудим, к чему приводит влияние нелинейности. Из (47) видно, что при фиксированном волновом числе $k \ge 1$ максимальное значение амплитуды возмущения поверхности $A_{max}(k)$ соответствует минимальному возможному значению ω^2. Как следует из условий (48), при $1 \le k \le \gamma$ величина $\omega^2_{min} = 0$, что соответствует волне с нулевой скоростью. В этом случае выражения (44) и (45) задают решение задачи о стационарном профиле заряженной поверхности жидкого гелия. При $k > \gamma k_1$ амплитуда максимальна для электрокапиллярных волн со скоростью распространения

$$C = \sqrt{k\gamma^{-1} - 1},$$

при этом

$$\omega^2_{min} = k^3\gamma^{-1} - k^2.$$

Тогда получим

$$A_{max}(k) = \begin{cases} 0, & 0 \le k < 1, \\ 2\sqrt{1-k^{-2}}, & 1 \le k \le \gamma, \\ 2k^{-1}\sqrt{\gamma^2-1}, & k > \gamma \end{cases}$$

(график этой зависимости приведен на рис. 4). Если амплитуда превысит это значение, то либо выражения (44) и (45) описывают самопересекающуюся, т. е. не реализуемую физически поверхность, либо $\omega^2 < 0$, что соответствует некорректно поставленной задаче в контексте волнового распространения. Это позволяет высказать предположение, что условие $A(k) > A_{max}(k)$ является критерием жесткого возбуждения электрогидродинамической неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкого гелия, обобщающим простейший линейный критерий неустойчивости $k < 1$ на случай возмущений конечной амплитуды.

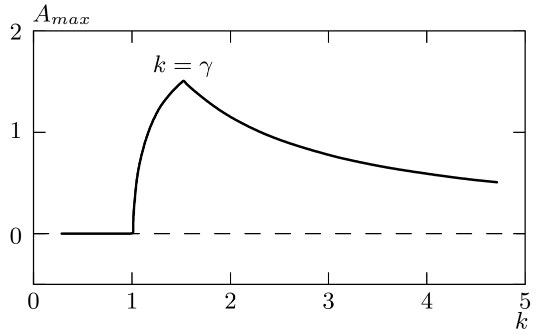

Рис. 4. Зависимость максимального значения амплитуды A_{max} электрокапиллярной волны на заряженной поверхности жидкого гелия от волнового числа k. При $k < \gamma$ максимум приходится на значение $\omega = 0$, при $k > \gamma$ частота отлична от нуля

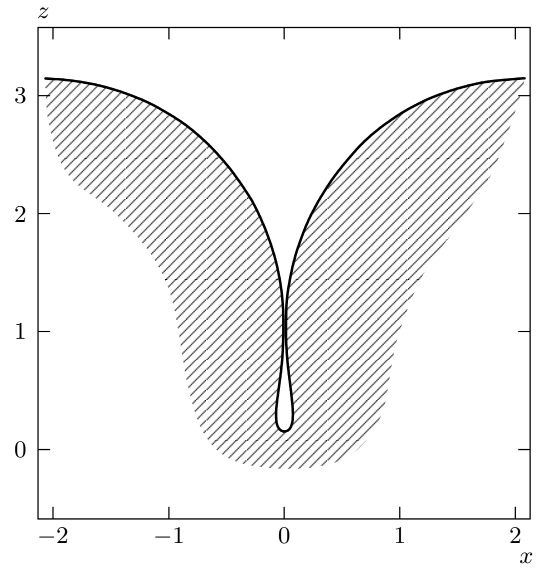

Рис. 5. Один период стационарного профиля заряженной поверхности жидкого гелия для $k = \gamma$. При этом значении волнового числа амплитуда электрокапиллярной волны достигает наибольшего возможного значения

Отметим, что максимум функции $A_{max}(k)$ приходится на $k = \gamma$. Соответствующая этому значению волнового числа форма поверхности жидкости изображена на рис. 5. Из него видно, что в жидкости появляются полости. Подобные решения отражают тенденцию к формированию заряженных пузырьков (в экспериментальной работе [12] — «баблонов») на заостренных углублениях границы жидкого гелия. С их зарождением связан основной механизм ухода электронов с поверхности.

6. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим эволюцию заряженной поверхности жидкого гелия в важном случае осевой симметрии задачи. Уравнения движения (20)–(23), соответствующие нарастающей ветви решений системы (10)–(15), в цилиндрических координатах $\{r, z'\} = \{r, z-t\}$ принимают вид

$$\varphi_{rr} + r^{-1}\varphi_r + \varphi_{z'z'} = 0,$$

$$\eta'_t = -(\varphi_r^2 + \varphi_{z'}^2)^{1/2}(1 + \eta'^2_r)^{1/2}, \quad z' = \eta'(r,t),$$

$$\varphi = 0, \quad z' = \eta'(r,t),$$

$$\varphi \to -z', \quad z' \to -\infty.$$

Здесь $r = \sqrt{x^2+y^2}$, а в условии (21) мы учли, что на эквипотенциальной границе $\partial_n\varphi = -|\nabla\varphi|$.

На существенно нелинейных стадиях формирования углубления в поверхности жидкости можно считать, что электрическое поле в области значительной кривизны поверхности намного превосходит внешнее, $|\nabla\varphi| \gg 1$. В этом случае динамика границы $\eta' = \eta - t$ целиком определяется собственным полем, быстро затухающим на расстоянии, что дает основание использовать при $z \to -\infty$ условие $|\nabla\varphi| \to 0$ вместо условия однородности поля. Будем также полагать, что скорость поверхности жидкости значительно превышает скорость перемещения начала координат в лабораторной системе отсчета (т. е. $|\eta_t| \gg 1$). Тогда в уравнениях движения можно заменить η' на η, z' на z. Получим в итоге:

$$\varphi_{rr} + r^{-1}\varphi_r + \varphi_{zz} = 0, \quad z < \eta(r,t), \tag{49}$$

$$\varphi_t = -{\varphi_r}^2 - {\varphi_z}^2, \quad z = \eta(r,t), \tag{50}$$

$$\varphi = 0, \quad z = \eta(r,t), \tag{51}$$

$${\varphi_r}^2 + {\varphi_z}^2 \to 0, \quad r^2 + z^2 \to \infty. \tag{52}$$

В (50) мы воспользовались следующими соотношениями на границе жидкости:

$$\eta_t = -\frac{\varphi_t}{\varphi_z}, \quad \eta_r = -\frac{\varphi_r}{\varphi_z}.$$

К условиям применимости этого приближения мы вернемся в конце данного раздела.

Частное решение уравнений (49)–(52) можно получить при помощи подстановки, аналогичной использованной в работе [27] при построении осесимметричных решений задачи Стефана:

$$\varphi(r,z,t) = f(u(r,z,t)), \tag{53}$$

$$u(r,z,t) = -z - Vt + \sqrt{r^2 + (z+Vt)^2}, \tag{54}$$

где постоянная V имеет смысл скорости движения поверхности вглубь жидкости. Несложно заметить, что эквипотенциальные поверхности, соответствующие (53) и (54), представляют собой семейство софокусных параболоидов вращения:

$$r^2 = 2u(z+Vt) + u^2 \tag{55}$$

с фокусом в точке $r=0$ и $z=-Vt$.

Подставляя выражения (53), (54) в (49), приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$uf_{uu} + f_u = 0. \tag{56}$$

Из (50) и (51) следует, что граничные условия к нему имеют вид

$$f_u(u_0) = \frac{V}{2}, \quad f(u_0) = 0. \tag{57}$$

Здесь u_0 — значение параметра u на поверхности жидкости. В дальнейшем мы будем использовать величину $K = 1/u_0$, которая, как видно из (55), задает кривизну поверхности жидкости на оси симметрии. Решая (56) и (57), получим

$$f(u) = \frac{V\ln(Ku)}{2K}, \tag{58}$$

что в сочетании с (53) и (54) определяет временную эволюцию потенциала электрического поля. Заметим, что условие (52) выполняется естественным образом. Форма поверхности для данного точного решения уравнений движения (49)–(52) задается соотношением

$$\eta(r,t) = \frac{Kr^2}{2} - Vt - (2K)^{-1}, \tag{59}$$

что соответствует иглообразному углублению, втягивающемуся в жидкость со скоростью V. Подобная геометрия возмущения поверхности может считаться простейшей, параболоидальной, аппроксимацией формы границы жидкости на существенно нелинейных стадиях развития неустойчивости заряженной границы жидкости.

Напомним, что применимость приближения (49)–(52) исходной системы (20)–(23) ограничена условиями

$$|\eta_t| \gg 1 \quad \text{и} \quad |\nabla\varphi| \gg 1.$$

Поскольку для решений (59) $\eta_t = -V$ при любых r и t, первое условие сводится к неравенству $V \gg 1$ (в размерных обозначениях $V \gg E\sqrt{4\pi\rho}$). Что касается второго условия, то можно найти характерный размер D области, в которой электрическое поле, создаваемое заряженной параболоидальной поверхностью, превышает внешнее. Из (53), (54) и (58) следует, что распределение поля в жидкости определяется выражением

$$|\nabla\varphi| = \frac{V}{K\sqrt{2Ru}}.$$

Здесь $R = \sqrt{r^2 + (z + Vt)^2}$ — расстояние до фокуса параболоида, причем на вершине параболоида, т. е. в точке $r = 0$ и $z = -Vt - (2K)^{-1}$, величина поля максимальна и равна V. Поскольку напряженность поля в основном убывает при удалении от фокуса как R^{-1}, то для масштаба D справедлива оценка $D \propto V/K$. Заметим, что подобный вывод имеет смысл лишь в случае, если величина D значительно превосходит радиус кривизны возмущения поверхности K^{-1}. Это требование снова приводит нас к неравенству $V \gg 1$.

Таким образом, нам удалось найти частные осесимметричные решения уравнений движения жидкого гелия с заряженной поверхностью, описывающие эволюцию локализованного возмущения поверхности со значительной кривизной, и установить условия их применимости. Однако полученные решения не следует считать решениями общего положения. Более вероятно, что доминировать, как и в двумерном случае, будут решения взрывного типа, для которых происходит неограниченное заострение поверхности за конечное время.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В отсутствие поверхностного заряда рассмотренные нами уравнения электрогидродинамики жидкого гелия превращаются в хорошо известные уравнения безвихревого движения несжимаемой жидкости со свободной границей. Эти уравнения чрезвычайно трудны для исследования, в настоящее время не существует развитых методов построения их решений. В данной работе нам удалось показать, что учет электростатического давления не усложняет их анализ. Напротив, появление дополнительного слагаемого в динамическом граничном условии вносит в уравнения определенную симметрию — они оказываются совместными с условиями $\varphi + z = \pm\Phi$. Возникающая функциональная связь между потенциалами скорости и электрического поля позволяет вдвое уменьшить число уравнений, необходимых для описания движения поверхности, и, в конечном итоге, найти широкий класс точных решений уравнений движения жидкого гелия с заряженной электронами границей. Важно, что полученные решения не ограничены условием малости возмущений поверхности — они описывают эволюцию границы жидкости вплоть до формирования на ней точек заострения.

За рамками работы осталось изучение динамики формирования особенностей в случае, когда характерный масштаб возмущений поверхности λ сравним с величиной αE^{-2} и необходимо учитывать капиллярные эффекты. В двумерной геометрии подобный анализ можно провести с использованием предложенной в работах [28, 29] техники исследования плоских потенциальных течений со свободной границей, основанной на конформном отображении области, занимаемой жидкостью, в полуплоскость. В терминах настоящей работы такое преобразование соответствует использованию в качестве независимых переменных потенциала поля φ и гармонически сопряженной ему функции v. В случае осевой симметрии задачи (именно такая геометрия наиболее точно соответствует наблюдаемым в экспериментах [12, 24] явлениям) за формирование особенностей могут быть ответственны автомодельные решения уравнений электрогидродинамики, аналогичные рассмотренным в недавней работе [30], посвященной формированию конических острий на поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле. В соответствии с автомодельным сценарием развития неустойчивости на поверхности за конечное время появятся конические лунки с углом раствора 98.6°. Детальное рассмотрение этих процессов требует отдельного исследования.

Автор признателен В. Е. Захарову и Е. А. Кузнецову за интерес к работе. Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 00-02-17428), INTAS (грант 99-1068), а также РАН (шестой конкурс-экспертиза 1999 года проектов молодых ученых РАН, грант 63).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. W. Cole and M. H. Cohen, Phys. Rev. Lett. **23**, 1238 (1969).
2. В. Б. Шикин, ЖЭТФ **58**, 1748 (1970).
3. Л. П. Горьков, Д. М. Черникова, Письма в ЖЭТФ **18**, 119 (1973).
4. Д. М. Черникова, ФНТ **2**, 1374 (1976).
5. L. Tonks, Phys. Rev. **48**, 562 (1935).
6. Я. И. Френкель, ЖЭТФ **6**, 347 (1936).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
8. Л. П. Горьков, Д. М. Черникова, ДАН СССР **228**, 829 (1976).
9. H. Ikezi, Phys. Rev. Lett. **42**, 1688 (1979).
10. Д. М. Черникова, ФНТ **6**, 1513 (1980).
11. В. Б. Шикин, Ю. П. Монарха, *Двумерные заряженные системы в гелии*, Наука, Москва (1989).
12. А. П. Володин, М. С. Хайкин, В. С. Эдельман, Письма в ЖЭТФ **26**, 707 (1977).
13. Н. М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **71**, 534 (2000).
14. G. D. Crapper, J. Fluid Mech. **2**, 532 (1957).
15. В. Е. Захаров, ПМТФ № 2, 86 (1968).
16. П. Я. Полубаринова-Кочина, ДАН СССР **XLVII**, 254 (1945).
17. D. Bensimon, L. P. Kadanoff, Sh. Liang et al., Rev. Mod. Phys. **58**, 977 (1986).
18. А. И. Дьяченко, В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Физика плазмы **22**, 916 (1996).
19. V. E. Zakharov and A. I. Dyachenko, Physica D **98**, 652 (1996).
20. M. B. Mineev-Weinstein and S. P. Dawson, Phys. Rev. E **50**, R24 (1994).
21. N. M. Zubarev, Phys. Lett. A **243**, 128, (1998).
22. Н. М. Зубарев, ЖЭТФ **114**, 2043 (1998).
23. S. D. Howison, SIAM J. Appl. Math. **46**, 20 (1986).
24. В. С. Эдельман, УФН **130**, 675 (1980).
25. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
26. Н. М. Зубарев, ЖЭТФ **116**, 1990 (1999).
27. Г. П. Иванцов, ДАН СССР **LVIII**, 567 (1947).
28. A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **221**, 73 (1996).
29. А. И. Дьяченко, ДАН **376**, 27 (2001).
30. Н. М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **73**, 613 (2001).