ЖЭТФ, 2002, том 122, вып. 1 (7), стр. 49–56

К ГИДРОДИНАМИКЕ ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ: СВЯЗЬ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ СПЕКТРА С АНОМАЛИЕЙ ТРЕТЬИХ МОМЕНТОВ

А. Л. Цескис *

Институт высоких температур Российской академии наук
127412, Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 мая 2001 г.

Обсуждаются автомодельные спектры двумерной турбулентности и их связь с законами сохранения и формой функции, характеризующей перенос энергии в пространстве волновых векторов. Показано, как вид этой функции влияет на направление потоков энергии и энстрофии в $\mathbf{k}$-пространстве. Предположения о связи этих потоков с производной по времени от корреляционной функции (фактически аналогичные гипотезам Колмогорова для трехмерной турбулентности) позволяют получить соотношения, демонстрирующие аномальное поведение третьих моментов двумерной турбулентности, обнаруженное в недавних экспериментах.

PACS: 47.27.Ak, 47.27.Gs

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная турбулентность представляет один из немногочисленных примеров физических задач, решение которых не упрощается с уменьшением размерности пространства. Наличие «лишних» (по отношению к трехмерному случаю) законов сохранения позволяет доказать в двумерной гидродинамике несжимаемой жидкости существование и единственность решений как для уравнения Эйлера, так и для уравнения Навье–Стокса [1–3], но не дает возможности сконструировать решение, пригодное для описания турбулентности. Поэтому для такого описания, аналогично трехмерной ситуации, приходится обращаться к соответствующим соотношениям статистической гидродинамики — уравнению Кармана–Ховарта (и его спектральному аналогу). Последние, однако, имеют один и тот же вид для двумерного и трехмерного случаев, различаясь соответственно лишь значением одного входящего в них целочисленного параметра (см. [4]), и содержат одинаковое число неизвестных функций. Одинаковыми в указанном смысле являются и соотношения между компонентами корреляционных тензоров в двумерном и трехмерном случаях — и, следовательно, двумерная задача не является более простой, чем трехмерная. Более того, наличие дополнительного квадратичного интеграла движения затрудняет прямое применение известных гипотез универсальности, выполняющихся в трехмерной статистической гидродинамике, в силу чего неочевидным оказывается, например, установление различных соотношений для корреляционных и структурных функций, аналогичных имеющим место в трехмерной ситуации [5, 6].

Что касается возможностей экспериментального изучения двумерной турбулентности, то они тоже являются весьма ограниченными, что обусловлено необходимостью использования внешних воздействий с целью обеспечить двумерную структуру турбулентного движения. К таковым относятся внешнее однородное магнитное поле (при этом жидкость должна быть проводящей) или вращение системы как целого с постоянной угловой скоростью (см. обсуждение этих вопросов в [7]). При этом оказывается весьма затруднительным достигнуть таких значений соответствующих параметров (например, магнитного поля), которые обеспечивали бы с достаточной точностью двумерность движения при больших числах Рейнольдса. Новые возможности экспериментального наблюдения двумерной турбулентности были указаны в работе [8] — они связаны с ге-

*E-mail: tseskis@yandex.ru

нерацией турбулентности в тонкой пленке мыльного раствора путем ее пропускания через (двумерную) решетку; при этом двумерность движения обеспечивается малостью отношения толщины пленки к характерным масштабам турбулентности. Однако и в такого рода экспериментах в силу технических причин пока не удается достигнуть больших значений числа Рейнольдса. Наконец, особенно в последнее время, множество работ посвящается прямому численному моделированию двумерной турбулентности. В этих работах в силу ограниченных возможностей вычислительных устройств также не удается выйти за пределы чисел Рейнольдса порядка 10^3 [9, 10].

Несмотря на указанные трудности, к настоящему времени удалось установить основные качественные отличия двумерного турбулентного движения от трехмерного и понять их причину. В первую очередь эти отличия сводятся к тому, что при двумерном турбулентном движении возможной оказывается передача энергии от компонент с большими волновыми числами к компонентам с меньшими волновыми числами, т. е. перенос энергии от мелкомасштабных к крупномасштабным движениям. Такая возможность была впервые указана в работе Онсагера [11] и там же было отмечено, что финальная стадия вырождения двумерной турбулентности может сводиться к образованию когерентной вихревой структуры. Заметим, что в [11] турбулентное движение рассматривалось как движение совокупности точечных вихрей (соответствующее представление поля вихря в виде набора дискретных составляющих позволяет придать уравнениям движения гамильтонову форму и далее использовать методы статистической механики); полученные таким способом результаты относятся также и к так называемой плазме ведущего центра [12] и двумерным задачам, связанным с движением сверхтекучей жидкости [13]. Впоследствии было показано, что эти результаты могут быть получены и чисто гидродинамическим путем [4, 14], в частности, оказалось, что спектр двумерной турбулентности, сводящийся на заключительной стадии вырождения к δ-функции, вытекает непосредственно из некоторого автомодельного решения уравнения Кармана–Ховарта (соответствующие свойства корреляционных функций дополнительно обсуждались в [15]). Образование когерентной системы вихрей на заключительной стадии вырождения двумерной турбулентности было продемонстрировано также экспериментально [8] и путем прямого численного моделирования [9].

Что касается промежуточных стадий вырождения двумерной турбулентности, то принято считать, что наряду с колмогоровским спектром (плотностью энергии в пространстве волновых чисел $\mathbf{k}$), $E(k) \propto k^{-5/3}$, в двумерном случае имеет место также спектр $E \propto k^{-3}$, обязанный своим происхождением потоку среднего квадрата вихря (энстрофии) в $\mathbf{k}$-пространстве (новейший подробный обзор относящихся сюда работ см. в [6]). Иногда рассматривается также и так называемый канонический спектр (a и b — постоянные):

$$E(k) \propto \frac{k}{a + bk^2},$$

который может быть получен, например, представлением турбулентного движения в виде системы гидродинамического типа [16] (для таких систем справедлива теорема Лиувилля) с последующим применением методов статистики. Заметим, однако, что такие системы не могут, вообще говоря, рассматриваться как совокупность невзаимодействующих подсистем, так что интегралы движения не являются аддитивными и поэтому применение к ним методов статистической физики не вполне корректно, а в отношении гидродинамической турбулентности оно приводит часто к абсурдным результатам [17]. Более того, по-видимому, можно утверждать, что всякое моделирование турбулентности (сводящееся, конечно, к моделированию переноса энергии, т. е. фактически нелинейных членов в уравнениях гидродинамики) в двумерном случае является еще менее оправданным, чем в трехмерном. Действительно, в силу отсутствия сглаживающего влияния вязкости при двумерном турбулентном движении (см. далее) нелинейные эффекты доминируют при его эволюции — и любое искажение гидродинамических уравнений в конце концов существенно сказывается на получаемых результатах. В качестве примера упомянем известные результаты работы [18], в которой реализация гипотезы Миллионщикова привела к отрицательным значениям плотности энергии в некотором конечном интервале волновых чисел. Разумеется, такого рода физически бессмысленные результаты приходится устранять добавлением к соответствующим моделям новых эмпирических констант и функций, что выводит их далеко за пределы исходных точных уравнений гидродинамики. С другой стороны, опыт изучения обычной (трехмерной) турбулентности показывает, что все относящиеся к ней результаты были получены чисто гидродинамическим путем при дополнительном использовании лишь соображений размерности и подобия, что, конечно, потребовало подробного экспериментального исследования турбулентного движения. По этим причинам представляется важной реализация подобного подхода и в двумерном случае, хотя какие-либо подробные опытные данные (сопоставимые с таковыми для трехмерной турбулентности) пока отсутствуют. Далее в этой работе обсуждается вопрос о том, каким образом автомодельные спектры двумерной турбулентности связаны с законами сохранения, приводятся соображения относительно направления потоков энергии и энстрофии в **k**-пространстве. Выписываются точные соотношения для третьих моментов и указывается связь между ними и параметрами, относящимися к интервалам автомодельности. Результаты сопоставляются с полученными в последнее время экспериментальными данными.

2. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Основой описания изотропной турбулентности является уравнение Кармана–Ховарта — точное следствие уравнений Навье–Стокса — или эквивалентное ему уравнение для спектра энергии

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t), \qquad (1)$$

где E — спектр энергии, $\int E(k,t)dk = \langle \mathbf{v}^2 \rangle /2$ (плотность жидкости полагается равной единице, угловые скобки отвечают статистическому усреднению), $T(k,t)$ — функция, характеризующая поток энергии в **k**-пространстве и связанная с нелинейными членами в уравнениях движения, ν — вязкость. Уравнение (1) справедливо как в трехмерном, так и двумерном случаях, а все различие между двух- и трехмерной задачей в указанной формулировке сводится к тому, что в добавление к закону сохранения энергии, выражаемому в виде

$$\int\limits_0^\infty T(k,t)dk = 0, \qquad (2)$$

в двумерном случае имеет место (при равной нулю вязкости) закон сохранения энстрофии (среднего квадрата вихря):

$$\int\limits_0^\infty k^2 T(k,t)dk = 0 \qquad (3)$$

(мы здесь используем общепринятую терминологию, на самом же деле соотношения (2) и (3) (в двумерном случае) имеют место независимо от величины вязкости; при $\nu = 0$ они выражают соответствующие законы сохранения). Из (2) очевидно, что $T(k,t)$ как функция от k не может иметь один и тот же знак при всех k; в трехмерном случае она устроена следующим образом: имеется некоторое κ, такое что $T(k,t) \le 0$ при $k \le \kappa$ и $T(k) > 0$ при $k > \kappa$, при этом очевидно, что

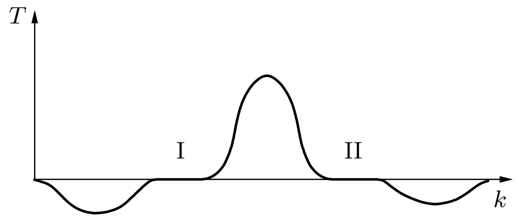
$$\int\limits_0^\infty k^2 T\, dk > 0. \qquad (4)$$

Последнее неравенство соответствует обычным представлениям о передаче энергии от крупномасштабных к мелкомасштабным компонентам, хотя его доказательство или строгое определение условий, при которых оно выполняется, до сих пор неизвестно и представляет собой столь же сложную задачу, как и интегрирование исходных уравнений гидродинамики (рассуждения на эту тему, основанные на представлениях о растяжении вихревых трубок [19], разумеется, не являются строгими). Именно такая форма $T(k)$ подтверждается всеми известными опытными данными, касающимися как лабораторной турбулентности (течения в трубах и каналах, вырождение турбулентности за решеткой и т. д.), так и турбулентных движений в атмосфере и океане.

Переходя теперь к двумерному случаю, легко видеть, что условие (3) исключает подобную форму спектра. Действительно, если предположить, что $T(k)$ меняет знак в некоторой точке κ, то в силу теоремы о среднем имеем

$$\begin{gathered} \int\limits_0^\kappa T\, dk + \int\limits_\kappa^\infty T\, dk = 0, \\ p^2 \int\limits_0^\kappa T\, dk + q^2 \int\limits_\kappa^\infty T\, dk = 0, \end{gathered} \qquad (5)$$

где $p < \kappa$ и $q > \kappa$. Поскольку система (5) при отличных от нуля значениях интегралов несовместна, такая форма спектра невозможна и функция $T(k)$ меняет знак более чем один раз. Таким образом, в этом случае простейший выбор соответствует двукратному изменению знака функции $T(k)$; схематический вид ее приведен на рисунке. Легко видеть, что условиям (2) и (3) удовлетворяет также функция, симметричная изображенной на рисунке относительно оси k, т. е. $-T(k)$. Как и в трехмерном случае, теоретический выбор между $T(k)$ и $-T(k)$ не



Схематический вид функции $T(k)$

представляется возможным — он может быть реализован только при анализе опытных данных.

Далее, поскольку решения двумерных гидродинамических уравнений с $\nu \to 0$ переходят в решения с $\nu = 0$ [2], можно для простоты опустить последний член в правой части (1). Интегралы

$$\varepsilon(z) = \int_0^z T\,dk, \quad \varepsilon_\omega(z) = \int_0^z k^2 T\,dk, \tag{6}$$

как легко видеть, дают изменение соответственно энергии и энстрофии в единицу времени в интервале $[0, z]$ в **k**-пространстве. В областях I и II, выделенных на рисунке, эти интегралы не зависят от z, и, таким образом, для соответствующих участков спектра $E(k)$ может быть использована гипотеза автомодельности (заметим, что наличие таких горизонтальных участков, вдоль которых $T(k) = 0$, вообще является необходимым условием колмогоровской автомодельности [6]). Согласно этой гипотезе спектр $E(k)$ определяется комбинацией одной из величин (6) и волнового числа k, имеющей нужную размерность, причем выбор ε или ε_ω зависит от того, какая из этих величин является доминирующей. В отличие от обычного подхода [20], при котором делаются произвольные предположения относительно того, на каком конце инерционного интервала существен тот или другой параметр, здесь такой выбор будет определен однозначно. Величины ε и ε_ω, имеющие разные размерности, нельзя, разумеется, сравнивать непосредственно. Рассмотрим поэтому безразмерное отношение

$$\varphi = |\varepsilon_\omega|\lambda^2/|\varepsilon|, \tag{7}$$

где λ — масштаб турбулентного движения (определяемый поведением корреляционных функций на малых расстояниях):

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^\infty E\,dk}{\int_0^\infty k^2 E\,dk},$$

причем из уравнения движения (1) с $\nu = 0$ и соотношений (2), (3) видно, что эта величина не зависит от времени. Теперь из (7) очевидно, что при $\varphi \ll 1$ доминирующее влияние на спектр оказывает величина ε, а при $\varphi \gg 1$ — величина ε_ω. Из самого вида функции $T(k)$ следует, что возможно только (за счет наличия множителя k^2 в подынтегральном выражении для ε_ω)

$$\varphi \ll 1 \quad \text{в области I},$$

$$\varphi \gg 1 \quad \text{в области II}.$$

Составляя, как и обычно, безразмерные комбинации, содержащие k и, соответственно, ε и ε_ω, имеем

$$\begin{aligned} E(k) &\propto |\varepsilon|^{2/3} k^{-5/3} \quad \text{в области I}, \\ E(k) &\propto |\varepsilon_\omega|^{2/3} k^{-3} \quad \text{в области II}. \end{aligned} \tag{8}$$

При этом потоки энергии и энстрофии имеют одинаковое направление: для выбранного нами вида $T(k)$ они оба положительны в области I (энергия и энстрофия передаются от больших масштабов к малым) и отрицательны в области II; легко видеть, что такая картина соответствует концентрации энергии турбулентного движения в интервале, лежащем между I и II, и росту пика $E(k)$ в этом интервале. Разумеется, изменение знака $T(k)$ привело бы к противоположному результату — увеличивалась бы энергия в областях слева от I и справа от II. В силу того, что первая из них ограничена слева точкой $k = 0$, это может приводить к образованию пика $E(k)$ уже в окрестности $k = 0$, так что вывод об образовании узкого пика на кривой $E(k)$, вообще говоря, не зависит от того, возьмем ли мы функцию $T(k)$, изображенную на рисунке, или симметричную ей относительно оси k.

Необходимо отметить, что пренебрежение вязким затуханием фактически должно выражаться неравенствами

$$2\nu \int k^2 E\,dk \ll |\varepsilon|, \quad 2\nu \int k^4 E\,dk \ll |\varepsilon_\omega|,$$

которые в силу указанных выше причин могут выполняться в двумерном случае, но никогда не выполняются в трехмерном из-за так называемой катастрофы энстрофии,

$$\lim_{\nu\to 0}\nu\int_0^\infty k^2 E\,dk \neq 0,$$

последнее делает диссипацию энергии единственной величиной, определяющей автомодельность инерционного участка спектра трехмерной турбулентности.

В заключение этого раздела укажем, что полное экспериментальное подтверждение существования в двумерном случае спектров k^{-3} и $k^{-5/3}$ отсутствует. Указание на возможную их реализацию можно найти в [21], где исследовалось двумерное движение, инициированное магнитным полем. Прямое численное моделирование двумерной турбулентности, основанное на точных уравнениях гидродинамики, также не позволяет получить эти спектры, во всяком случае, одновременно; по-видимому, причиной этому является недостаточность значений чисел Рейнольдса, при которых вычисления могут быть реализованы. С другой стороны, указанные спектры часто реализуются (одновременно) в различных модельных вычислениях, при которых соответствующие числа Рейнольдса имеют порядок 10^7 и более (см. обзор соответствующих работ в [6]). Можно утверждать, таким образом, что наличие у двумерной турбулентности обсуждаемых автомодельных спектров нуждается еще в серьезном экспериментальном подтверждении.

3. АНОМАЛИИ ТРЕТЬИХ МОМЕНТОВ ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Как известно, дальнейшее применение колмогоровских гипотез о локальной структуре позволяет в трехмерном случае получить, помимо спектра, не только качественные, но и количественные характеристики вторых и третьих моментов поля скорости [5, 6], весьма удовлетворительно согласующиеся с опытными данными. Эта возможность связана с существованием величины (среднего значения диссипации кинетической энергии турбулентного движения), определяющей динамику вырождения в целом. Формально это выражается тем обстоятельством, что в левой части уравнения для структурной функции поля скорости D_{LL} (далее использованы обычные обозначения: корреляционные функции

$$B_{LL}(r) = \langle u_L(\mathbf{x})u_L(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle,$$

$$B_{LL,L}(r) = \langle u_L(\mathbf{x})u_L(\mathbf{x})u_L(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle,$$

u_L — компонента скорости вдоль прямой, соединяющей точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}+\mathbf{r}$; структурные функции $D_{LL}(r) = 2[B_{LL}(0) - B_{LL}(r)]$, $D_{LLL}(r) = 6B_{LL,L}(r)$) фигурирует разность величин $\partial B_{LL}/\partial t$ и $(1/2)\partial D_{LL}/\partial t$, причем, согласно гипотезе Колмогорова, вторая из них в инерционном интервале равна нулю. Более точно, следует утверждать [5], что

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\partial D_{LL}(r,t)}{\partial t}\right| \ll \left|\frac{\partial B_{LL}(0,t)}{\partial t}\right| = \frac{2}{3}|\varepsilon|. \tag{9}$$

В двумерном же случае в силу указанных выше причин величина диссипации не может определять динамику вырождения, и возможность пренебречь ею (вместе с вязкостью) приводит к тому, что в левой части соответствующего уравнения все равно остается производная D_{LL} по времени. В этой ситуации, следовательно, можно сразу рассматривать уравнение для B_{LL}, которое имеет вид [7]

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r}\right) B_{LL,L}. \tag{10}$$

Каждый из двух участков инерционного интервала (соответствующих спектрам $k^{-5/3}$ и k^{-3}) характеризуется соответственно величинами ε и ε_ω; комбинируя их с самой величиной r с целью получить ту же размерность, что и $\partial B_{LL}/\partial t$, переходим от (10) к следующим уравнениям (C_1, C_2 — положительные безразмерные постоянные):

$$\begin{aligned} C_1\varepsilon &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r}\right) B_{LL,L} \quad \text{в области I,}\\ C_2\varepsilon_\omega r^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r}\right) B_{LL,L} \quad \text{в области II.} \end{aligned} \tag{11}$$

Умножая (11) на r^3 и интегрируя с учетом условия $B_{LL,L}(0,t) = 0$, получим

$$\begin{aligned} B_{LL,L} &= \frac{C_1}{4}\varepsilon r \quad \text{в области I,}\\ B_{LL,L} &= \frac{C_2}{6}\varepsilon_\omega r^3 \quad \text{в области II.} \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, зависимость $B_{LL,L}$ от r (а с ней и $D_{LLL}(r)$) в области, определяемой потоком энергии, сводится к линейной, как это имеет место и в трехмерном случае. В интервале обратного потока энстрофии соответствующая зависимость оказывается кубической — результат, полученный в [22] другим методом. Однако, в отличие от трехмерного случая, из (12) следует, что интервалам I и II соответствуют противоположные знаки третьего момента (напомним, что величины ε и ε_ω имеют разные знаки, как следует из (2), (3)). В частности, соотношения (12) показывают, что для принятой нами формы $T(k)$ получается $B_{LL,L} < 0$ в области I и $B_{LL,L} > 0$ в области II. Поскольку большим значениям волнового вектора соответствуют меньшие значения r, функция $B_{LL,L}$ должна быть положительной в некотором интервале и становится отрицательной справа от этого интервала, причем положительные значения $B_{LL,L}$ соответствуют спектру k^{-3}, а отрицательные — спектру $k^{-5/3}$. Такая картина резко отличается от поведения третьего момента в трехмерном случае, где он является отрицательным во всем инерционном интервале.

Описанная выше аномалия действительно наблюдалась в недавних экспериментах [23] с тонкой жидкой пленкой, пропущенной через двумерную решетку. При этом большим положительным значениям третьего момента соответствует спектр, близкий к k^{-3}. Однако в этих исследованиях не наблюдался участок спектра $k^{-5/3}$, что связано, по-видимому, как с недостаточностью значений числа Рейнольдса (порядка нескольких сотен), так и с тем, что наибольшие масштабы длины в интервале k^{-3} уже были порядка внешнего масштаба турбулентности.

Полученные выше результаты тесно связаны с принятым предположением о характере изменения знака функции $T(k)$. Действительно, используя с той же целью функцию $-T(k)$, также удовлетворяющую законам сохранения (2), (3), мы получили бы, во всяком случае, $B_{LL,L} < 0$ в интервале со спектром k^{-3}. Поэтому необходимо убедиться, что сделанный выбор (а также использованные соображения подобия) соответствуют реальной ситуации. Поскольку в [23] получены данные для третьего момента также при самых малых r, лежащих вне инерционного интервала, можно сравнить с ними D_{LLL} (или, что то же, $B_{LL,L}$), связанную при малых значениях r с $T(k)$ некоторым точным соотношением. Переходя к его выводу, заметим предварительно, что при выбранном нами чередовании знаков функции $T(k)$ в силу (2), (3) выполняется неравенство

$$\int_0^\infty k^4 T\,dk < 0,$$

которое понадобится ниже. Для его доказательства рассмотрим функцию

$$S(z) = \int_0^R T\,dk,$$

для которой из ее определения и соотношений (2), (3) следуют следующие утверждения:

$$S(0) = S(\infty) = 0, \quad \int_0^\infty kS\,dk = 0,$$

$$\int_0^\infty k^4 T\,dk = -4\int_0^\infty k^3 S\,dk.$$

Поскольку S, как легко видеть, меняет свой знак только один раз, причем с отрицательного на положительный, по теореме о среднем последний интеграл положителен, так что доказываемое утверждение вытекает из последнего из указанных равенств.

Далее, для вывода искомого соотношения следует связать корреляционный тензор $B_{lm,n}(r)$ с его фурье-образом, выраженным через единственную скалярную функцию $F_3(k)$ [6]:

$$B_{lm,n} = i\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} F_3\left(\frac{\delta_{mn}k_l}{k} + \frac{\delta_{ln}k_m}{k} - \frac{2k_l k_m k_n}{k^3}\right) d\mathbf{k}.$$

Используя теперь тождество

$$\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} k_l F(k) d\mathbf{k} = -\frac{i\partial}{\partial r_l}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} F(k) d\mathbf{k},$$

выражая тензор $B_{lm,n}$ через компоненту $B_{LL,L}$ (соответствующее соотношение для двумерного случая имеется в [4]) и интегрируя по угловой переменной с учетом тождества

$$\int_0^\pi e^{ikr\cos\theta} d\theta = \pi J_0(kr),$$

после сравнительно простых, но громоздких вычислений, получим

$$B_{LL,L} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\frac{J_0''}{kr} - \frac{J_0'}{(kr)^2}\right]\frac{T(k)}{k}\,dk \qquad (13)$$

(в двумерном случае $T(k) = 4\pi k^2 F_3$), где штрих отвечает производной функции Бесселя J_0 по ее аргументу. Разлагая J_0 в ряд по степеням kr, получим из (13)

$$B_{LL,L} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\frac{kr}{8} - \frac{(kr)^3}{96} + \frac{3(kr)^5}{16(4!)^2} - \ldots\right]\frac{T(k)}{k}\,dk,$$

что из-за наличия двух (а не одного, как в трехмерной гидродинамике) законов сохранения (2) и (3) приводит к тому, что первый неисчезающий член разложения $B_{LL,L}$ (имеющий здесь пятый порядок по r) принимает вид

$$B_{LL,L} = \frac{r^5}{3 \cdot 2^{11}} \int_0^\infty k^4 T\, dk. \tag{14}$$

Поскольку интеграл в правой части (14) отрицателен, отрицательной должна быть при малых r и функция $B_{LL,L}(r)$. Последнее, действительно, имеет место на опыте [23]. Таким образом, полученные выше результаты не только соответствуют известным экспериментальным данным, но и позволяют с помощью последних установить возможную форму функции $T(k)$, характеризующей важнейшее свойство турбулентного движения — перенос энергии в пространстве волновых чисел.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечисленные выше результаты показывают, что представления о локальной структуре поля скорости двумерного турбулентного движения, основанные на гипотезах Колмогорова, полностью соответствуют полученным к настоящему времени экспериментальным данным. При этом, однако, непосредственное применение этих гипотез сопровождается необходимостью сделать определенное предположение относительно чередования знаков функции $T(k)$ (совершенно аналогично тому, как это имеет место в трехмерном случае). В связи с этим необходимо отметить, что реализованное выше решение этой проблемы (обычно не обсуждаемой в литературе) отнюдь не представлялось очевидным. В частности, в работе [24], где было осуществлено подробное численное моделирование двумерной турбулентности, функция $T(k)$, как модельная, так и полученная прямым численным решением гидродинамических уравнений, имела как раз такой вид, что первый ее экстремум был положительным. Интервалы автомодельности спектра обнаружены не были (ни $k^{-5/3}$, ни k^{-3}), а обратный поток энергии имел место, разумеется, в окрестности $k = 0$. Выше мы убедились, однако, что такая картина ни в какой степени не соответствует полученным в последнее время экспериментальным данным. Представляется, в частности, неясным, почему к такому виду $T(k)$ приводит численное интегрирование уравнений гидродинамики — из-за неточности вычислений или использования специального вида граничных условий (периодических), которые не реализуются на опытах. Открытым поэтому остается вопрос о том, можно ли в двумерном случае наблюдать следствия (например, отрицательность третьего момента) такого вида функции $T(k)$. Уже сама постановка такого рода касающихся двумерной турбулентности вопросов (на которые в трехмерном случае имеются вполне определенные ответы) указывает на то, что относящиеся к ней результаты, в том числе и полученные здесь, пока не могут считаться исчерпывающими. Они могут стать таковыми при сопоставлении с данными опытов, в которых, возможно, будут достигнуты гораздо более высокие значения чисел Рейнольдса, чем это имеет место в настоящее время.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1961).
2. Д. Эбин, Дж. Марсден, *Группы диффеоморфизмов и движение несжимаемой жидкости*, в сб. Математика, № 5–6, Мир, Москва (1973).
3. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва (1974).
4. А. Л. Цескис, Механика жидкости и газа № 5, 19 (1987).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
6. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, Гидрометеоиздат, Санкт-Петербург (1996).
7. В. А. Битюрин, А. Л. Цескис, ЖЭТФ **111**, 528 (1997).
8. Y. Couder, J. de Phys. Lett. **45**, 353 (1984).
9. P. Dmitruk, D. Gomes et al., Phys. Rev. E **54**, 2555 (1996).
10. H. Brands, S. R. Maassen, and H. J. H. Clercx, Phys. Rev. E **60**, 2864 (1999).
11. L. Onsager, Nuovo Cim. Suppl. **6**, 279 (1949).
12. C. E. Seiler, Y. Salu et al., Phys. Fluids **18**, 803 (1975).
13. D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, Phys. Rev. Lett. **39**, 1201 (1977).
14. А. Л. Цескис, ЖЭТФ **83**, 176 (1982).
15. A. L. Tseskis, Progr. Astron. and Aeron. **182**, 183 (1998).
16. А. М. Обухов, ДАН СССР **184**, 309 (1969).

17. G. F. Carnevale, J. Fl. Mech. **122**, 143 (1982).

18. Y. Ogura, J. Fl. Mech. **16**, № 1, 33 (1963).

19. G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A **164**, № 918, 15 (1938).

20. G. K. Batchelor, Phys. Fluids Suppl. **12**, 233 (1969).

21. Ю. Б. Колесников, А. Б. Цинобер, Механика жидкости и газа № 4, 146 (1974).

22. G. Falkovich and V. Lebedev, Phys. Rev. E **49**, R1800 (1994).

23. A. Belmonte, W. I. Goldburg et al., Phys. Fluids **11**, 1196 (1999).

24. J. R. Herring, S. A. Orszag et al., J. Fl. Mech. **66**, 417 (1974).