

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАПЛИ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. К. Братухин^a, А. В. Лебедев^{b*}

^a Пермский государственный университет
614000, Пермь, Россия

^b Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук
614013, Пермь, Россия

Поступила в редакцию 16 октября 2001 г.

Аналитически и экспериментально исследованы колебания капли магнитной жидкости, взвешенной в немагнитной вязкой среде. Колебания происходят под действием линейно поляризованного переменного магнитного поля. В приближении слабого поля и ламинарного течения найдена частотная зависимость амплитуды и фазы колебаний. Исследовано влияние вязкости жидкости на собственную частоту колебаний капли. Полученное решение использовано в опытах по определению межфазного поверхностного натяжения.

PACS: 47.32.-y, 47.55.Dz, 75.50.Mm

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время опубликован ряд работ [1–7], в которых исследуется движение и деформация капли магнитной жидкости в разного рода переменных и постоянных полях. Задача о равновесной форме капли в постоянном магнитном поле, методы теоретического описания подробно рассмотрены в [8], там же представлена библиография по этому вопросу. Форма капли определяется балансом магнитных сил и сил поверхностного натяжения. В случае переменного поля кроме поверхностных и магнитных сил в рассмотрение необходимо вводить инертность и вязкость как самой капли, так и окружающей жидкости. При этом на первый взгляд кажется, что задача о колебаниях капли становится прямым аналогом гармонического осциллятора с вязким трением. Именно с таких позиций эта проблема рассматривается в работе [9]. На самом деле такая аналогия не является полной, поскольку уравнения движения вязкой жидкости представляют собой уравнения более высокого порядка. В частности, учет вязкого трения вносит поправки в собственную частоту колебаний, которая уже не совпадает с хорошо известной частотой колебаний Рэлея [10, 11]. Под собственной

частотой колебаний подразумевается частота, при которой колебания капли отстают по фазе на $\pi/2$ от магнитной силы. Для гармонического осциллятора эта частота не зависит от величины трения. Для колеблющейся капли наличие вязкого трения меняет вид течения жидкости и, соответственно, эффективную массу, что и приводит к зависимости собственной частоты колебаний капли от вязкости жидкости.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть капля магнитной жидкости (первая среда) помещена в немагнитную жидкость, заполняющую все пространство (вторая среда). В качестве внешней силы, вызывающей колебания системы, выберем линейно поляризованное переменное магнитное поле: заданное на бесконечности магнитное поле

$$\mathbf{H}_\infty = H_\infty \exp(-i\gamma t) \mathbf{e}_z$$

меняется по величине с частотой γ (мы используем правую декартову (x, y, z) и сферическую (r, θ, φ) системы координат с началом в центре масс капли и полярной осью вдоль \mathbf{H}_∞ , \mathbf{e}_z — орт оси z); на бесконечности жидкость неподвижна; сила тяжести отсутствует; давление постоянно.

*E-mail: lav@icmm.ru

При решении задачи будем считать, что все параметры жидкостей (плотности ρ_i , кинематические и динамические коэффициенты вязкости ν_i и η_i ($i = 1, 2$ соответственно для первой и второй сред), коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела жидкостей σ_0 и магнитная восприимчивость капли χ) постоянны, а сами жидкости неразстворимы одна в другой (взаимно насыщены), несжимаемы и являются непроводящими.

Рассматриваются колебания капли, при которых ее форма слабо отклоняется от сферической:

$$r = R(\theta, t) = a(1 + \varepsilon(\theta, t)), \quad |\varepsilon(\theta, t)| \ll 1$$

(a — радиус невозмущенной капли).

Характерное время релаксации намагниченности τ для магнитных жидкостей имеет порядок 10^{-4} – 10^{-6} с [13] и мало по сравнению с периодом колебаний капли (≥ 0.1 с). Это означает, что намагниченность жидкости с хорошей точностью можно считать равновесной. В этих условиях тепловая энергия, выделяемая при периодическом перемагничивании магнитной жидкости, не вызывает заметного нагрева капли. Действительно, радиальный перепад температуры внутри капли равен

$$\Delta T = \frac{\chi_2 \gamma H_\infty^2 a^2}{12(1 + 4\pi\chi_1/3)^2 \lambda},$$

где λ — теплопроводность жидкости, χ_1 и χ_2 — действительная и мнимая части динамической восприимчивости. Для самой концентрированной жидкости, применявшейся в экспериментах ($a < 0.5$ см, $\chi_1 \approx 0.5$, $\chi_2 \approx 0.002$, $H_\infty \approx 10$ Э, $\gamma \approx 1$ Гц и $\lambda \approx 2 \cdot 10^4$ эрг/см·с·К), перепад температур имеет порядок 10^{-7} К.

Введем безразмерные переменные. Для этого выберем в качестве единиц измерения следующие величины: длины $[L] = a$, скорости $[v] = \nu/a$, давления $[p] = \eta_1 \nu_1/a^2$, времени $[t] = a^2/\nu_1$, напряженности магнитного поля $[H] = \sqrt{\nu_1 \eta_1/a^2}$, индукции магнитного поля $[B] = [H]$ и намагниченности $[M] = [H]$. При этом в задачу войдут следующие безразмерные параметры: плотность $\rho = \rho_2/\rho_1$, кинематический и динамический коэффициенты вязкости капли $\nu = \nu_2/\nu_1$ и $\eta = \eta_2/\eta_1$, соответственно, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = \sigma_0 a/\eta_1 \nu_1$, амплитуда внешнего поля вдали от капли $H_0 = H_\infty/[H]$ и равновесная восприимчивость χ . (Заметим, что $\rho = \eta/\nu$.)

В этих условиях распределение скоростей \mathbf{v}_i , давлений p_i , магнитных полей \mathbf{B}_i и \mathbf{H}_i в обеих средах ($i = 1, 2$) и намагниченности в капле \mathbf{M} определяют-

ся следующей системой уравнений гидродинамики и электродинамики сплошных сред [10, 12]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \Delta \mathbf{v}_1, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} = -\nabla p_2 + \eta \Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{f},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_1 = \operatorname{div} \mathbf{B}_2 = 0, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{H}_2 + \mathbf{M}.$$

Плотность магнитных объемных сил \mathbf{f} в капле с учетом постоянства магнитной проницаемости ($\nabla \mu = 0$) и линейной зависимости восприимчивости χ от плотности вещества может быть преобразована к градиентной форме и включена в давление (в немагнитной жидкости $\mathbf{f} = 0$) [13].

К этим уравнениям необходимо присоединить очевидные условия на бесконечности и в центре капли:

$$r \rightarrow \infty: \quad p_1 \quad \text{и} \quad H_0 \quad \text{постоянны,} \quad \mathbf{v}_1 = 0;$$

$$r = 0: \quad p_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_2 \quad \text{ограничены.}$$

На поверхности капли $r = R(\theta, t) = 1 + \varepsilon(\theta, t)$ должны выполняться требования исчезновения нормальных составляющих скоростей и непрерывности касательных составляющих скоростей, нормальных и касательных составляющих напряжений:

$$\begin{aligned} v_{r1} = v_{r2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad (v_{r1} = v_{r2}, \quad v_{\theta 1} = v_{\theta 2}), \\ B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \\ (p_1 - p_2 + 2D\sigma)R = \left(\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{rr}^{(2)} \right) R - \\ - \left(\sigma_{r\theta}^{(1)} - \sigma_{r\theta}^{(2)} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}, \\ - (p_1 - p_2 + 2D\sigma) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = \left(\sigma_{\theta r}^{(1)} - \sigma_{\theta r}^{(2)} \right) R - \\ - \left(\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2)} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь компоненты симметричного тензора напряжений σ_{ik} включают в себя гидродинамическую и магнитную части. В частности, для второй фазы [13]

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}^{(2)} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + H_i H_k + \\ + \frac{1}{2} \delta_{ik} H_j^2 + \frac{1}{2} (M_i H_k + M_k H_i). \end{aligned}$$

Уравнения (1) записаны в предположении малости ε . Заметим, что требования непрерывности касательных к поверхности капли составляющих скорости эквивалентны требованию непрерывности векторов скоростей по обе стороны границы раздела.

Среднюю кривизну деформированной капли $2D$ вычислим по формулам дифференциальной геометрии:

$$2D = 2 - (\Delta + 2)\varepsilon + 2\varepsilon(\Delta + 1)\varepsilon + O(\varepsilon^3),$$

где Δ — угловой оператор Лапласа.

Решение задачи будем искать в виде рядов

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{H}_1 = H_{r1}\mathbf{e}_r + H_{\theta1}\mathbf{e}_\theta = \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)} + \dots,$$

$$\mathbf{H}_2 = H_{r2}\mathbf{e}_r + H_{\theta2}\mathbf{e}_\theta = \mathbf{h}^{(1)} + \mathbf{h}^{(2)} + \dots,$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{h}^{(1)} + \mathbf{m}^{(1)} + \mathbf{h}^{(2)} + \mathbf{m}^{(2)} + \dots,$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{U}^{(1)} + \mathbf{U}^{(2)} + \dots, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} + \dots,$$

$$p_1 = p_0 + Q^{(1)} + Q^{(2)} + \dots,$$

$$p_2 = 2\sigma + q^{(1)} + q^{(2)} + \dots \varepsilon = s^{(1)} + s^{(2)} + \dots,$$

в которых каждый следующий член на порядок меньше предыдущего (p_0 — давление на бесконечности). Амплитуду поля H_0 вдали от капли считаем малым параметром, течение жидкости считаем ламинарным, его интенсивность мала в силу малости амплитуды H_0 .

Функции первого приближения. В линейном приближении система гидродинамических уравнений допускает тривиальное решение

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)} = Q^{(1)} = q^{(1)} = s^{(1)} = 0.$$

Известное решение магнитной части задачи удобно записать в следующей форме:

$$\mathbf{H}^{(1)} = \nabla U \exp(-i\gamma t), \quad \mathbf{h}^{(1)} = \nabla u \exp(-i\gamma t),$$

$$U = (H_0 r + C r^{-2}) \cos \theta, \quad u = \mathcal{H} r \cos \theta = \mathcal{H} z.$$

Постоянные интегрирования \mathcal{H} и C определим из граничных условий:

$$C = -\frac{\chi \mathcal{H}}{3}, \quad \mathcal{H} = \frac{3H_0}{3 + \chi}.$$

Таким образом, в первом приближении по амплитуде поля на бесконечности H_0 капля остается сферической, а поле $\mathbf{h}^{(1)}$ в капле однородно.

Функции второго приближения. Собрав члены второго порядка, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{U}^{(2)}}{\partial t} = -\nabla Q^{(2)} + \Delta \mathbf{U}^{(2)},$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t} = -\nabla q^{(2)} + \eta \Delta \mathbf{u}^{(2)},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U}^{(2)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}^{(2)} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(2)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}^{(2)} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h}^{(2)} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{b}^{(2)} = 0,$$

$$\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{h}^{(2)} + \mathbf{m}^{(2)}, \quad \mathbf{m}^{(2)} = \chi \mathbf{h}^{(2)},$$

$$r = 1 + s^{(2)} : \quad U_r^{(2)} = u_r^{(2)} = \frac{\partial s^{(2)}}{\partial t}, \quad U_\theta^{(2)} = u_\theta^{(2)},$$

$$H_r^{(2)} = h_r^{(2)} + m_r^{(2)}, \quad H_\theta^{(2)} = h_\theta^{(2)},$$

$$Q^{(2)} - q^{(2)} - \sigma(\Delta + 2)s^{(2)} = 2 \frac{\partial}{\partial r} (U_r^{(2)} - \eta u_r^{(2)}) + \Delta p_M,$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) (U_\theta^{(2)} - \eta u_\theta^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (U_r^{(2)} - \eta u_r^{(2)}).$$

На бесконечности все функции второго приближения равны нулю.

После необходимых преобразований получим следующие выражения для магнитного скачка давлений Δp_M ($\omega \equiv 2\gamma$):

$$\Delta p_M = \frac{1}{2} (H_{r1}^2 - H_{\theta1}^2 - 2\mu H_{r2}^2 + H_{r2}^2 + H_{\theta2}^2) = \\ = \frac{1}{2} \chi^2 \mathcal{H}^2 \cos^2 \theta \exp(-i\omega t).$$

Этот перепад давления Δp_M деформирует каплю вдоль поля с удвоенной частотой, превращая ее в эллипсоид вращения с

$$r = 1 + s P_2 \exp(-i\omega t)$$

($P_2 = (3 \cos^2 \theta - 1)/2$ — стандартный полином Лежандра второй степени). Заметим, что магнитная часть касательных (вдоль меридиана) напряжений на поверхности недеформированной капли тождественно равна нулю:

$$H_{r1} H_{\theta1} - \mu H_{r2} H_{\theta2} = 0.$$

Равны нулю и члены второго порядка для магнитных полей:

$$\mathbf{H}^{(2)} = 0, \quad \mathbf{h}^{(2)} = 0.$$

Точное решение гидродинамической части второго приближения представим в следующей форме:

$$\mathbf{U}^{(2)} = \left[\frac{A}{r^4} + \frac{B}{r} h_2^{(1)}(\mu_1 r) \right] P_2 \mathbf{e}_r + \\ + \left\{ -\frac{A}{3r^4} + \frac{B}{2r} \left[h_2^{(1)}(\mu_1 r) - \frac{\mu_1 r}{3} h_3^{(1)}(\mu_1 r) \right] \right\} \times \\ \times r \nabla P_2 \exp(-i\omega t),$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \left[ar + \frac{b}{r} j_2(\mu_2 r) \right] P_2 \mathbf{e}_r + \\ + \left\{ \frac{ar}{2} + \frac{b}{3r} \left[-j_2(\mu_2 r) + \frac{\mu_2 r}{2} j_1(\mu_2 r) \right] \right\} r \nabla P_2 \times \\ \times \exp(-i\omega t),$$

$$Q^{(2)} = -\mu_1^2 \frac{AP_2}{3r^3} \exp(-i\omega t),$$

$$q^{(2)} = \left(\rho\mu_1^2 a \frac{r^2 P_2}{2} + \text{const} \right) \exp(-i\omega t),$$

$$\mu_1^2 = i\omega, \quad \mu_2^2 = \frac{i\omega}{\nu}, \quad \text{const} = \frac{1}{2}\chi\mathcal{H}^2 - \frac{1}{6}\chi^2\mathcal{H}^2.$$

Здесь $j_n(z)$ и $h_n^{(1)}(z)$ — сферические функции Бесселя и Ханкеля первого рода n -го порядка [14]. В константу включены постоянные вклады магнитных давлений.

Пять постоянных интегрирования A, B, a, b и s определяются из граничных условий:

$$A + Bh_2^{(1)}(\mu_1) = -\mu_1^2 s, \quad a + bj_2(\mu_2) = -\mu_1^2 s,$$

$$\begin{aligned} -2A + B \left[3h_2^{(1)}(\mu_1) - \mu_1 h_3^{(1)}(\mu_1) \right] = \\ = 3a + b \left[-2j_2(\mu_2) + \mu_2 j_1(\mu_2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16A + B \times \\ \times \left[3\mu_1 h_1^{(1)}(\mu_1) - (9 + \mu_1^2)h_2^{(1)}(\mu_1) + 5\mu_1 h_3^{(1)}(\mu_1) \right] = \\ = 6a + b \left[\mu_2^2 j_0(\mu_2) - 5\mu_2 j_1(\mu_2) + 16j_2(\mu_2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mu_1^2 \frac{A}{3} - \rho\mu_1^2 \frac{a}{2} + 4\sigma s = 2 \left\{ -4A - Bh_2^{(1)}(\mu_1) + \right. \\ \left. + \mu_1 B \left[h_1^{(1)}(\mu_1) - \frac{3h_2^{(1)}(\mu_1)}{\mu_1} \right] \right\} - \\ -2\eta \left\{ a - bj_2(\mu_2) + \mu_2 b \left[j_1(\mu_2) - \frac{3j_2(\mu_2)}{\mu_2} \right] \right\} + \frac{1}{3}\chi^2\mathcal{H}^2. \end{aligned}$$

Наибольший интерес представляет амплитуда колебаний капли s , поэтому выпишем формулу для ее определения (заметим, что $(1+s)$ является большей полуосью эллипсоида вращения

$$1 = \frac{x^2 + y^2}{(1-s/2)^2} + \frac{z^2}{(1+s)^2},$$

в который превращается капля при максимальном

отклонении от равновесной сферической формы $r = 1$):

$$s = \frac{2\chi^2\mathcal{H}^2}{\mu_1^2} \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}, \tag{2}$$

$$a_1 = 16(\eta - 1), \quad a_2 = \eta\mu_2^2,$$

$$a_3 = 2\eta - 2 - K, \quad b_1 = 5,$$

$$b_2 = 5 - J, \quad b_3 = 1,$$

$$c_1 = 2\mu_1^2 + 3\rho\mu_1^2 - 12\eta - 48 + 24\sigma/\mu_1^2,$$

$$c_2 = 12\eta J - 60\eta + 3\rho\mu_1^2, \quad c_3 = 2K - 12,$$

$$J = \mu_2 \frac{j_1(\mu_2)}{j_2(\mu_2)}, \quad K = \frac{3i + 3\mu_1 - i\mu_1^2}{\mu_1 + i}.$$

Вынужденные колебания капли. Представим комплексную амплитуду колебаний капли s , удовлетворяющую уравнению (2), в экспоненциальной форме

$$s = |s| \exp(i\alpha),$$

введя амплитуду колебаний $|s|$ и сдвиг фаз α между колебаниями капли и вынуждающей силой. (Заметим, что то, что α положительно, соответствует «запаздыванию» колебания относительно внешнего воздействия, пропорционального $\exp(-i\omega t)$.) В соответствии с общей теорией вынужденных колебаний систем, при наличии трения при резонансной частоте ω_* амплитуда колебаний капли достигает максимального значения, а при собственной частоте ω_0 разность фаз α проходит через значение $\pi/2$.

Рассмотрим вначале бездиссипативную систему, считая обе жидкости идеальными. Перейдя для этого в (2) к размерной форме записи и устремив вязкости обеих жидкостей к нулю, получим для резонансной частоты ω_* известное выражение [11]:

$$\omega_*^2 = \frac{24}{3\rho_2 + 2\rho_1} \frac{\sigma_0}{a^3}. \tag{3}$$

Как видно из (3), «рэлеевская» частота колебаний капли $\omega_*^2 = 8\sigma_0/\rho a^3$ в невесомом газе меньше собственной частоты колебаний пузыря невесомого газа в той же самой жидкости ($\omega_*^2 = 12\sigma_0/\rho a^3$) в полтора раза, что можно объяснить тем, что при колебаниях пузыря в движение оказываются вовлеченными лишь небольшие объемы жидкости (скорости в первой фазе убывают с расстоянием как $1/r^4$, в то время как в капле зависимость скорости от расстояния линейная) и, следовательно, эффективный

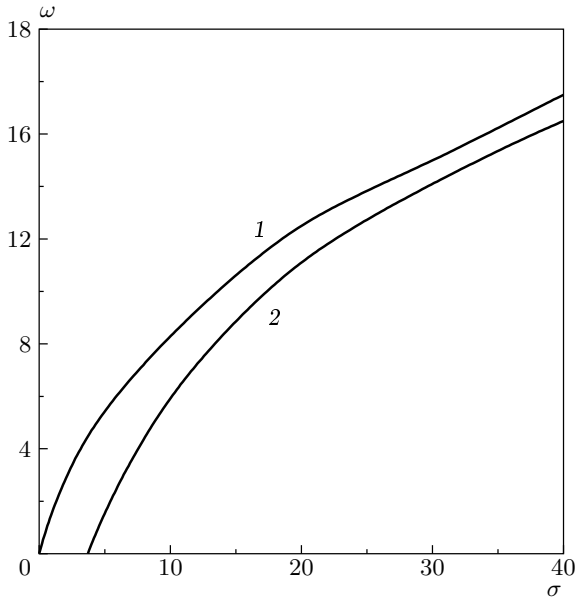


Рис. 1. Зависимости резонансной частоты ω_* (кривая 2) и собственной частоты ω_0 (кривая 1) от безразмерного поверхностного натяжения σ для капли жидкости в невязком газе

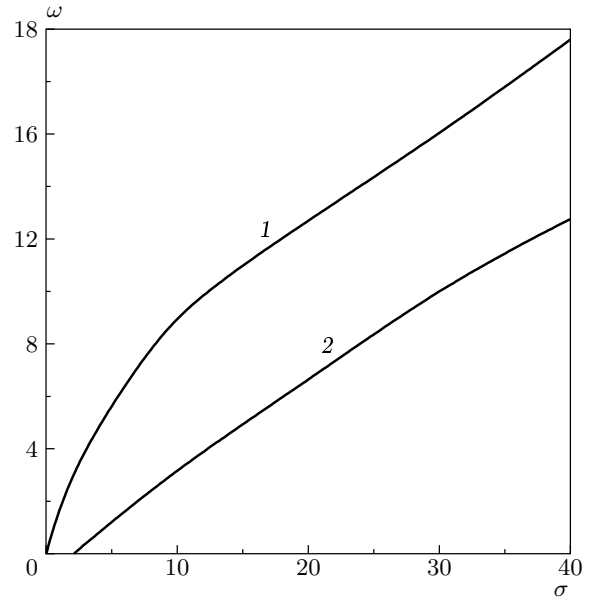


Рис. 2. Зависимости резонансной частоты ω_* (кривая 2) и собственной частоты ω_0 (кривая 1) от безразмерного поверхностного натяжения σ для невязкого пузыря в жидкости

линейный размер системы в этом случае меньше радиуса включения a .

Рассмотрим другой частный случай: вынужденные колебания капли вязкой жидкости в газе. Перейдя к размерным величинам и затем устремив вязкость η_1 к нулю, получим следующее уравнение:

$$s = -2\chi^2 \mathcal{H}^2 \frac{a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = i\omega - 10 + 2J,$$

$$b_1 = 3i\omega - 12 - \frac{24i\sigma}{\omega}, \quad b_2 = 3i\omega - 60 + 12J,$$

где J определяется формулами (2). Рассчитанные по этой формуле зависимости резонансной частоты ω_* (кривая 2) и собственной частоты ω_0 (кривая 1) от безразмерного поверхностного натяжения $\sigma = \sigma_0 a / \eta_2 \nu_2$ для капли жидкости в невязком газе изображена на рис. 1. Видно, что $\omega_* = 0$ при $\sigma_* = 3.427$. Это значит, что при меньших σ (т. е. при большей вязкости капли при фиксированном σ_0) свободное движение капли, вызванное начальным возмущением, будет носить аperiодический, не колебательный характер.

При использовании формулы (2) для определения амплитуды и фазы колебаний газового пузыря в жидкости следует положить в ней $\eta = 0$. После

необходимых преобразований получится следующее уравнение:

$$s = -2\chi^2 \mathcal{H}^2 \frac{a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad a_1 = 16, \quad a_2 = 2 + K,$$

$$b_1 = 2i\omega - 48 - \frac{24\sigma}{\omega}, \quad b_2 = -12 + 2K.$$

Здесь $\sigma = \sigma_0 a / \eta_1 \nu_1$ (K см. (2)). Зависимости резонансной частоты ω_* (кривая 2) и частоты ω_0 (кривая 1) от безразмерного поверхностного натяжения для пузыря газа в вязкой жидкости изображена на рис. 2. Свободное движение пузыря будет носить аperiодический характер при $\sigma_* < 1.525$. На рис. 3 показаны зависимости резонансной частоты ω_* (кривая 2) и частоты ω_0 (кривая 1) от безразмерной вязкости $\eta = \eta_2 / \eta_1$ гетерогенной системы «капля в безграничной жидкости» для избранного значения безразмерного поверхностного натяжения $\sigma = \sigma_0 a / \eta_1 \nu_1 = 10$. Для этой же гетерогенной системы на рис. 4 приведена кривая, которая разграничивает области аperiодических (область II) и колебательных (область I) режимов свободных движений на плоскости $\sigma\eta$. Точки соответствуют различным параметрам использованных в экспериментах жидкостей.

Полученные соотношения позволяют решить одну из наиболее сложных проблем в межфазной гид-

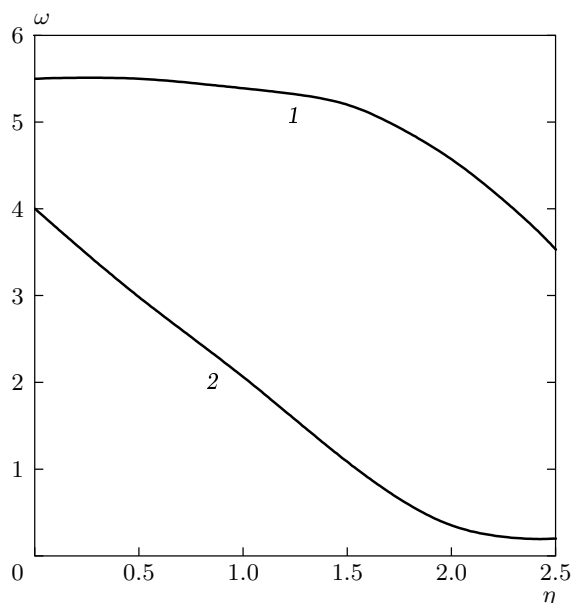


Рис. 3. Зависимости резонансной частоты ω_* (кривая 2) и собственной частоты ω_0 (кривая 1) от безразмерной вязкости гетерогенной системы «капля в безграничной жидкости» для поверхностного натяжения $\sigma = 10$

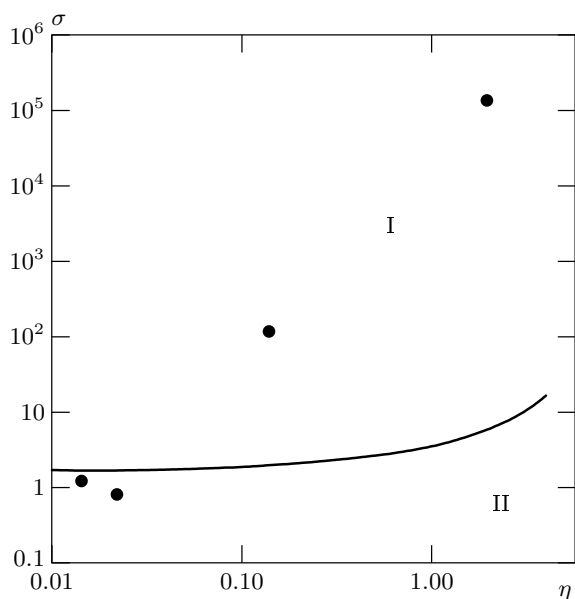


Рис. 4. Кривая, разграничивающая области колебательных (I) и аperiodических (II) режимов отклика системы на внешнее начальное возмущение. Точки на плоскости $\sigma\eta$ соответствуют различным параметрам исследованных жидкостей

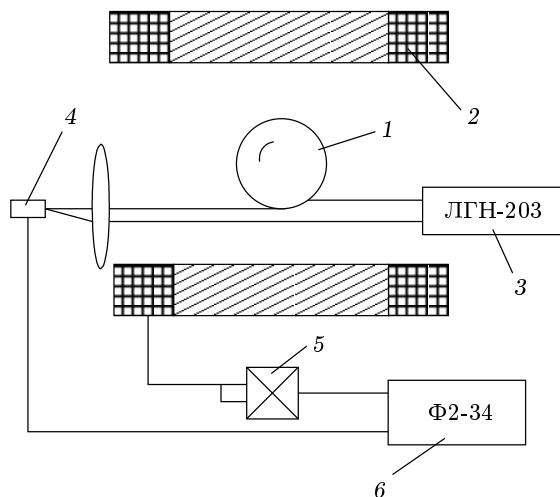


Рис. 5. Схема экспериментальной установки: 1 — капля магнитной жидкости, 2 — кольца Гельмгольца, 3 — гелий-неоновый лазер, 4 — фотодиод, 5 — аналоговый умножитель напряжения, 6 — измеритель разности фаз

родинамике — определение межфазного поверхностного натяжения на границе двух жидкостей. Использование для этой цели расчетных методов неэффективно. Известное правило Антонова [15] является приближенным даже для чистых жидкостей. Для жидкостей, содержащих коллоидные частицы, покрытые слоем поверхностно-активного вещества, оно не пригодно вообще [3]. Коагуляция частиц на границе раздела придает последней свойства жесткой пленки. Это обстоятельство существенно искажает результаты при измерениях σ_0 с использованием тензометрических методов, например, по форме лежащей капли или путем вытягивания поверхности с помощью разного рода тел.

Использование формул (2) для определения σ_0 позволяет повысить точность измерений по двум причинам: во-первых, сама по себе частота может быть измерена с очень высокой точностью (и многие измерения поэтому сводят к частотным), во-вторых, исключается механический контакт поверхности с какими-либо датчиками. Кроме того, предлагаемый метод дает возможность непрерывного контроля за изменениями σ_0 .

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В опытах использовалась магнитная жидкость на основе магнетита и декана, стабилизированная олеиновой кислотой. В качестве внешней среды бы-

Таблица

Несущая жидкость	ρ , г/см ³	η_1 , Пз	η_2 , Пз	d , см	f , Гц	σ_0 , дин/см	σ_1 , дин/см	σ_2 , дин/см
вода	1	0.01	0.0196	0.86	6.56	31.5	28.1	30.3
этилен-гликоль	1.113	0.18	0.025	0.81	3.33	8.41	6.76	10.8
хлоргидрин глицерина	1.317	1.59	0.035	0.827	1.61	3.73	1.98	4.2
глицерин	1.251	2.245	0.032	0.734	3.80	13.35	7.35	18.5

ли выбраны вода, этиленгликоль, хлоргидрин глицерина и глицерин. Использование этого ряда жидкостей обусловлено их малой растворимостью в углеводородах и позволяет охватить большой диапазон вязкостей. Изменением концентрации магнетита плотность магнитной жидкости подгонялась под внешнюю несущую жидкость. Несущая жидкость заливалась в кювету с плоскими прозрачными стенками. Для предотвращения дрейфа капли последняя фиксировалась в центре кюветы с помощью проволочного кольца небольшого диаметра (меньше диаметра капли).

Линейно поляризованное переменное магнитное поле небольшой частоты (1–10 Гц) создавалось с помощью колец Гельмгольца, питаемых от усилителя постоянного тока. Последовательно с кольцами включался резистор небольшой величины, напряжение с которого подавалось на оба входа аналогового умножителя напряжения. Выходное напряжение умножителя, таким образом, было пропорционально квадрату силы тока в катушках и совпадало по фазе с магнитной силой, деформирующей каплю. Фаза колебаний капли определялась с помощью лазерного луча. Луч от гелий-неонового лазера диаметром около 0.5 мм направлялся перпендикулярно магнитному полю по касательной к боковой поверхности капли таким образом, чтобы интенсивность прошедшего света уменьшалась вдвое. Последняя измерялась с помощью фотодиода. При включенном поле колеблющаяся капля модулирует интенсивность света и на выходе фотодиода образуется гармонический сигнал, совпадающий по фазе с колебаниями капли. Амплитуда поля выбиралась из условия, чтобы освещаемая боковая поверхность капли находилась в пределах диаметра луча (при этом сигнал остается гармоническим). Разность фаз между током фотодиода и сигналом с выхода умножителя (т. е. фаза колебаний капли) измерялась с помощью цифрового

измерителя разности фаз Ф2-34. Погрешность измерения фазы составляла 0.02–0.03 углового градуса.

Результаты измерений собственных частот колебаний капель в четырех выбранных жидкостях представлены в таблице. Параметры внешних жидкостей определялись в независимых опытах. Отличие их от данных, приведенных в справочниках, объясняется присутствием некоторого количества воды. Наряду с параметрами жидкостей, диаметрами капель d и собственными частотами колебаний f в таблице представлены результаты расчетов поверхностного натяжения, выполненных с учетом вязкости σ_0 и в невязком приближении σ_1 . Также приведены результаты прямого измерения межфазного поверхностного натяжения σ_2 . Непосредственно σ_2 определялось путем измерения на аналитических весах усилия, с которым пленка магнитной жидкости стягивала прямоугольную проволочную рамку под слоем несущей жидкости. Для капли, взвешенной в хлоргидрине глицерина, σ_2 рассчитывалось по деформации капли в постоянном поле.

Измеренные значения σ_2 превышают значения σ_0 . По нашему мнению, это связано с коагуляцией тонкого слоя частиц вблизи поверхности капли вследствие влияния несущей жидкости. При этом на поверхности капли образуется тонкий слой коагулировавших частиц, препятствующий деформации капли. При непосредственном измерении σ_2 путем вытягивания пленки происходит постоянное обновление поверхности и коагуляция частиц не сказывается. Для воды, жидкости, наименее растворимой в углеводородах, влияние коагуляции практически не заметно (σ_2 близко к σ). Для других жидкостей коагуляция сказывается на результатах измерений. В частности, влияние коагуляции проявляется в медленном изменении собственной частоты колебаний капли.

Значения σ_0 , рассчитанные с учетом вязкости,

отличаются от значений, полученных в приближении идеальной жидкости σ_1 . Причем расхождение нарастает с увеличением вязкости. Следовательно, вязкость жидкости оказывает влияние на собственную частоту колебаний капли, и это влияние должно учитываться. С точки зрения практического применения предлагаемое уточненное решение задачи о колебаниях вязкой капли может служить основой для нового метода определения межфазного поверхностного натяжения [15].

Авторы выражают благодарность А. Ф. Пшеничникову, обратившему их внимание на данную проблему и принимавшему активное участие в обсуждении полученных результатов. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда гражданских исследований и развития для стран СНГ (Civilian Research & Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union), грант PE-009-0.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Лебедев, К. И. Морозов, Письма в ЖЭТФ **65**, 150 (1997).
2. К. И. Морозов, ЖЭТФ **112**, 1340 (1997).
3. Ю. К. Братухин, А. В. Лебедев, А. Ф. Пшеничников, МЖГ **1**, 22 (2000).
4. К. И. Морозов, А. В. Лебедев, ЖЭТФ **118**, 1188 (2000).
5. Ю. И. Диканский, М. А. Беджанян, И. Ю. Чуенкова, В. Н. Суздаев, Магнитная гидродинамика, Вып. 1, 61 (2000).
6. В. В. Чеканов, Н. В. Кандаурова, Магнитная гидродинамика, Вып. 1, 69 (2000).
7. E. Janiaud, F. Elias, J.-C. Vacri, V. Cabuil, and R. Perzynski, *Magneto hydrodynamics* **4**, 365 (2000).
8. Э. Я. Блум, М. М. Майоров, А. О. Цеберс, *Магнитные жидкости*, Зинатне, Рига (1989).
9. В. И. Дроздова, Ю. Н. Скибин, В. В. Чеканов, Магнитная гидродинамика, Вып. 4, 17 (1981).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
11. Г. Ламб, *Гидродинамика*, ОГИЗ, Москва (1947).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
13. М. И. Шлиомис, УФН **112**, 427 (1974).
14. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, Наука, Москва (1979).
15. А. И. Русанов, В. А. Прохоров, *Межфазная тензиометрия*, Химия, Санкт-Петербург (1994).