

КАК СВЯЗАНА МАКСИМАЛЬНАЯ ЭНТРОПИЯ КВАНТОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ЕЕ ПЛОЩАДЬЮ?

Р. В. Коркин, И. Б. Хрипович***

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия,*

*Новосибирский университет
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 27 декабря 2001 г.

Показано, что максимальная энтропия квантованной поверхности в классическом пределе пропорциональна ее площади. Результат справедлив для петлевой квантовой гравитации, а также для несколько более общего класса подходов к квантованию поверхностей. Для некоторых частных случаев максимальная энтропия вычислена в явном виде.

PACS: 04.60, 04.70, 04.70.D

Рассмотрим соотношение между максимальной энтропией квантованной поверхности и ее площадью. Для определенности начнем исследование с подхода к квантованию поверхностей, основанному на петлевой квантовой гравитации [1–5]. Здесь геометрия поверхности определяется набором из ν проколов на этой поверхности. В общем случае каждый прокол снабжается двумя целыми или полуцелыми «угловыми моментами» j^u и j^d :

$$j^u, j^d = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots \quad (1)$$

j^u и j^d связаны с ребрами, направленными, соответственно, вверх и вниз относительно нормали к поверхности и складываются в угловой момент j^{ud} :

$$\mathbf{j}^{ud} = \mathbf{j}^u + \mathbf{j}^d, \quad |j^u - j^d| \leq j^{ud} \leq j^u + j^d. \quad (2)$$

Площадь поверхности равна

$$A = \alpha l_p^2 \times \sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{2j_i^u(j_i^u+1) + 2j_i^d(j_i^d+1) - j_i^{ud}(j_i^{ud}+1)}. \quad (3)$$

Представляется уместным следующее замечание по поводу последней формулы. Вполне естественно,

что единицей площади служит квадрат планковской длины

$$l_p^2 = \frac{G\hbar}{c^3}. \quad (4)$$

Каждый радикал

$$\sqrt{2j_i^u(j_i^u+1) + 2j_i^d(j_i^d+1) - j_i^{ud}(j_i^{ud}+1)}$$

имеет тот же порядок величины, что и сами j_i^u и j_i^d . Но тогда, чтобы площадь A была конечной в классическом пределе большой суммы квантовых чисел, степень

$$N = \sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{2j_i^u(j_i^u+1) + 2j_i^d(j_i^d+1) - j_i^{ud}(j_i^{ud}+1)} \quad (5)$$

должна равняться степени \hbar в l_p^2 . Этот аргумент, сформулированный в работе [6], также вполне естествен. Его можно легко проверить, рассматривая в обычной квантовой механике любое среднее, не исчезающее в классическом пределе. С другой стороны, поскольку большие j , вообще говоря, допустимы, сумма именно квадратных корней, а не, к примеру, сумма $j(j+1)$ или $\sqrt[4]{j(j+1)}$, должна входить в выражение для площади.

Что же касается общего численного множителя α в формуле (3), его нельзя определить без дополнительных физических соображений. Эта неодно-

*E-mail: rvkorkin@mail.ru

**E-mail: khriпович@inp.nsk.su

значность возникает благодаря наличию свободного параметра (так называемого параметра Иммиризи) [7, 8], который соответствует семейству неэквивалентных квантовых теорий, каждая из которых оказывается возможной без подобных соображений. Можно надеяться, что значение этого множителя в формуле (3) удастся определить, исследуя энтропию черной дыры. Эта идея (упомянутая ранее в работе [9]) была исследована одним из авторов [10] для несколько упрощенных моделей в предположении, что энтропия вечной черной дыры в равновесии максимальна. Последнее предположение восходит к работе [11], где оно использовалось в модели квантовой черной дыры, возникающей при коллапсе пыли. В настоящей статье мы ограничимся вычислением максимальной энтропии поверхности, площадь которой задана соотношением (3) (или некоторым его обобщением).

Энтропия S поверхности определяется как логарифм числа состояний этой поверхности с фиксированной площадью A , т. е. с фиксированной суммой (5). Пусть ν_i — это число проколов с заданным набором моментов j_i^u, j_i^d, j_i^{ud} . Полное число проколов равно

$$\nu = \sum_i \nu_i.$$

Каждому проколу i приписывается статистический вес g_i . Поскольку

$$\mathbf{j}_i^{ud} = \mathbf{j}_i^u + \mathbf{j}_i^d,$$

этот статистический вес равен, в отсутствие дополнительных ограничений, числу возможных проекций \mathbf{j}_i^{ud} , т. е.

$$g_i = 2j_i^{ud} + 1.$$

Тогда энтропия равняется

$$S = \ln \left[\prod_i \frac{(g_i)^{\nu_i}}{\nu_i!} \nu! \right] = \sum_i \nu_i \ln g_i - \sum_i \ln \nu_i! + \ln \nu!. \quad (6)$$

Структура выражений (3) и (6) настолько различна, что в общем случае энтропия, разумеется, не может быть пропорциональна площади (см. более детальное обсуждение в работе [10]). Однако, как будет показано ниже, именно так обстоит дело для максимальной энтропии в классическом пределе.

Естественно ожидать из комбинаторных соображений, что абсолютный максимум энтропии достигается, когда присутствуют все значения квантовых

чисел j_i^u, j_i^{ud} . Эта догадка подтверждается также конкретными вычислениями для некоторых модельных случаев (см. [10]). Мы предположим также, что в классическом пределе характерные значения чисел проколов ν_i велики. Тогда с помощью формулы Стирлинга выражение (6) преобразуется к виду

$$S = \sum_i \left[\nu_i \ln(2j_i + 1) - \left(\nu_i + \frac{1}{2} \right) \ln \nu_i \right] + \left(\sum_i \nu_i + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\sum_{i'} \nu_{i'} \right). \quad (7)$$

Мы опустили здесь слагаемые с $\ln \sqrt{2\pi}$, близкие по порядку величины к единице. Применимость этого приближения, равно как и самой формулы Стирлинга, к этой задаче обсуждается ниже. Мы ищем экстремум выражения (7) при условии

$$N = \sum_i \nu_i r_i = \text{const}, \quad (8)$$

$$r_i = \sqrt{2j_i^u(j_i^u + 1) + 2j_i^d(j_i^d + 1) - j_i^{ud}(j_i^{ud} + 1)}.$$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\ln g_i - \ln \nu_i + \ln \left(\sum_{i'} \nu_{i'} \right) = \mu r_i, \quad (9)$$

или

$$\nu_i = g_i \exp(-\mu r_i) \sum_{i'} \nu_{i'}. \quad (10)$$

Здесь μ — множитель Лагранжа для дополнительного условия (8). Суммируя выражения (10) по i , мы приходим к уравнению для μ :

$$\sum_i g_i \exp(-\mu r_i) = 1. \quad (11)$$

С другой стороны, умножая уравнение (9) на ν_i и суммируя по i , с учетом условия (8) получаем следующий результат для максимума энтропии при заданном значении N :

$$S_{max} = \mu N. \quad (12)$$

В выражении (7) мы пренебрегли членами

$$-\frac{1}{2} \sum_i \ln \nu_i, \quad \frac{1}{2} \ln \nu.$$

Ниже мы вернемся к вопросу о точности этого приближения.

Таким образом, именно максимальная энтропия поверхности пропорциональна в классическом пределе ее поверхности. Эта пропорциональность заведомо имеет место для классической черной дыры. Это очень сильный аргумент в пользу предположения, что энтропия черной дыры максимальна.

Следует подчеркнуть, что соотношение (12) справедливо не только в петлевой квантовой гравитации, но относится к более широкому классу подходов к квантованию поверхностей. В действительности для этого необходимо следующее. Поверхность должна состоять из участков разных сортов, так что имеется ν_i участков каждого сорта i , с обобщенным эффективным квантовым числом r_i и кратностью вырождения g_i . Тогда в классическом пределе максимальная энтропия поверхности пропорциональна ее площади.

С нашей точки зрения, полной ясности в вопросе о явном виде радикалов в выражении (3), т. е. о конкретном выборе j_i^u , j_i^d и j_i^{ud} , именно для черных дыр в настоящее время нет. Поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением нескольких примеров достаточно разумного конкретного выбора радикалов в общем правиле квантования (3) для площади поверхности.

Начнем со случая, когда формула (3) сводится к

$$A = \alpha l_p^2 \sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{j_i(j_i+1)} = \alpha l_p^2 \sum_{j=1/2}^{\infty} \sqrt{j(j+1)} \nu_j. \quad (13)$$

Энтропия в этом случае была найдена ранее [10] в предположении, что задана сумма квантовых чисел

$$n = \sum_{j=1/2}^{\infty} j \nu_j.$$

Теперь мы решим эту задачу при заданном

$$N = \sum_{j=1/2}^{\infty} \sqrt{j(j+1)} \nu_j. \quad (14)$$

Здесь кратность вырождения прокола с квантовым числом j равна $g_j = 2j + 1$ и уравнение (11) можно переписать как

$$\sum_{p=1}^{\infty} (p+1) z^{\sqrt{p(p+1)}} = 1, \quad p = 2j, \quad z = e^{-\mu/2}. \quad (15)$$

Его решение таково:

$$z = 0.423 \quad \text{или} \quad \mu = -2 \ln z = 1.722. \quad (16)$$

Таким образом, здесь максимальная энтропия равна

$$S_{max} = 1.722N = 2.515\nu. \quad (17)$$

Среднее значение углового момента составляет

$$\langle j \rangle = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1/2}^{\infty} j \nu_j = 1.059. \quad (18)$$

В известном смысле простейший выбор квантовых чисел j_i в этой модели состоит в том, чтобы положить все их равными $1/2$. Тогда $\nu_j = \nu \delta_{j,1/2}$ и

$$S = \ln 2 \nu, \quad \text{или} \quad S = \frac{2 \ln 2}{\sqrt{3}} N. \quad (19)$$

На самом деле это значение для энтропии черной дыры было получено ранее в работе [12] в рамках теории поля Черна–Саймонса; характерное значение j_i , найденное там, также равно $1/2$.

Еще один пример выглядит так. Здесь для каждого прокола

$$j_i^u = j_i^d = j_i, \quad j_i^{ud} = 0.$$

В этом случае

$$N = 2 \sum_{j=1/2}^{\infty} \sqrt{j(j+1)} \nu_j, \quad (20)$$

а $g_j = 1$. Тогда уравнение для $z = \exp(-\mu/2)$ выглядит следующим образом:

$$\sum_{p=1}^{\infty} z^{\sqrt{p(p+1)}} = 1, \quad (21)$$

а его решение

$$z = 0.602 \quad \text{или} \quad \mu = -2 \ln z = 0.508. \quad (22)$$

Полученная таким образом максимальная энтропия и средний угловой момент составляют

$$S_{max} = 0.508N = 1.655\nu, \quad (23)$$

$$\langle j \rangle = 1.224. \quad (24)$$

Рассмотрим, наконец, общий случай, когда N задано формулой (5), $g_i = 2j_i^{ud} + 1$ и все значения j_i^u , j_i^d , j_i^{ud} разрешены. В этом случае решение уравнения (11)

$$z = 0.202, \quad (25)$$

а максимальная энтропия составляет

$$S_{max} = 3.120N = 4.836\nu. \quad (26)$$

Средние значения квантовых чисел равны

$$\langle j^u \rangle = \langle j^d \rangle = 1.072, \quad \langle j^{ud} \rangle = 2.129. \quad (27)$$

Следует подчеркнуть, что таким образом мы всегда приходим к эффективному условию квантования с целыми квантовыми числами ν для энтропии (и площади) черной дыры, которое было предложено в пионерской работе [13] (см. также [14, 15]).

Обсудим теперь точность нашего результата для максимальной энтропии. Чтобы сделать наши аргументы более конкретными и ясными, рассмотрим вторую из моделей, исследованных выше, с N , заданным формулой (21), и результатами, которые описываются соотношениями (22)–(24). Однако легко проверить, что полученные здесь оценки качественно верны как для первой модели, описываемой формулами (14)–(18), так и для третьего, самого общего случая. При $\langle j \rangle \sim 1$ число проколов ν имеет тот же порядок величины, что и N . Таким образом, в классическом пределе $\nu \sim N \gg 1$. Далее, согласно соотношению (10), при $z \lesssim 1$ числа ν_j удовлетворяют условию $\nu_j > 1$, пока квантовые числа j ограничены следующим образом:

$$j \lesssim J \sim \ln N. \quad (28)$$

Очевидно, характерные значения тех ν_j , которые дают существенные вклады в N , велики, и приближение Стирлинга для S вполне законно.

С другой стороны, число членов в сумме по j в выражениях типа (7) эффективно ограничено неравенством (28). Таким образом, вклад членов с $\ln \sqrt{2\pi}$, опущенных в (7), равно как и члена $(1/2) \ln \nu$, удержанного в (7), но отброшенного в окончательном выражении (12), составляет всего лишь $\ln N$ по порядку величины. Ведущая поправка к нашему результату (12) обусловлена слагаемым

$$-\frac{1}{2} \sum_i \ln \nu_i$$

и составляет величину порядка $\ln^2 N$. Кстати, она отлична от ведущей поправки в модели, рассмотренной в работах [16, 17], эта последняя поправка имеет порядок величины $\ln N$.

В заключение упомянем попытки вычислить энтропию поверхности в петлевой квантовой гравитации, сделанные в работах [18, 19]. В этих статьях вообще не обсуждается распределение угловых моментов j по проколам. Мы не понимаем, как можно найти энтропию поверхности без этой информации.

Мы благодарны Г. Г. Кирилину за интерес к работе и полезные обсуждения. Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 01-02-16898), Ведущей научной школы (грант 40-15-96811), Министерства образования

(грант Е00-3.3-148) и Федеральной программы «Интеграция-2001».

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Rovelli and L. Smolin, Nucl. Phys. B **442**, 593 (1995); erratum, *ibid.* B **456**, 753 (1995); E-print archives gr-qc/9411005.
2. A. Ashtekar and J. Lewandowski, Class. Quantum Grav. **14**, 55 (1997); E-print archives gr-qc/9602046.
3. R. Loll, Phys. Rev. Lett. **75**, 3048 (1995); E-print archives gr-qc/9506014; R. Loll, Nucl. Phys. B **460**, 143 (1996); E-print archives gr-qc/9511030.
4. R. De Pietri and C. Rovelli, Phys. Rev. D **54**, 2664 (1996); E-print archives gr-qc/9602023.
5. S. Frittelli, L. Lehner, and C. Rovelli, Class. Quantum Grav. **13**, 2921 (1996); E-print archives gr-qc/9608043.
6. I. B. Khriplovich, Phys. Lett. B **431**, 19 (1998); E-print archives gr-qc/9804004.
7. G. Immirzi, Class. Quant. Grav. **14**, L177 (1997); E-print archives gr-qc/9701052.
8. C. Rovelli and T. Thiemann, Phys. Rev. D **57**, 1007 (1998); E-print archives gr-qc/970559.
9. M. Bojowald and H. A. Kastrup, Class. Quant. Grav. **17**, 3009 (2000); E-print archives hep-th/9907042; M. Bojowald and H. A. Kastrup, E-print archives hep-th/9907043.
10. I. B. Khriplovich, E-print archives gr-qc/0109092.
11. C. Vaz and L. Witten, Phys. Rev. D **64**, 084005 (2001); E-print archives gr-qc/0104017.
12. A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, and K. Krasnov, Phys. Rev. Lett. **80**, 904 (1998); E-print archives gr-qc/9710007; A. Ashtekar, C. Beetle, and S. Fairhurst, Class. Quant. Grav. **16**, L1 (1999); E-print archives gr-qc/9812065; A. Ashtekar, A. Corichi, and K. Krasnov, Adv. Theor. Math. Phys. **3**, 419 (2000); E-print archives gr-qc/9905089; A. Ashtekar, J. Baez, and K. Krasnov, Adv. Theor. Math. Phys. **4**, 1 (2001); E-print archives gr-qc/0005126.
13. J. D. Bekenstein, Lett. Nuovo Cimento **11**, 467 (1974).
14. В. Ф. Муханов, Письма в ЖЭТФ **44**, 50 (1986).

-
15. Я. И. Коган, Письма в ЖЭТФ **44**, 209 (1986); E-print archives hep-th/9412232.
16. R. Kaul and P. Majumdar, Phys. Rev. Lett. **84**, 5255 (2000); E-print archives gr-qc/0002040.
17. S. Carlip, Class. Quant. Grav. **17**, 4175 (2000); E-print archives gr-qc/0005017.
18. C. Rovelli, Phys. Rev. Lett. **77**, 3288 (1996); E-print archives gr-qc/9603063.
19. K. V. Krasnov, Phys. Rev. D **55**, 3505 (1997); E-print archives gr-qc/960325; K. V. Krasnov, Gen. Rel. Grav. **30**, 53 (1998); E-print archives gr-qc/9605047; K. V. Krasnov, Class. Quant. Grav. **16**, 563 (1999); E-print archives gr-qc/9710006.