

ФЛУКТУАЦИОННЫЙ ВЫХОД ИЗ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО АТТРАКТОРА В СИСТЕМЕ ЛОРЕНЦА

В. С. Анищенко^a, Д. Г. Лучинский^b, П. В. Е. Макклиток^{b},*

*И. А. Хованов^{a**}, Н. А. Хованова^a*

^a *Саратовский университет
410026, Саратов, Россия*

^b *Ланкастерский университет, Ланкастер LA1 4YB, Великобритания*

Поступила в редакцию 13 июля 2001 г.

Рассматривается индуцированный шумом выход из бассейна притяжения квазигиперболического хаотического аттрактора в системе Лоренца. Исследование проведено в рамках теории больших флуктуаций на основе экспериментального анализа предыстории выхода. Продемонстрировано, что оптимальная траектория выхода является единственной и определяется многообразиями седловой точки системы Лоренца. Установлено, что процесс выхода состоит из трех этапов и шум на каждом из этапов играет принципиально различную роль. Показано, что динамика флуктуационного выхода из квазигиперболического аттрактора принципиально отличается от динамики выхода из негиперболического аттрактора, рассмотренного ранее [1]. Обсуждена возможность аналитического описания индуцированных шумом больших отклонений от квазигиперболического хаотического аттрактора, и очерчен круг нерешенных в этом направлении задач.

PACS: 05.40.-a, 05.45.-a, 02.50.-g, 05.10.Gg, 05.20.-y

1. ВВЕДЕНИЕ

Хаотические колебания наблюдаются во многих областях физики, и по крайней мере в двух из них — гидродинамике и физике лазеров — хаотическая динамика описывается одними и теми же дифференциальными уравнениями — системой Лоренца [2]. Минимальный набор уравнений для случая конвекции Рэлея–Бенара (система Лоренца) был построен Зальцманом [3]. Позже Хакен [4] показал, что система Лоренца описывает генерацию в одномодовом лазере с однородно уширенной спектральной линией рабочего перехода при точном совпадении собственной частоты резонатора с частотой рабочего перехода [5, 6]. Система Лоренца является классической моделью низкоммерного хаоса, на которой изучаются фундаментальные вопросы нелинейной динамики [7], такие как синхронизация, управление хаосом,

скрытая передача информации, восстановление инвариантов по временным рядам и т. п. Перечисленные обстоятельства поддерживают неослабевающий интерес ученых к данной системе. Кроме того, повышенный интерес к системе Лоренца обусловлен тем, что она при определенных условиях демонстрирует режим квазигиперболического хаоса, для которого возможно математическое описание [8, 9] и, следовательно, возможна проверка результатов численных экспериментов на основе строгой теории. Такая ситуация не типична для систем с хаотическими аттракторами, главными и практически единственными инструментами исследования которых являются различные численные методы решения дифференциальных уравнений и численный бифуркационный анализ.

При изучении системы Лоренца учет влияния флуктуаций на динамические режимы и переходы в системе является ключевым моментом, который связан с реализуемостью результатов численного и теоретического анализов в физическом эксперимен-

*P. V. E. McClintock, Lancaster University, Lancaster LA1 4YB, Great Britain.

**E-mail: igor@chaos.ssu.runnet.ru

те. Отметим, что влияние флуктуаций на режимы функционирования системы Лоренца достаточно подробно изучалось теоретически [10, 11] и экспериментально [12, 13]. Однако, несмотря на большое количество работ, сегодня отсутствуют ответы на многие вопросы, в том числе ключевые: какова динамика системы Лоренца во время больших отклонений траектории под действием шума от хаотического аттрактора; возможно ли построение квазипотенциала аттрактора; каков механизм индуцированного шумом выхода из области притяжения квазигиперболического аттрактора? Последний вопрос, связанный с проблемой индуцированных шумом переходов в неравновесных системах, является одним из фундаментальных в теории флуктуаций неравновесных систем [14] и имеет широкий междисциплинарный интерес с точки зрения практических приложений, например, для последовательно соединенных джозефсоновских переходов [15], биологического транспорта [16], лазерных систем [17], а также для решения проблемы управления переходами между аттракторами в мультистабильных системах [18–20].

Недавний прогресс в решении проблемы индуцированных шумом переходов в неравновесных системах, возбуждаемых цветным шумом [21–25], неградиентной [26–29] или периодической внешней силой [30–32], а также в автоколебательных системах [33, 34] связан с использованием гамильтонова формализма [35] или эквивалентного ему формализма континуальных интегралов. В основе гамильтонова подхода лежит представление об оптимальных траекториях, вдоль которых система флуктуирует к удаленным от равновесия состояниям [36]. Математическим вариантом этих физических представлений являются асимптотические формулы для решения уравнения Фоккера–Планка, записываемые в терминах лучей (т. е. решений уравнений Гамильтона) или фронтов (т. е. решений уравнения Гамильтона–Якоби). В связи с успешным применением гамильтонова формализма для решения многих задач теории неравновесных флуктуаций особую актуальность приобретает вопрос о возможности его обобщения на более широкий класс диссипативных систем, в том числе на хаотические системы. Сложность такого обобщения затрудняет непосредственное применение аналитических методов. Однако недавно был предложен новый экспериментальный подход к исследованию оптимальных траекторий [37], базирующийся на гамильтоновом формализме и основанный на измерении так называемого распределения вероятности предьстории флуктуаций. Этот метод, по существу, сводится к непрерывному слеже-

нию за динамикой системы и построению распределения всех реализаций флуктуационных траекторий системы, переводящих ее из состояния равновесия в заданное удаленное состояние. Преимущества такого подхода были продемонстрированы [38–41] на примере исследования некоторых фундаментальных свойств симметрии оптимальных траекторий и сингулярных особенностей в их распределении. В недавних работах [1, 20] показано, что метод, основанный на статистическом анализе динамики флуктуационных траекторий, может быть использован для нахождения оптимальной траектории индуцированного шумом выхода из области притяжения хаотического аттрактора в нелинейном осцилляторе, возбуждаемом периодической внешней силой. Продemonстрировано, что за границами хаотического аттрактора эта траектория единственна и образуется путем слияния нескольких равновероятных траекторий, выходящих из хаотического аттрактора. В указанных работах [1, 20] изучался выход из негиперболического аттрактора. Здесь мы исследуем индуцированный шумом выход из квазигиперболического хаотического аттрактора в системе Лоренца и, таким образом, отвечаем на вопрос, как зависит механизм выхода из хаотического аттрактора от его структуры.

Статья состоит из трех частей. В разд. 2 рассматривается система Лоренца и структура ее фазового пространства. Основы теоретического подхода в рамках гамильтонова формализма и экспериментального подхода, основанного на измерении предьстории флуктуаций, изложены в разд. 3. Там же рассматривается влияние флуктуаций на вероятностную меру хаотического аттрактора. Результаты и их обсуждение представлены в разд. 4 работы. В заключении сделаны выводы и очерчен круг нерешенных проблем.

2. СИСТЕМА ЛОРЕНЦА

Система Лоренца была получена как упрощенная модель, описывающая конвекцию жидкости между двумя плоскостями с разными температурами, причем температурный и гравитационный градиенты противоположно направлены [3]. Эта модель записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \sigma(q_2 - q_1), \\ \dot{q}_2 &= r q_1 - q_2 - q_1 q_3, \\ \dot{q}_3 &= q_1 q_2 - b q_3 + \xi(t), \\ \langle \xi(t) \rangle &= 0, \quad \langle \xi(t) \xi(0) \rangle = D \delta(t), \end{aligned} \quad (1)$$

или в векторной форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{K}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{K} &= \{K_1, K_2, K_3\} = \\ & \{\sigma(q_2 - q_1), r q_1 - q_2 - q_1 q_3, q_1 q_2 - b q_3\}, \quad (2) \\ \mathbf{f}(t) &= \{0, 0, \xi(t)\}, \quad \langle \mathbf{f} \rangle = \mathbf{0}, \\ \langle f_i(t) f_j(0) \rangle &= D Q_{ij} \delta(t), \quad Q_{ij} = \delta_{iz} \delta_{jz}. \end{aligned}$$

Здесь q_1, q_2, q_3 — динамические переменные, а σ, r, b — параметры, которые по отношению к конвекции жидкости имеют следующий смысл: σ — число Прандтля (отношение кинематической вязкости к тепловой диффузии), $r = R/R_c$ — приведенное число Рэлея (R — число Рэлея, R_c — критическое значение числа Рэлея, при котором возникает конвекция), $b = 4\pi^2/(\pi^2 + k^2)$ — константа, характеризующая физические размеры системы, k — безразмерное число, связанное с пространственной периодичностью в расположении валов жидкости; координата q_1 является пропорциональной интенсивности конвекционного движения, q_2 пропорциональна разности температур между поднимающимися и опускающимися потоками жидкости, q_3 пропорциональна отклонению вертикального профиля температуры между плоскостями от линейного. Для простоты рассмотрения мы добавляем шумовой источник $\xi(t)$ в виде белого шума только в третье уравнение системы (1), что не нарушает зеркальную симметрию системы; D — интенсивность шума; $\delta(t)$ — дельта-функция; δ_{iz} и δ_{jz} — символы Кронекера.

Уравнения (1) описывают также бегущие волны, возбуждаемые в кольцевом резонаторе, наполненном двухуровневыми атомами с однородной спектральной линией уширения [4]. Переменные и параметры системы (1) по отношению к лазерной системе могут быть интерпретированы следующим образом: q_1 и q_2 — нормированные амплитуда и поляризация электрического поля; q_3 — нормированная инверсия населенности в системе атомов; $\sigma = k/\gamma_1$, $r = \Lambda + 1$, $b = \gamma_2/\gamma_1$, где k — скорость релаксации поля в резонаторе, γ_1 и γ_2 — соответственно константы поляризации и инверсии, Λ — параметр накачки. Отметим, что инфракрасный лазер был предложен как пример реализации системы Лоренца [12].

Уравнения Лоренца имеют простую структуру и содержат только два нелинейных слагаемых. Кратко рассмотрим основные бифуркации в системе (1)¹⁾. Зафиксируем параметры $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и бу-

¹⁾ Более детальный и строгий бифуркационный анализ системы Лоренца можно найти в [8, 9].

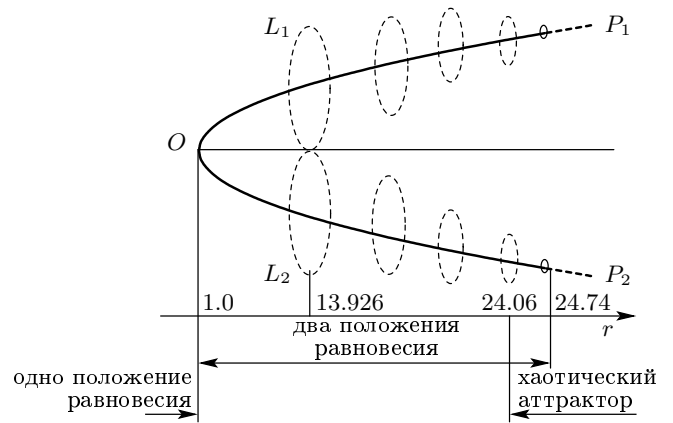


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы Лоренца для $\sigma = 10$ и $b = 8/3$. Штриховыми линиями показаны неустойчивые состояния, сплошными линиями — устойчивые

дем варьировать параметр r . В этом случае имеются две глобальные бифуркации. Диаграмма показана на рис. 1. При $r = 1$ наблюдается суперкритическая вилкообразная бифуркация (бифуркация «трехкратное равновесие») [7]: положение равновесия в начале координат $O(0, 0, 0)$ становится неустойчивым и появляются два устойчивых состояния:

$$P_1 \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right)$$

и

$$P_2 \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right).$$

В фазовом пространстве системы имеются два устойчивых положения равновесия (устойчивых фокуса), P_1 и P_2 , седловое положение равновесия O и его одномерное неустойчивое и двумерное устойчивое многообразия. Две ветви неустойчивого многообразия являются сепаратрисами седловой точки O .

Вторая бифуркация наблюдается при

$$r = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \approx 24.74, \quad (3)$$

когда фокусы P_1 и P_2 теряют устойчивость и единственным аттрактором системы становится хаотический аттрактор.

Отметим дополнительно две локальные бифуркации.

При $r \approx 13.926$ происходит двоякоасимптотическое гомоклиническое касание сепаратрис седловой точки O (на рис. 1 не показано). При переходе параметра r через это бифуркационное значение рождаются два седловых цикла, L_1 и L_2 , и появляется

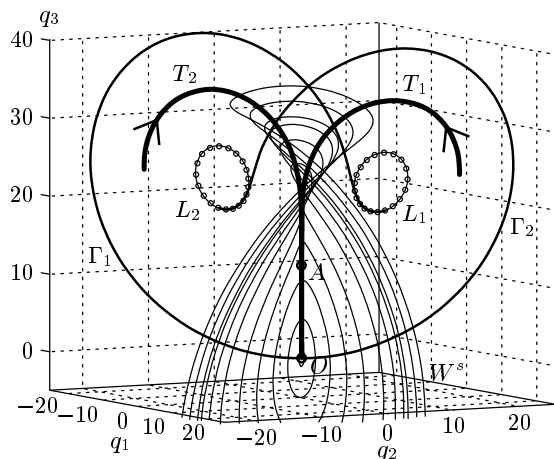


Рис. 2. Сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 и двумерное устойчивое многообразие W^s седлового положения равновесия O . Седловые циклы L_1 и L_2 показаны кругами. Траектории T_1 и T_2 (см. текст) изображены жирными линиями

одномерное (в сечении Пуанкаре) гиперболическое хаотическое множество Ω_1 . Это множество не является притягивающим, и, следовательно, аттракторами системы остаются фокусы P_1 и P_2 , к которым стремятся сепаратрисы точки O . Вторая локальная бифуркация происходит при $r \approx 24.06$. Сепаратрисы седловой точки O больше не замыкаются на P_1 и P_2 , а стремятся к неустойчивым многообразиям седловых циклов L_1 и L_2 . Это приводит к тому, что для $r > 24.06$ на месте неустойчивого множества Ω_1 возникает устойчивое двумерное (в сечении Пуанкаре) хаотическое множество Ω_2 — аттрактор Лоренца. В хаотическом аттракторе Лоренца всюду плотны грубые седловые циклы, устойчивые многообразия которых трансверсальны к аттрактору. Множество Ω_2 помимо седловых циклов содержит сепаратрисы и седловую точку O . Последний факт определяется наличием двух (вследствие симметрии системы Лоренца) траекторий, T_1 и T_2 (рис. 2), которые идут из хаотического аттрактора, ложатся на устойчивое многообразие W^s седловой точки в некоторой точке A , далее стремятся к точке O и, следовательно, к сепаратрисам Γ_1 и Γ_2 . Наличие в хаотическом аттракторе седловой точки определяет, в частности, негиперболичность аттрактора Лоренца и приставку «квази» в определении хаотического аттрактора как квазигиперболического [9]. Положения равновесия P_1 и P_2 остаются устойчивыми.

Таким образом, в области значений $r \in [24.06; 24.74]$ в фазовом пространстве системы

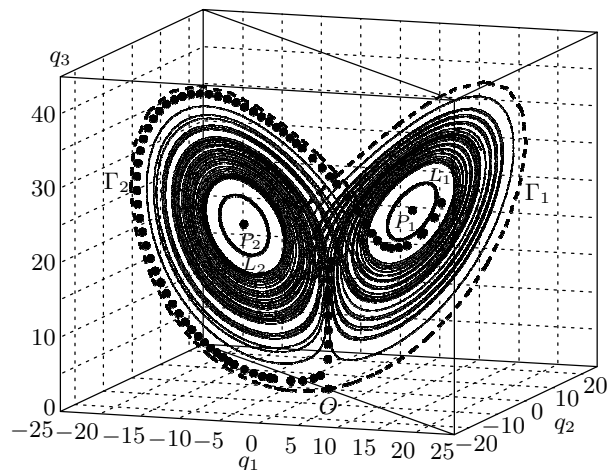


Рис. 3. Структура фазового пространства системы Лоренца. Траектория хаотического аттрактора показана тонкой сплошной линией, сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 — штриховой линией, начальный участок одной из траекторий выхода — жирными точками

Лоренца сосуществуют два устойчивых положения равновесия и хаотический аттрактор. Зафиксируем параметр $r = 24.08$ в этой области и рассмотрим индуцированный шумом выход из хаотического аттрактора в бассейн притяжения состояний равновесия. Другими словами, мы рассматриваем индуцированные шумом большие отклонения от хаотического аттрактора.

Сначала исследуем структуру фазового пространства системы (1) для режима сосуществования устойчивых положений равновесия P_1 и P_2 и хаотического аттрактора при следующих значениях параметров: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 24.08$ (рис. 3). Положения равновесия P_1 и P_2 имеют три отрицательных собственных значения $(-13.627, -0.020 + i9.504, -0.020 - i9.504)$, из которых два последних являются комплексно-сопряженными. Это означает, что два собственных направления точек P_1 и P_2 формируют двумерную поверхность; скорость притяжения на этой поверхности значительно меньше, чем скорость притяжения по первому собственному направлению.

Седловые циклы L_1 и L_2 окружают состояния P_1 и P_2 и находятся на пересечении двумерных неустойчивого и устойчивого многообразий [42]. Неустойчивое многообразие с одной стороны идет к положениям равновесия и там замыкается, а с другой — к хаотическому аттрактору. Устойчивое многообразие формирует трубу в окрестности положений равнове-

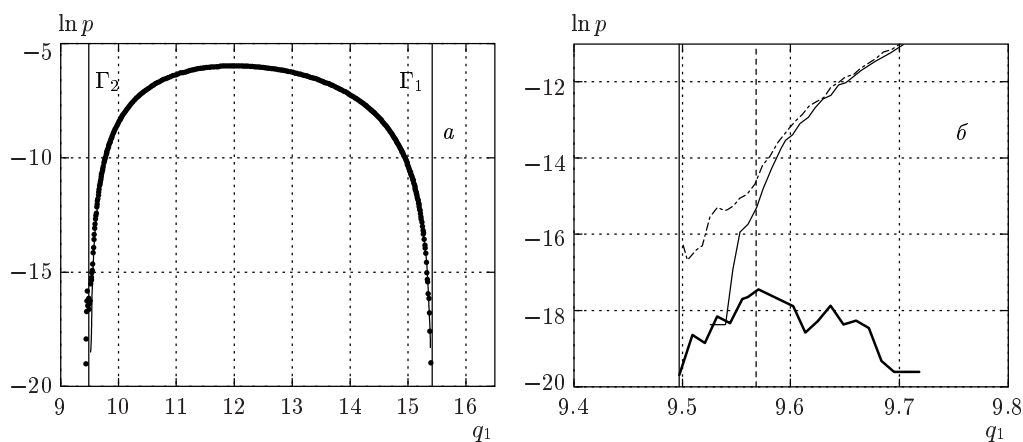


Рис. 4. а) Логарифм вероятностной меры $p(q_1)$ для $q_1 > 0$, вычисленный в отсутствие шума (сплошная кривая) и при наличии шума интенсивности $D = 0.001$ (точки). Логарифм вероятностной меры $p(q_1)$ для $q_1 < 0$ имеет такой же вид, и его можно получить путем замены q_1 на $-q_1$. Сплошными вертикальными линиями отмечены координаты, соответствующие пересечению снизу вверх плоскости $q_3 = r - 1$ с сепаратрисами седловой точки O . б) «Хвост» (увеличенная часть рисунка а) вероятностной меры $p(q_1)$, вычисленный в отсутствие шума (тонкая сплошная кривая) и при наличии шума интенсивности $D = 0.001$ (штрихпунктирная кривая). Сплошной и штриховой вертикальными линиями отмечены координаты, соответствующие пересечению снизу вверх плоскости $q_3 = r - 1$ с сепаратрисой и оптимальной траекторией выхода. Жирной сплошной кривой показано распределение траекторий выхода в сечении Пуанкаре

сия [42]. Седловые циклы имеют следующие мультипликаторы: (1.0000, 1.0280, 0.0001), поэтому траектории медленно уходят от циклов по неустойчивому многообразию и быстро приближаются по устойчивому.

Границы хаотического аттрактора определяются начальными участками сепаратрис, которые близко подходят к седловым циклам L_1 и L_2 (см. рис. 2), и теоретически [9] принадлежат аттрактору. Однако численные исследования показали, что вероятность попадания траектории в окрестность сепаратрис экспоненциально мала по сравнению с вероятностью ее нахождения на других участках хаотического аттрактора. Действительно, эта вероятность определяется вероятностью движения траектории в окрестности траекторий T_1 и T_2 (рис. 2). Вычисления показали, что для попадания в окрестность сепаратрисы радиусом $\epsilon = 0.1$ траектория системы должна пройти в очень малой окрестности от T_1 и T_2 : $\epsilon \approx 10^{-7}$, что является маловероятным.

Для сечения Пуанкаре $q_3 = r - 1$ была вычислена вероятностная мера хаотического аттрактора на основе расчета времени пребывания траектории в данной окрестности аттрактора. Известно [8], что вид аттрактора Лоренца в сечении близок к одномерной кривой на плоскости $q_1 - q_2$; это позволяет перейти от двухпараметрической вероятностной ме-

ры к однопараметрической [43] и рассмотреть вероятностную меру $p(q_1)$ для одной координаты. Вероятностная мера $p(q_1)$ в сечении Пуанкаре $q_3 = r - 1$ (учитывались траектории, пересекающие плоскость $q_3 = r - 1$ снизу вверх) имеет вид, представленный на рис. 4а. Видно, что вероятность попадания траектории хаотического аттрактора в окрестность сепаратрис Γ_1 и Γ_2 экспоненциально мала и типичная траектория, вероятность наблюдения которой намного больше нуля, крайне редко посещает окрестность неустойчивых многообразий седловой точки O . Вероятностная мера незначительно меняется при наличии шума, что ранее теоретически показано в работах [10, 11]. Однако при наличии шума вероятность попадания траектории в окрестность сепаратрисы увеличивается (рис. 4б). Таким образом, вероятностная мера хаотического аттрактора имеет довольно гладкую структуру без сингулярностей, вероятностная мера $p(q_1)$ неравномерно распределена по аттрактору, имеются области с экспоненциально малой вероятностью попадания в них траекторий, а наличие шума качественно не меняет структуру распределения и повышает вероятность нахождения траектории в окрестности сепаратрис.

Анализ бассейнов притяжения неподвижных точек P_1 и P_2 в трехмерном пространстве показал, что в интервале $0 < q_3 < 5$ сепаратрисы практически ле-

жат на границах бассейнов притяжения. Кроме того, сепаратрисы близко подходят к границе бассейнов точек P_1 и P_2 в окрестности седловых циклов L_1 и L_2 . Таким образом, в большой области фазового пространства сепаратрисы, а следовательно, и хаотический аттрактор подходят близко к границе бассейнов притяжения неподвижных точек. Поэтому можно предположить, что выход из хаотического аттрактора может наблюдаться в любом месте, где сепаратрисы близко подходят к границе.

Таким образом, мы видим, что в присутствии шума в системе Лоренца возникает конечная вероятность индуцированного шумом выхода за границу области притяжения квазигиперболического аттрактора. Прежде чем перейти к обсуждению механизма флуктуационных переходов и возможности аналитических оценок вероятности выхода в системе Лоренца, мы кратко опишем экспериментальные методы исследования флуктуационной динамики в неравновесных системах.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЫСТОРИИ ФЛУКТУАЦИЙ И ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

Вероятностные характеристики системы Лоренца в присутствии белого гауссовского шума определяются решением уравнения Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q_i} K_i(\mathbf{q}) \rho + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} (Q_{ij} \rho), \quad Q_{ij} = \delta_{iz} \delta_{jz}, \quad (4)$$

которое записано для соответствующих уравнений Ланжевена (2); здесь $\rho = \rho(\mathbf{q}, t)$ — плотность вероятности того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии \mathbf{q} . В принципе, решение уравнения Фоккера–Планка дает наиболее полную информацию о динамике функции распределения системы (2). Однако для систем, находящихся вдали от теплового равновесия, для которых не выполняется условие детального баланса (в частности, для исследуемой нами системы Лоренца невыполнение условия детального баланса [11] вызвано непотенциальностью векторного поля системы (2)), не существует общих методов построения решения (4). Поэтому для описания флуктуационной динамики таких систем используются различные приближенные подходы. Так, весьма полезными оказываются представления об оптимальных траекториях и понятие распределения предьстории флуктуаций. По

определению [37], распределение предьстории флуктуаций $p_h(\mathbf{q}_f, t_f; \mathbf{q}, t; \mathbf{q}_i, t_i)$ задает вероятность того, что система находится в точке \mathbf{q} в момент времени t при условии, что в начальный момент времени t_i система находилась в точке \mathbf{q}_i , а в конечный момент времени t_f , ее положение характеризуется точкой \mathbf{q}_f ($t_i < t < t_f$). Таким образом, p_h определяет динамику функции распределения во время перехода системы из состояния (\mathbf{q}_i, t_i) в состояние (\mathbf{q}_f, t_f) , нормированную на вероятность перехода между этими состояниями. Отметим отличие этой величины от обычной условной вероятности, связанное с тем, что при определении p_h фиксируются как начальное, так и конечное состояния системы (см. подробно в [37, 44]). Заметим также, что определение величины p_h не накладывает никаких ограничений ни на значения моментов времени t_f и t_i , ни на величину интенсивности шума D .

В работе [37] было показано, что прямое экспериментальное измерение p_h позволяет выявить важную информацию о флуктуационной динамике системы. Особое значение подобные измерения приобретают при исследовании индуцированных шумом переходов в неравновесных системах в пределе малой интенсивности шума. Оказывается, что при $D \rightarrow 0$ распределение предьстории p_h имеет резкий максимум вдоль некоторых детерминированных траекторий в конфигурационном пространстве системы. Определенные таким образом траектории называются оптимальными траекториями. Как правило, существует единственная оптимальная траектория, связывающая заданные начальное и конечное состояния системы.

Для нахождения оптимальных траекторий необходимо обратиться к асимптотическому анализу решения уравнения Фоккера–Планка при $D \rightarrow 0$ (см., например, [21–41, 43–59]). В этом приближении D является малым параметром уравнения, и по аналогии с ВКБ-приближением стационарная (при $t \rightarrow \infty$) плотность вероятности $\rho(\mathbf{q})$ может быть записана в форме (см., например, [35])

$$\rho(\mathbf{q}) \approx C(\mathbf{q}) \exp\left(\frac{-S[\mathbf{q}]}{D}\right) \quad \text{при } D \rightarrow 0. \quad (5)$$

Величина $S[\mathbf{q}]$ представляет собой «энергию активации» флуктуаций в окрестности точки \mathbf{q} [11, 47], а $C(\mathbf{q})$ — предэкспоненциальный множитель. Подставляя (5) в (4) и собирая члены, пропорциональные D^{-1} , получаем [35] для $S[\mathbf{q}]$ уравнение Гамиль-

тона–Якоби вида (см. также [11, 29, 33, 45, 46])

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) &= 0, \quad H = \frac{1}{2}\mathbf{p}\mathbf{Q}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{K}(\mathbf{q}), \\ \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{S} = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь H — гамильтониан Вентцеля–Фрейдлина [35], а $S[\mathbf{q}]$ можно интерпретировать как классическое действие системы (6), определяющее энергию, затрачиваемую на перевод системы из состояния \mathbf{q}_i в состояние \mathbf{q}_f . В общем случае $S[\mathbf{q}]$ является многозначной функцией \mathbf{q}_i . Однако физический смысл имеет (т. е. является физически наблюдаемой величиной) минимальная «энергия активации» $\min S[\mathbf{q}]$. Ей соответствуют рассчитанные из (6) оптимальная сила $\mathbf{p}_{opt}(t)$ и оптимальная траектория $\mathbf{q}_{opt}(t)$ движения системы из \mathbf{q}_i в \mathbf{q}_f . Если начальный момент времени соответствует $-\infty$, то $\min S[\mathbf{q}]$ определяет квазипотенциал неравновесной системы (2) [11, 43, 47]:

$$\rho(\mathbf{q}) \approx C(\mathbf{q}) \exp\left(\frac{-S[\mathbf{q}_{opt}]}{D}\right) \quad \text{при } D \rightarrow 0. \quad (7)$$

Таким образом, в пределе малой интенсивности шума мы приходим к описанию стохастической динамики системы в терминах движения вдоль оптимальных (с точки зрения энергетических затрат) траекторий $\mathbf{q}_{opt}(t_i, \mathbf{q}_i; t_f, \mathbf{q}_f)$; здесь \mathbf{q}_i — начальное состояние системы, \mathbf{q}_f — заданная точка в пространстве состояний системы, удаленная от аттрактора на расстояния, существенно большие по сравнению с \sqrt{D} .

Полезно заметить, что гамильтониан в (6) аналогичен гамильтониану Понтрягина, соответствующему задаче о переключении системы (2) из состояния \mathbf{q}_i в состояние \mathbf{q}_f и минимизирующему энергию аддитивной контрольной функции [20] в отсутствие ограничений на вид функции и на время переключения.

Если начальное состояние \mathbf{q}_i выбрать на аттракторе, а конечное \mathbf{q}_f — на границе притяжения аттрактора, то экстремальные траектории, определяемые гамильтонианом (6), соответствуют путям выхода из аттрактора, а вектор \mathbf{p} , стремящийся к нулю в моменты времени $t_i \rightarrow -\infty$ и $t_f \rightarrow \infty$, определяет флуктуационную силу, переводящую систему из одного состояния в другое по данному пути выхода [40, 48].

Данный формализм соответствует следующей физической картине индуцированного шумом выхода из бассейна притяжения аттрактора: система проводит основную часть времени, флуктуируя

в окрестности аттрактора, и совершает очень редкие флуктуации, пересекая границу притяжения аттрактора. Когда такие редкие флуктуации происходят, система движется по почти детерминированным (оптимальным) траекториям. Траектория выхода из области притяжения, как правило, является единственной (или их несколько вследствие симметрии системы) [30, 49–51]. Для регулярных аттракторов типа фиксированной точки и предельного цикла подобная физическая картина индуцированного шумом выхода была подтверждена численно [14, 15, 39, 46].

Отметим, что в равновесных системах оптимальные траектории симметричны во времени релаксационным траекториям системы [36], и, следовательно, могут быть найдены, по крайней мере в принципе, как обращенные во времени релаксационные траектории детерминированной системы. В неравновесных системах подобная симметрия отсутствует, поэтому исследование предыстории флуктуаций имеет принципиальное значение для понимания механизма флуктуационного выхода из аттрактора.

Для исследования динамики больших отклонений от аттрактора и определения оптимальных путей выхода можно использовать предложенный Дыкманом [37] экспериментальный метод, в котором собирается информация обо всех траекториях, приходящих в близкую окрестность выбранного состояния \mathbf{q}_f , расположенного вне пределов аттрактора. В этом экспериментальном методе непрерывно отслеживается поведение динамических переменных $\mathbf{q}(t)$ и случайной силы $\mathbf{f}(t)$ до момента перехода системы из аттрактора в окрестность состояния \mathbf{q}_f . Траектории выхода $\mathbf{q}^{esc}(t)$ необходимой длительности и шумовые реализации $\mathbf{f}^{esc}(t)$ той же длительности сохраняются, после чего система принудительно возвращается в бассейн притяжения аттрактора, причем начальные условия в бассейне выбираются случайным образом. Так набирается ансамбль траекторий и затем по промежутку времени, на котором происходит наблюдение за системой, строится распределение вероятности предыстории флуктуаций, $p_h(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_f, t_f)$, которое содержит всю информацию о временной эволюции системы непосредственно перед тем как траектория попадает в \mathbf{q}_f . На основе вида распределения p_h диагностируется наличие оптимального пути выхода из аттрактора: если оптимальная траектория выхода существует, то p_h в данный момент времени будет иметь острый максимум в точке $\mathbf{q}_{opt}(t; t_f, \mathbf{q}_f)$. Таким образом, при экспериментальном исследовании распределения p_h имеется возможность нахождения области в фазовом

пространстве системы, внутри которой оптимальный путь четко виден, т.е. области с четко выраженным узким (порядка \sqrt{D} [37, 52]) максимумом распределения. В этом случае оптимальную флуктуационную силу, которая выбрасывает траекторию системы за пределы аттрактора по оптимальному пути, можно оценить путем простого усреднения шумовых реализаций $f^{esc}(t)$ по ансамблю. Отметим, что исследование предыстории флуктуаций позволяет также проверить концепцию оптимальных флуктуаций и определить области параметров системы, для которых существуют оптимальные пути. Данный экспериментальный подход использовался нами для исследования выхода из квазигиперболического аттрактора Лоренца.

Исследование индуцированных шумом больших отклонений позволяет судить об устойчивости системы по отношению к шумовому воздействию, а также разрабатывать пути управления динамикой системы как в отсутствие шума, так и при его наличии [20, 48, 55]. Так, например, в работах [20, 55] показано, что на основе определения оптимальных путей выхода и оптимальной флуктуационной силы можно решить задачу детерминированного оптимального (с энергетической точки зрения) управления переходом системы из хаотического состояния в регулярное. Кроме того, в этих работах продемонстрировано, что экспериментальное определение оптимальных траекторий, базирующееся на теории больших флуктуаций, является на сегодняшний день единственным подходом для решения детерминированной задачи об оптимальном управлении переходами между аттракторами в хаотической системе. Перечисленные выше факторы определяют важность исследования больших флуктуаций с точки зрения практических приложений.

Представленный выше гамильтонов формализм определяет возможность теоретического описания флуктуационных переходов в неравновесных системах. Однако непосредственное применение данного подхода к хаотическим системам сопряжено с рядом трудностей принципиального характера. Эти трудности связаны прежде всего с исследованиями единственности решения, с неопределенностью граничного условия \mathbf{q}_i на хаотическом аттракторе и с определением вероятностной меры на самом аттракторе. В общем случае, когда хаотический аттрактор имеет фрактальные границы областей притяжения, возникает проблема определения второго граничного условия \mathbf{q}_f .

На сегодняшний день теоретическая процедура нахождения вероятности флуктуационного выхода

за границы притяжения хаотического аттрактора не разработана. Однако ранние работы (см., например, [14, 45, 53, 54]) показывают возможность обобщения гамильтонова формализма на хаотические системы. При этом исследование проблем единственности решения и граничных условий становится весьма актуальным. Одним из возможных подходов к их решению является описанный выше экспериментальный метод, который позволяет найти приближенное решение задачи о флуктуационных переключениях в системах с хаотическими аттракторами путем статистического анализа результатов прямого наблюдения за динамикой переходов. Эффективность статистического анализа экспериментально измеренных предысторий флуктуаций была продемонстрирована в работах [1, 20] при рассмотрении задачи выхода из хаотического аттрактора через нефрактальную границу в периодически возбуждаемом нелинейном осцилляторе. Ниже мы приводим результаты исследования флуктуационных переходов в системе Лоренца.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДЫСТОРИИ ФЛУКТУАЦИЙ

Рассмотрим флуктуационный выход из хаотического аттрактора системы (1) на основе экспериментального подхода, описанного выше. Прежде чем анализировать результаты исследований, отметим два принципиальных момента.

Первый момент. Описанный выше метод позволяет определить траекторию, соответствующую «глобальному» минимуму энергии выхода, если время установления равновесного распределения на аттракторе, t_{rel} , значительно меньше времени флуктуационного выхода системы за границы притяжения данного аттрактора t_{esc} : $t_{rel} \ll t_{esc}$. Время флуктуационного выхода растет экспоненциально с уменьшением интенсивности шума D согласно соотношению $t_{esc} \propto \exp(S/D)$, где S — «энергия» выхода. Поскольку на практике величина D всегда конечна (что связано с конечностью времен наблюдения), выполнение условия $t_{rel} \ll t_{esc}$ связано прежде всего с величиной t_{rel} , т.е. со свойствами равновесного распределения на аттракторе.

В работах [1, 20, 55] показано, что для хаотического аттрактора в периодически возбуждаемом нелинейном осцилляторе можно подобрать величину интенсивности шума так, чтобы выполнялось условие $t_{rel} \ll t_{esc}$; при этом найденная оптималь-

ная траектория не будет зависеть от начальных условий на аттракторе и от интенсивности шума.

Для системы Лоренца ситуация иная. Как отмечалось выше, вероятность пребывания системы в окрестности многообразий седловой точки O экспоненциально мала. Можно сказать, что функция равновесного распределения на аттракторе имеет «хвосты», подобные хвостам гауссовского распределения, и попадание траектории в эти хвосты является редким событием. Более того, наши рассуждения о том, что траектория обязана при $t \rightarrow \infty$ пройти сколь угодно близко к многообразиям седловой точки, базируются на результатах теоретического анализа системы Лоренца, а численные исследования показывают, что для достаточно больших, но конечных времен численного счета (порядка двух недель) данная вероятность равна нулю. Это означает, что время установления равновесного распределения на квазигиперболическом хаотическом аттракторе намного превышает реально возможные времена наблюдения. Следовательно, для системы Лоренца приходится исследовать динамику флуктуационного выхода на конечном временном интервале. При этом вопрос о зависимости найденного решения от начальных условий на аттракторе и от интенсивности шума для аттрактора Лоренца, остается открытым (ср. с исследованиями неравновесных траекторий в работах [56, 57]). Однако найденный в эксперименте сценарий выхода (см. ниже) позволяет утверждать, что уменьшение интенсивности шума не может привести к качественным изменениям траектории выхода.

Второй момент. Первоначально в [37] распределение предыстории вероятности было введено для исследования движений траекторий вдали от аттрактора. Результаты, представленные в разд. 2, показывают, что границы аттрактора Лоренца (сепаратрисы Γ_1 и Γ_2) очень близко подходят к границам бассейна притяжения, аттрактор имеет крайне неравномерное распределение и в отсутствие шума движение по некоторым частям аттрактора не наблюдается. Поэтому мы расширяем подход, основанный на экспериментальном исследовании предыстории флуктуаций [37], с целью изучения флуктуационных отклонений в пределах аттрактора Лоренца.

Исследования флуктуационного выхода осуществлялись на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений системы (1) методом Хейна (эквивалентного методу Рунге–Кутты второго порядка) [60], а также с использованием высокоскоростного генератора псевдослучайных последовательностей [61]. Интенсивность шума $D = 0.01$.

Для определенности рассмотрим переход из хаотического аттрактора в состояние P_1 (см. рис. 3). Вследствие симметрии системы переход в состояние P_2 будет иметь тот же механизм, а количественные характеристики перехода могут быть получены путем замены переменных (q_1, q_2, q_3) на $(-q_1, -q_2, q_3)$. Согласно описанному выше экспериментальному подходу, был набран ансамбль траекторий выхода $\{(q_1(t), q_2(t), q_3(t))_i\}$, $i = 1, N$, и соответствующий им ансамбль шумовых реализаций $\{(\xi(t))_i\}$, $i = 1, N$; здесь i — номер реализации, N — число реализаций (в наших исследованиях $N \approx 1000$).

На рис. 5а показано несколько траекторий выхода, полученных в результате численного моделирования. Видно, что траектории подходят двумя узкими пучками к окрестности седловой точки O из окрестностей точек S , затем несколько расходятся и, двигаясь вдоль сепаратрисы Γ_2 , попадают в окрестность седлового цикла L_1 (см. также рис. 3). Наличие двух пучков траекторий, ведущих от точек S к точке A , объясняется симметрией системы Лоренца, что позволяет говорить о единственном пути, вдоль которого траектории движутся в окрестность точки A . Отметим, что в окрестность точки S траектории стремятся также узкими пучками, что указывает на предсказуемость поведения траекторий системы Лоренца на больших временных интервалах.

Следующим шагом должна быть статистическая обработка ансамбля реализаций: построение распределения предыстории вероятности $p_h(q_1, q_2, q_3, t)$ и усредненной по ансамблю флуктуационной силы, которая является оценкой импульса $p_3(t)$ и, соответственно, оценкой действия $S[\mathbf{q}]$ системы (6) [20]. Для этого необходимо совместить ансамбли реализаций по некоторой характерной точке. Строго говоря, такой характерной точкой должна быть точка вблизи границ бассейнов притяжения аттракторов. Однако медленная диффузия системы вблизи границы аттрактора приводит к тому, что происходит усреднение по начальным условиям (ср. [58, 59]), флуктуационные траектории пересекают границу бассейна в достаточно широкой области и фиксация одной точки в окрестности бассейна невозможна. В работах [1, 20] вместо характерной точки выбирался характерный участок траектории выхода. Исходя из картины выхода, показанной на рис. 5а, в качестве характерного можно выбрать участок в окрестности точки A , где пучок траекторий имеет малую ширину. Построенные для такого характерного участка статистические характеристики показаны на рис. 6а и рис. 7а, в. Распределение предыстории вероятно-

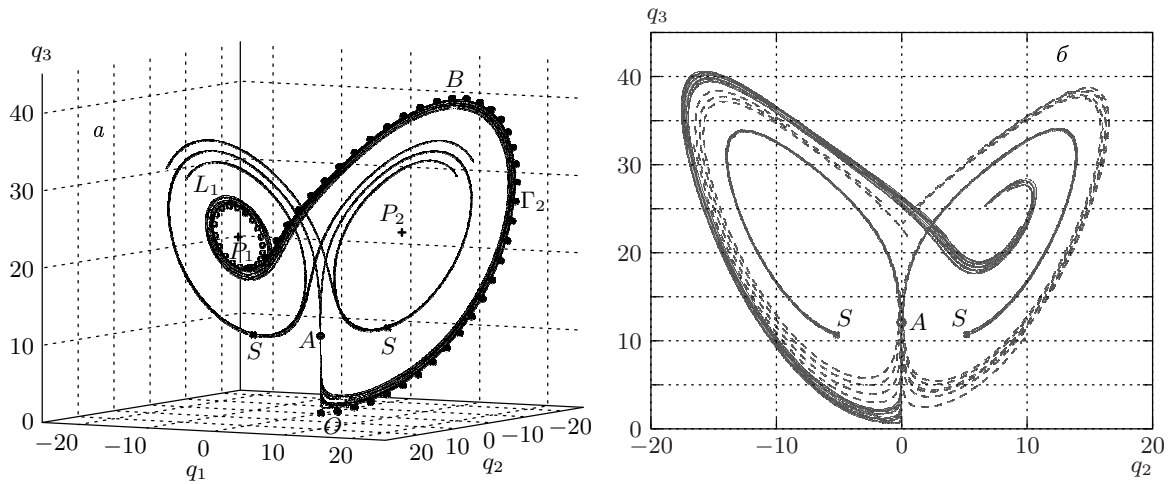


Рис. 5. *а)* Десять траекторий выхода из хаотического аттрактора в состояние P_1 , полученных при численном моделировании системы (1). Жирными точками показана сепаратриса Γ_2 ; седловой цикл L_1 показан кружками. *б)* Десять траекторий выхода из хаотического аттрактора (сплошные линии) и десять детерминированных траекторий (штриховые линии), начальные условия для которых совпадают с координатами траекторий выхода в окрестности точек S

сти имеет ярко выраженный единственный максимум во временном интервале $50 < t/h < 250$ (область между штрихами на рис. 6*а*). В этом интервале флуктуационная сила p_3 равна нулю (рис. 7*а*), а дисперсия распределения D_p уменьшается, достигая минимального значения (рис. 7*б*). Затем максимум распределения расплывается, флуктуационная сила становится отличной от нуля, а дисперсия резко увеличивается. Видно (рис. 6*а*), что после прохождения точки A траектории выхода начинают расходиться, а ярко выраженный максимум распределения $p_h(q_3, t)$ отсутствует. Все траектории после точки A попадают в окрестность седлового цикла L_1 , но время движения системы по разным траекториям на этом участке различно. Такое поведение траекторий выхода определяется устойчивым многообразием седловой точки O : время движения к точке O по самому устойчивому многообразию стремится к бесконечности, и если траектория идет рядом с многообразием, то время движения вдоль него конечно и тем меньше, чем дальше точка от многообразия. Вследствие этого в окрестности седловой точки O траектории очень чувствительны к флуктуациям, траектории выхода проходят участок от точки A до цикла L_1 за различные промежутки времени и поэтому наблюдается расплывание максимума распределения предистории флуктуаций. Это означает, что выбор окрестности точки A в качестве характерного участка позволяет проанализировать поведение траекторий выхода только до точки A . Для

дальнейшего анализа необходимо выбрать еще один характерный участок, расположенный после седловой точки O , например, окрестность точки B (см. рис. 5*а*). На этом участке координата q_3 достигает своего максимального значения, что легко диагностируется по временному ряду системы, поэтому для построения распределения $p_h(q_1, q_2, q_3, t)$ достаточно просто совместить траектории выхода. Статистические характеристики, соответствующие точке B , показаны на рис. 6*б* и рис. 7*б*, *г*. Видно, что для точки B ситуация противоположна: ярко выраженный максимум распределения $p_h(q_3, t)$ наблюдается в области $t/h > 230$ (область от пунктира вправо на рис. 6*б*), где флуктуационная сила p_3 отлична от нуля (рис. 7*б*), а дисперсия распределения D_p достигает минимального значения (рис. 7*г*). Следовательно, имеется единственная оптимальная траектория выхода, вдоль которой система движется от точки O в окрестность седлового цикла L_1 .

Анализ предистории вероятности и флуктуационной силы, показанных на рис. 6 и 7, позволяет предположить следующий сценарий выхода из квазигиперболического аттрактора. Траекторию выхода можно разбить на три участка (рис. 8). Участок 1 соответствует движению по аттрактору, для чего не требуется наличия шума. Траектория выхода начинается на некоторой характерной точке хаотического аттрактора (точка S на рис. 5*а*). Эта точка принадлежит типичной траектории аттрактора. Вероятность нахождения траектории системы в ма-

Рис. 6. Проекция распределений предыстории вероятностей выхода на координатную ось q_3 , полученные для характерной точки A (*a*) и точки B (*b*). Оси абсцисс нормированы на величину шага интегрирования $h = 2\pi/200$. Нулевые моменты времени для распределений *a* и *b* являются различными

лой окрестности точки S в отсутствие шума намного больше нуля. После точки S траектория выхода попадает в окрестность устойчивого многообразия (точка A на рис. 5*a*) седловой точки O , где дисперсия распределения предыстории минимальна (рис. 7*в*). В этот момент времени флуктуационная сила близка к нулю (рис. 7*а*). Движение на участке от точки S до точки A является полностью детерминированным, а шум качественно не меняет поведения траектории [10, 11]. Действительно, если в момент прохождения траекториями точки S убрать шумовой источник, то траектории детерминированным образом попадут в окрестность точки A , причем ширина пучка останется узкой (см. рис. 5*б*). Однако после прохождения точки A траектории в отсутствие шума находятся на значительном удалении

от седловой точки O и сепаратрис Γ_1 и Γ_2 .

Далее под действием флуктуационной силы траектория выхода приближается к седловой точке O вдоль устойчивого многообразия точки O , затем удаляется от нее вдоль сепаратрисы Γ_2 и попадает в окрестность седлового цикла L_1 . Движение траектории из окрестности устойчивого многообразия седловой точки O до седлового цикла L_1 соответствует участку 2 (рис. 8, см. также рис. 1). На этой части пути флуктуационная сила повторяет траекторию координаты q_3 системы и можно сказать, что сила и траектория системы сфазированы. Траектории выхода на втором участке формируют широкий пучок (рис. 5*a* и 6*a*) вокруг некоторого наиболее вероятного пути выхода. Данный факт связан со следующим. Траектории подходят к точке A узким пучком,

Рис. 7. Усредненные флуктуационные силы $p_3(t; A)$ (а) и $p_3(t; B)$ (б) — жирной линией показаны флуктуационные силы, пропущенные через низкочастотный фильтр с нуль-фазовой характеристикой, а также дисперсии распределений $p_h(q_1, t)$ (сплошная линия) и $p_h(q_3, t)$ (штриховая линия), полученные для характерных точек А (а) и В (б). Отметим, что дисперсия распределения $p_h(q_2, t)$ ведет себя подобно дисперсии распределения $p_h(q_1, t)$ и поэтому на рисунке не показана. Оси абсцисс на всех рисунках нормированы на величину шага интегрирования $h = 2\pi/200$. Нулевые моменты времени рис. 7а, в, 7б и 7г являются различными

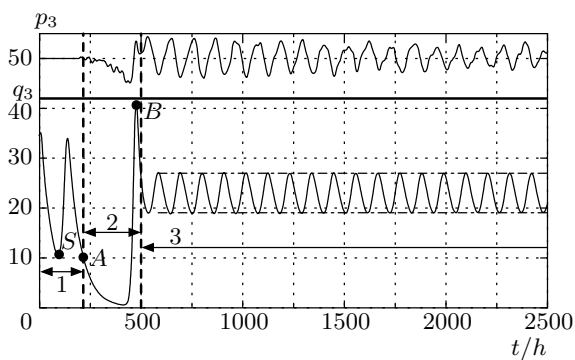


Рис. 8. Типичная траектория выхода, полученная при численном моделировании системы (1). Горизонтальными штрихпунктирными линиями показаны границы цикла L_1 . Ось абсцисс нормирована на величину $h = 2\pi/200$. Вверху рисунка приведена усредненная флуктуационная сила

однако пучок имеет конечную толщину. В окрестности многообразий точки O , как уже отмечалось выше, имеется чувствительность к малейшим отклонениям и в отсутствие определенной флуктуационной силы траектории расходятся широким веером (см. рис. 5б). Под действием флуктуаций ширина пучка значительно уменьшается, но она остается намного шире, чем размер пучка в окрестности точки A . Таким образом, флуктуационная сила начинает действовать после прохождения траекториями точки A (участка 1).

На участке 3 траектория выхода движется по неустойчивому многообразию седлового цикла L_1 и пересекает цикл L_1 . Траектория выхода и флуктуационная сила находятся в противофазе, а сама сила имеет ярко выраженный колебательный характер, причем ее период близок к периоду колебаний системы (рис. 7г). Видно также, что флуктуационная

сила долго не обращается в нуль. Колебательный характер и большую длительность флуктуационной силы можно объяснить следующим образом. В отсутствие флуктуаций траектории системы очень медленно уходят от седлового цикла по неустойчивому многообразию, поскольку соответствующий мультипликатор ненамного больше единицы. В этом случае флуктуационная сила может совершать слабые толчки в течение длительного интервала времени по направлению к седловому циклу против направления движения траектории по неустойчивому многообразию. После того как траектория пересекает цикл, она так же медленно релаксирует к положению равновесия P_1 .

Большая продолжительность участка 3 траектории выхода позволяет сделать вывод об отсутствии жесткой взаимосвязи между этим участком и предыдущими двумя. Поэтому процесс выхода можно разбить на два независимых этапа: выброс траектории в окрестность седлового цикла L_1 и его пересечение.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, траектория выхода является единственной и лежит на многообразиях системы (1), принадлежащих хаотическому аттрактору Лоренца. Роль флуктуаций заключается, во-первых, в доставке траектории системы в редко посещаемую область аттрактора, во-вторых, в индуцировании пересечения седлового цикла — траектория выхода лежит на неустойчивом многообразии седлового цикла. Полученные результаты показывают, что наиболее вероятную траекторию выхода можно разбить на три участка (рис. 8). Движение на первом участке является полностью детерминированным, а путь траектории на втором и третьем участках определяется отличной от нуля флуктуационной силой. Поэтому вероятность выхода из хаотического аттрактора может быть найдена как произведение вероятностей последовательных переходов, ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 , где ρ_1 — вероятность попадания хаотической траектории в окрестность точки S в отсутствие шума, ρ_2 — вероятность выброса траектории из окрестности точки A в окрестность седлового цикла L_1 , ρ_3 — вероятность пересечения седлового цикла L_1 .

Вероятности ρ_1 и ρ_2 можно оценить теоретически на основе построения вероятностной меры квазигиперболического аттрактора по методике работы [11], но с учетом конечной величины шумовой интенсивности. Отметим, что только те траектории имеют конечную вероятность выхода за пределы аттракто-

ра Лоренца, которые попадают в некоторую малую окрестность цикла L_1 . Поэтому оценка вероятности ρ_2 связана с решением задачи о попадании траектории в заданную область при движении вдоль потока векторного поля за конечный интервал времени. Вероятность ρ_1 с высокой степенью точности может быть оценена на основе вероятностной меры аттрактора в отсутствие шума, поскольку шум на первом участке индуцирует лишь диффузионное движение вокруг детерминированной траектории (см. рис. 5а).

Вероятность ρ_3 определяется динамикой флуктуаций на двумерном неустойчивом многообразии седлового цикла L_1 . Оценка ρ_3 связана с решением задачи, подобной задаче о флуктуационном пересечении неустойчивого цикла в область притяжения неподвижной точки в генераторе Ван-дер-Поля с жестким возбуждением. Движение траектории в окрестности седлового цикла (см. рис. 8) напоминает колебания осциллятора с медленно меняющейся амплитудой. В отсутствие флуктуаций амплитуда колебаний нарастает, и роль флуктуаций состоит в том, чтобы преодолеть медленный рост амплитуды и пересечь седловый цикл.

Как видно, оценка каждой из вероятностей (ρ_1 , ρ_2 , ρ_3) является серьезной отдельной задачей, требующей дополнительного теоретического и экспериментального изучения.

Различна роль шума на каждом из участков выхода. Как уже упоминалось выше, в отсутствие флуктуаций вероятность попадания траектории в малую окрестность сепаратрис, и, следовательно, седлового цикла мала, но отлична от нуля, т. е. теоретически первый и второй участки могут наблюдаться и в системе без шума: это движение системы по траекториям T_1 и T_2 (см. рис. 2). При наличии шума движение должно происходить в некоторой трубе, образованной вокруг этих траекторий. Как показывают исследования, на первом участке (рис. 8) траектории выхода действительно идут в малой окрестности траекторий T_1 и T_2 . На втором участке — после точки A (см. рис. 2 и рис. 5) наблюдается следующее: поскольку шумовые траектории выхода отличны от T_1 и T_2 , траектории выхода стремятся уйти от них, однако под действием некоторой флуктуационной силы остаются в окрестности устойчивого многообразия W^s и сепаратрисы G_2 . Другими словами, флуктуации удерживают траектории в окрестности многообразий седловой точки O . На третьем участке именно под действием флуктуаций совершается выход за границу притяжения хаотического аттрактора.

Как было отмечено, экспериментальный подход,

основанный на исследовании предыстории флуктуаций, применялся в [1, 20] для изучения проблемы флуктуационного выхода из негиперболического хаотического аттрактора в возбуждаемом периодическим сигналом нелинейном осцилляторе. В этих работах задача была решена в рамках гамильтонова формализма без переформулировки граничных условий, которую мы осуществили для квазигиперболического хаотического аттрактора путем введения конечного времени перехода. В [1, 20] показано, что выход из негиперболического аттрактора осуществляется путем последовательных переходов между седловыми циклами, и для доставки траектории к циклу, с которого начинается выход, не требуется дополнительной силы. Для квазигиперболического аттрактора, рассмотренного в данной статье, ситуация принципиально иная: в процессе выхода не участвуют седловые циклы, встроенные в аттрактор, и требуется дополнительная флуктуационная сила, чтобы выбросить хаотическую траекторию в редко посещаемую область аттрактора. Таким образом, динамика флуктуационного выхода существенно зависит от типа хаотического аттрактора.

Проведенный анализ показал, что поведение траектории выхода из бассейна притяжения квазигиперболического хаотического аттрактора полностью определяется многообразиями седловой точки O в начале координат и неустойчивым многообразием седлового цикла L_1 . Поэтому задача выхода из хаотического аттрактора может быть переформулирована в задачу о движении траектории по одно- и двумерным многообразиям в присутствии флуктуаций. Другими словами, для получения более детальной картины выхода из аттрактора трехмерной системы необходимо рассмотреть аналогичную задачу в системах меньшей размерности.

В разд. 3 отмечено, что исследования больших отклонений от хаотического аттрактора важны с практической точки зрения и связаны с вопросом об устойчивости аттрактора в присутствии флуктуаций, а также с решением проблемы управления динамикой системы. Полученные результаты с точки зрения приложений к реальным системам, описываемым моделью Лоренца, означают следующие. Во-первых, хаотический режим, которому соответствует квазигиперболический аттрактор, является устойчивым к наличию флуктуаций. Во-вторых, индуцированные шумом отклонения от хаотического режима системы, т. е. большие флуктуации, являются крайне редкими событиями, поскольку они связаны с посещением траекторией экспоненциально маловероятных областей фазового пространства.

В-третьих, управление динамикой системы для перевода ее из хаотического режима реализуется с помощью воздействия определенной формы (см. рис. 8) в тот промежуток времени, когда система находится в малой окрестности состояния равновесия O . Другими словами, для реализации или подавления переходов из хаотического режима в другой режим необходимо следить за поведением системы в малой области значений переменных системы. Последний факт значительно упрощает процедуру управления.

В заключение еще раз отметим, что исследование индуцированного шумом выхода из квазигиперболического аттрактора было проведено в рамках теории больших флуктуаций на основе экспериментального анализа предыстории флуктуаций [37], причем в данной работе мы расширили экспериментальный подход [37] для изучения движения по самому аттрактору.

Авторы выражают благодарность М. И. Дыкману и В. Н. Смелянскому за постоянное внимание и ценное обсуждение наших работ. Работа поддержана фондом INTAS (грант № 01-867) и стала частично возможной благодаря гранту фонда США поддержки гражданских исследований и фундаментальных разработок для стран бывшего Советского Союза (№ REC-006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Г. Лучинский, И. А. Хованов, Письма в ЖЭТФ **69**, 782 (1999).
2. E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).
3. B. Salzman, J. Atmos. Sci. **19**, 329 (1962).
4. H. Naken, Phys. Lett. A **53**, 77 (1975).
5. А. Н. Ораевский, В. Ю. Торонов, КЭ **16**, 2063 (1989).
6. C. O. Weiss, U. Hubner, N. B. Abraham, and D. Tang, Infrared. Phys. Technol. **36**, 489 (1995).
7. В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, В. В. Астахов, в сб. *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы*, под ред. В. С. Анищенко, Изд-во Саратовского ун-та, Саратов (1999), с. 1.
8. C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer, New-York (1982), p. 1.

9. Дж. Марсден, М. Мак-Кракен, *Бифуркация предельного цикла и ее приложения*, Мир, Москва (1980), с. 317.
10. Ю. И. Кифер, УМН **29**, 205 (1974).
11. R. Graham, in *Noise in Nonlinear Dynamical Systems, Vol. 1*, ed. by P. V. E. McClintock and F. Moss, Cambridge University Press, Cambridge (1989), p. 225.
12. С. О. Weiss and W. Klische, Opt. Comm. **51**, 47 (1984); Phys. Rev. Lett. **57**, 2804 (1986).
13. В. С. Анищенко, А. Б. Нейман, ЖТФ **60**, 3 (1990).
14. R. Kautz, Phys. Lett. A **125**, 315 (1987).
15. R. L. Kautz, Rep. Prog. Phys. **59**, 935 (1996).
16. R. D. Astumian and I. Derenyi, Eur. Biophys. J. with Biophys. Lett. **27**, 474 (1998).
17. E. Arimondo, D. Hennequin, and P. Glorieux in *Noise in Nonlinear Dynamical Systems Vol. 3*, ed. by P. V. E. McClintock and F. Moss, Cambridge University Press, Cambridge (1989), p. 119.
18. E. A. Jackson, Chaos **7**, 550 (1997).
19. B. Hubinger, R. Doerner, and W. Martienssen, Phys. Rev. E **50**, 932 (1994).
20. I. A. Khovanov, D. G. Luchinsky, R. Mannella, and P. V. E. McClintock, Phys. Rev. Lett. **85**, 2100 (2000).
21. A. J. Bray and A. J. McKane, Phys. Rev. Lett. **62**, 493 (1989).
22. T. J. Newman, A. J. Bray, and A. J. McKane, J. Stat. Phys. **59**, 357 (1990).
23. M. I. Dykman, Phys. Rev. A **42**, 2020 (1990).
24. M. I. Dykman and K. Linderberg, in *Contemporary Problems in Statistical Physics*, ed. by G. Weiss, SIAM (1994), p. 41.
25. M. I. Dykman and V. N. Smelyanskiy, Superlatt. Microstruct. **23**, 495 (1997).
26. R. S. Maier and D. L. Stein, Phys. Rev. Lett. **71**, 1783 (1993).
27. R. S. Maier and D. L. Stein, Phys. Rev. E **48**, 931 (1993).
28. M. I. Dykman et al., Phys. Rev. E **49**, 1198 (1994).
29. R. S. Maier and D. L. Stein, J. Stat. Phys. **83**, 291 (1996).
30. М. И. Дыкман, М. А. Кривоглаз, ЖЭТФ **50**, 30 (1979).
31. M. I. Dykman, H. Rabitz, V. N. Smelyanskiy, and B. E. Vugmeister, Phys. Rev. Lett. **79**, 1178 (1997).
32. V. N. Smelyanskiy, M. I. Dykman, H. Rabitz, and B. E. Vugmeister, Phys. Rev. Lett. **79**, 3113 (1997).
33. R. S. Maier and D. I. Stein, SIAM J. Appl. Math. **57**, 752 (1997).
34. V. N. Smelyanskiy, M. I. Dykman, and R. S. Maier, Phys. Rev. E **55**, 2369 (1997).
35. А. Д. Венцель, М. И. Фрейдлин. *Флуктуации в динамических системах под действием случайных возмущений*, Наука, Москва (1979), с. 1.
36. L. Onsager and S. Machlup, Phys. Rev. **91**, 1505 (1953).
37. M. I. Dykman et al., Phys. Rev. Lett. **68**, 2718 (1992).
38. M. I. Dykman et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 5229 (1996).
39. D. G. Luchinsky et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 3117 (1997).
40. D. G. Luchinsky, J. Phys. A **30**, L577 (1997).
41. D. G. Luchinsky and P. V. E. McClintock, Nature **389**, 463 (1997).
42. M. E. Johnson, M. S. Jolly, and I. G. Kevrekidis, Numerical Algorithms **14**, 125 (1997).
43. R. Graham and T. Tel, Phys. Rev. Lett. **52**, 9 (1984).
44. L. S. Schulman, Physica A **177**, 373 (1991).
45. R. Graham, A. Hamm, and T. Tel, Phys. Rev. Lett. **66**, 3089 (1991).
46. D. G. Luchinsky, P. V. E. McClintock, and M. I. Dykman, Rep. Prog. Phys. **61**, 889 (1998).
47. H. Haken, Rev. Mod. Phys. **47**, 67 (1975).
48. V. N. Smelyanskiy and M. I. Dykman, Phys. Rev. E **55**, 2516 (1997).
49. А. Д. Венцель, М. И. Фрейдлин, УМН **25**, 1 (1970).
50. D. Ludwig, SIAM Rev. **17**, 605 (1975).
51. V. A. Chinarov, M. I. Dykman, and V. N. Smelyanskiy, Phys. Rev. E **47**, 2448 (1993).
52. J. Hales, A. Zhukov, R. Roy, and M. I. Dykman, Phys. Rev. Lett. **85**, 78 (2000).
53. P. D. Beale, Phys. Rev. A **40**, 3998 (1989).
54. P. Grassberger, J. Phys. A **22**, 3283 (1989).

55. D. G. Luchinsky, I. A. Khovanov, S. Berri, R. Mannella, and P. V. E. McClintock, *Int. J. Bif. and Chaos* (2002) (in press).
56. S. M. Soskin, *J. Stat. Phys.* **97**, 609 (1999).
57. B. E. Vugmeister, J. Botina, and H. Rabitz, *Phys. Rev. E* **55**, 5338 (1997).
58. V. N. Smelyanskiy et al., *J. Chem. Phys.* **110**, 11488 (1999).
59. V. N. Smelyanskiy, M. I. Dykman, and B. Golding, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3193 (1999).
60. R. Mannella, in *Supercomputation in Nonlinear and Disordered Systems*, ed. by L. Vázquez, F. Tirando, and I. Martin, World Scientific, Singapore (1997), p. 100.
61. G. Marsaglia and W.-W. Tsang, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **5**, 349 (1984).