

ДИФфуЗИЯ В ГЛАДКИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

*В. В. Вечеславов**, *Б. В. Чириков***

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 6 сентября 2001 г.

Исследуется семейство моделей, заданное гладким каноническим $2D$ -отображением, зависящим от двух параметров. Представлены предварительные результаты численных экспериментов, которые демонстрируют существенное подавление глобальной диффузии в широкой области значений величины возмущения за счет мало известного явления сохранения сепаратрис резонансов и других инвариантных кривых в условиях сильного локального хаоса движения. Такое общее подавление диффузии имеет место, несмотря на то что инвариантные кривые сохраняются лишь для счетного множества значений параметра нулевой меры. Получены и подтверждены численно простые уточненные оценки для скорости диффузии в гладких системах без инвариантных кривых. Найдено полуэмпирическое выражение в безразмерных переменных для основной границы подавления диффузии в семействе моделей с инвариантными кривыми. Проведен статистический анализ результатов и получено интегральное распределение вероятности подавления диффузии.

PACS: 05.45.+b

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных представлений современной теории нелинейных гамильтоновых систем является утверждение о том, что расщепление сепаратрисы нелинейного резонанса и образование на ее месте хаотического слоя в типичной (т. е. неинтегрируемой) системе происходят при почти любом возмущении. Считается также, что именно сепаратрисы разрушаются в первую очередь, поскольку период движения по ним бесконечен и взаимодействие нелинейных резонансов в их окрестности всегда существенно (см., например, [1–4]). По мере роста возмущения разрушаются и исчезают инвариантные кривые (поверхности), что, как правило, приводит к перекрытию хаотических слоев всех резонансов и возникновению так называемого «глобального» хаоса.

Условия образования глобального хаоса и возможность диффузии по всей единой хаотической компоненте в фазовом пространстве зависят не только от величины, но и от гладкости возмущения. Последнюю удобно характеризовать скоростью убыва-

вания фурье-амплитуд. Аналитическое возмущение убывает экспоненциально. При этом всегда существует пороговая величина возмущения ε_{tr} и глобальная диффузия возникает лишь при $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{tr}$. Если же $\varepsilon \lesssim \varepsilon_{tr}$, то хаос локализован в относительно узких хаотических слоях (которые образуются при любом значении $\varepsilon > 0$) и глобальная диффузия при числе степеней свободы консервативной системы $\mathcal{N} \leq 2$ невозможна.

Заметим, что при $\mathcal{N} > 2$ глобальная диффузия может иметь место только при специальных начальных условиях (диффузия Арнольда, см., например, [1]). Скорость этой диффузии и мера ее области при $\varepsilon \rightarrow 0$ убывают экспоненциально по параметру $1/\varepsilon$.

Характер движения существенно изменяется для гладкого возмущения гамильтониана, фурье-амплитуды которого убывают как некоторая степень $\beta + 1$ их номера n (см., например, [5] и ссылки там). В простейшем случае $2D$ -отображения, которым мы и ограничимся в настоящей работе, порог $\varepsilon_{tr} > 0$ возникновения глобального хаоса всегда существует при $\beta > \beta_{cr} = 3$. Это значение критической гладкости получено из простой оценки в [5] (см. также разд. 3 настоящей работы), однако оно еще требу-

*E-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

**E-mail: chirikov@inp.nsk.su

ет проверки в численных экспериментах. Насколько нам известно, строгое доказательство удалось получить только для $\beta_{cr} = 5$ (см. работу [6], где было высказано предположение, что на самом деле $\beta_{cr} = 4$). В настоящей работе такая неопределенность несущественна, поскольку для рассматриваемой нами модели (разд. 2) неравенство $\beta = 2 < \beta_{cr}$ заведомо выполняется. Интересно отметить, что именно для значения показателя $\beta = 2$ ситуация долгое время оставалась неясной.

Уже в ранних численных экспериментах с системами, гладкость которых ниже критической, наряду с глобальной диффузией наблюдались случаи, когда траектории в течение длительного времени счета не выходили за пределы некоторой ограниченной части фазового пространства [7, 8]. Однако это было не более чем подозрение на подавление или ослабление диффузии. Строгий результат был получен Булитом [9], который для симметричного кусочно-линейного $2D$ -отображения (СКЛО, $\beta = 2$, см. (2.1), (2.2) ниже) доказал существование глобальных инвариантных кривых как с иррациональными, так и с рациональными числами вращения (см. также [10] и разд. 2). Именно глобальные инвариантные кривые имеют полную протяженность по фазе, что исключает неограниченную диффузию по действию. В работе [9] впервые было найдено, что среди инвариантных кривых с рациональными числами вращения присутствуют также (при специальных значениях параметра возмущения) неразрушенные сепаратрисы нелинейных резонансов. Особенно важным и неожиданным оказалось то, что система при этом не становится интегрируемой, однако сепаратриса не только сохраняется в условиях сильного хаоса, но и исключает глобальную диффузию.

Для той же самой модели аналогичная теорема позже была доказана Овсянниковым [11]. Он не только указал счетное множество значений параметра, при которых сепаратриса целого резонанса сохраняется, но и нашел для нее явное (и очень простое) выражение. Хотя Овсянников доказал свою теорему независимо, такое совпадение моделей не случайно, поскольку решение линейного (хотя бы и кусочно) отображения существенно упрощает задачу. Отметим, что полное решение даже линейного отображения возможно только при сохранении сепаратрисы, так как в противном случае две ветви расщепленной сепаратрисы образуют случайные траектории. По этой же причине модель СКЛО не может быть упрощена до чисто линейного отображения типа отображения Арнольда, в котором сепаратрисы нелинейных резонансов всегда расщеплены. Поэто-

му математические работы Булита и Овсянникова ограничены исследованием только самих инвариантных кривых нового типа, первые примеры которых были предсказаны в [10].

Именно теорема Овсянникова послужила для нас толчком к интенсивному исследованию СКЛО и его модификаций [12–15]. К сожалению, эта теорема не была опубликована автором (ее полный текст содержится в приложении к работе [14]). Вместо этого в [16] теорема была обобщена на произвольные значения параметра отображения, что противоречит результатам работы [9] и нашим численным экспериментам.

Каждой инвариантной кривой в СКЛО (в том числе нового типа с рациональным числом вращения, включая сепаратрисы целых и дробных резонансов) отвечает определенное значение параметра возмущения. Множество всех таких чисел является канторовым (см. рис. 2, 3 в [9]), и имеются интервалы значений параметра, где глобальная диффузия определенно имеет место (один такой интервал прямо указан в [9], см. также разд. 5 ниже). Поскольку плотность этого множества достаточно высока, можно ожидать сильного (хотя и не полного) подавления глобальной диффузии при любом значении параметра возмущения. Исследованиям в этом направлении и посвящена настоящая работа.

2. МОДЕЛЬ

Выбранная модель является двумерным отображением в канонических переменных действие p –фаза x :

$$\bar{p} = p + Kf(x), \quad \bar{x} = x + \bar{p} \pmod{1}. \quad (2.1)$$

Здесь $K = \varepsilon > 0$ — параметр возмущения (не обязательно малый), а «сила» $f(x)$ имеет форму антисимметричной ($f(-y) = -f(y)$, $y = x - 1/2$) кусочно-линейной «пилы» с периодом 1.

Мы будем исследовать сразу целое семейство пилообразных возмущений¹⁾ (см. рис. 1 в [15]):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1-d}, & \text{если } |x| \leq \frac{1-d}{2}, \\ -\frac{2y}{d}, & \text{если } |y| \leq \frac{d}{2}, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $y = x - 1/2$, а $0 \leq d \leq 1$ — расстояние между «зубьями» пилы $|f(x)| = 1$, расположенными в точках

¹⁾ Аналогичное, но не идентичное модели в [9].

$y = y_{\pm} = \pm d/2$. Наиболее изученный частный случай СКЛО соответствует значению параметра перекоса $d = 1/2$.

Нас интересует глобальная диффузия по импульсу, которая подавляется инвариантными кривыми, имеющими полную протяженность по фазе. Мы называем такие инвариантные кривые глобальными и в дальнейшем будем иметь в виду только их, если это не оговорено специально. Заметим, что эти инвариантные кривые (в том числе неразрушенные сепаратрисы целых и дробных резонансов) при специальных значениях K существуют для любой величины параметра перекоса из интервала $0 < d < 1$ [9, 12–15].

При $0 < d < 1$ сила (2.2) может быть представлена в виде ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{n^{\beta}} \sin(2\pi n x), \quad (2.3)$$

где

$$f_n = -\frac{2}{\pi^2} \frac{\cos(n\pi) \sin(n\pi d)}{d(1-d)}, \quad \beta = 2. \quad (2.4)$$

Из последних формул предельным переходом для разрывной пилы $d \rightarrow 0$ получаем

$$f_n = -\frac{2}{\pi} \cos(n\pi), \quad \beta = 1. \quad (2.5)$$

Видно, что показатель гладкости системы β в пределе $d = 0$ на единицу меньше его значения внутри интервала и оба они меньше критической величины $\beta_{cr} = 3$. Второй предел $d \rightarrow 1$ в данной работе не рассматривается, поскольку движение при этом становится регулярным (см. [15]).

Отображение (2.1) может быть представлено в виде непрерывной системы с гамильтонианом, явно зависящим от времени, и возмущением в форме толчков [1–3, 14]:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + K \sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{2\pi n^{\beta+1}} \cos(2\pi n x) \delta_1(t), \quad (2.6)$$

где

$$\delta_1(t) = 1 + 2 \sum_{m \geq 1} \cos(2\pi m t)$$

обозначает δ -функцию с периодом 1. Отметим, что выбор δ -функции в указанном виде фиксирует также единицу времени непрерывной системы, которая равна одной итерации исходного отображения.

Каждое из слагаемых двойной суммы в (2.6) пропорционально $\cos[2\pi(nx - mt)]$ с целыми m, n и определяет «свой» первичный нелинейный резонанс (подробности см., например, в [1]). В предположении,

что эти резонансы не взаимодействуют друг с другом, любой из них описывается гамильтонианом «маятника»

$$H_{nm}(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \frac{K f_n}{2\pi n^{\beta+1}} \cos[2\pi(nx - mt)]. \quad (2.7)$$

Если ввести резонансное значение импульса $p_{nm} = \dot{x}_{nm} = m/n$, то в новых переменных $\tilde{x} = nx - mt$ и $\tilde{p} = (p - p_{nm})/n$ каждый такой одиночный резонанс оказывается консервативной системой со строго ограниченным по импульсу движением. Возвращаясь к старым переменным, определяем частоту фазовых колебаний

$$\Omega_n^2 = \frac{2\pi K f_n}{n^{\beta-1}} \quad (2.8)$$

и полную ширину резонанса по импульсу

$$(\delta p)_n = 4 \sqrt{\frac{K f_n}{2\pi n^{\beta+1}}}. \quad (2.9)$$

В следующем разделе приведенные здесь соотношения будут использованы для получения весьма простых и неожиданно аккуратных оценок скорости диффузии для гладкого отображения без инвариантных кривых.

3. ОЦЕНКИ СКОРОСТИ ДИФФУЗИИ

Наши оценки основаны на критерии перекрытия нелинейных резонансов (см. [1–3, 5]), который в простейшей форме имеет вид

$$\mathcal{P} \sim 1, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\sim \sum_{n \geq 1} n (\delta p)_n = 4 \sqrt{\frac{K f_0}{2\pi}} \mathcal{S}, \\ \mathcal{S} &= \sum_{n \geq 1} n^{(1-\beta)/2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь \mathcal{P} — приближенная сумма ширин (2.9) всех первичных резонансов в единичном интервале по импульсу p . Для простоты мы положили, что все коэффициенты Фурье равны $f_n = f_0$.

Отметим, что сумма расходится при $\beta \leq 3$, этим определяется указанное выше значение критической гладкости $\beta_{cr} = 3$ в рассматриваемом приближении. В этом случае глобальная диффузия происходит при любом K , в том числе и при $K \rightarrow 0$, а ее скорость зависит, вообще говоря, от всех резонансов (2.7) и описывается сложными и громоздкими

выражениями (ср. [17]). Наши простые оценки основаны, как и в работе [5], на следующей гипотезе, которая представляется нам физически правдоподобной и подтверждается приведенными ниже численными экспериментами. Мы предполагаем, что средняя скорость глобальной диффузии при $\beta \leq 3$ определяется, в основном, конечным числом резонансов вплоть до некоторой критической гармоники $n = n_c$, которые (в комбинации с разными значениями m в (2.7)) и обеспечивают перекрытие (3.1). Действительно, более сильные резонансы ($n < n_c$) вызывают более быструю диффузию, однако она является локальной из-за неполного перекрытия резонансов. С другой стороны, более слабые резонансы ($n > n_c$) обеспечивают перекрытие с избытком, однако скорость диффузии на них

$$D = \frac{\overline{(\delta p)^2}}{t} \sim \frac{(\delta p)_n^2 \Omega_n}{2\pi} \quad (3.3)$$

быстро падает с ростом n . Здесь в качестве динамических масштабов диффузии выбраны полная ширина резонанса (2.9) и период фазовых колебаний на нем $2\pi/\Omega_n$ (см. (2.8)).

Заменяя сумму в (3.2) интегралом по $n \gg 1$, получаем

$$S \approx \frac{2}{3-\beta} n^{(3-\beta)/2}. \quad (3.4)$$

Из (3.2) следует, что номер критической гармоники равен

$$n_c \sim \left[\frac{\pi (3-\beta)^2}{32 K f_0} \right]^{1/(3-\beta)}. \quad (3.5)$$

Наконец, из (3.3) находим скорость диффузии

$$D_{\beta < 3}(K) \sim \frac{4\sqrt{2\pi}}{\pi^2} \left(\frac{32}{\pi(3-\beta)^2} \right)^{(3\beta+1)/2(3-\beta)} \times (K f_0)^{5/(3-\beta)}. \quad (3.6)$$

В общем случае это выражение дает лишь оценку по порядку величины. Однако мы сознательно оставляем в нем различные численные коэффициенты, рассчитывая существенно улучшить точность этой оценки путем введения эмпирических поправочных множителей. Это будет сделано в следующем разделе при рассмотрении простого и хорошо изученного примера такой диффузии.

Отметим, что все полученные оценки справедливы только при $K \ll 1$. Это связано с тем, что диф-

фузия в рассматриваемой системе имеет, как отмечалось выше, два динамических масштаба:

$$(\delta p)_c \sim 4\sqrt{\frac{K f_0}{2\pi n_c^{\beta+1}}} \sim K^{2/(3-\beta)} \lesssim 1 \quad (3.7)$$

— по импульсу (2.9) и

$$t_c \sim \sqrt{\frac{2\pi n_c^{\beta-1}}{K f_0}} \sim K^{-1/(3-\beta)} \gtrsim 1 \quad (3.8)$$

— по времени (из (2.8)). Оба масштаба ограничены из-за периодичности p и дискретности t . Отсюда следует ограничение по параметру системы:

$$K \lesssim 1. \quad (3.9)$$

Такое же ограничение возникает и из условия на критическую гармонику (3.5): $n_c \gtrsim 1$. При $K \ll 1$ время затухания корреляций возмущения $t_c \gg 1$, при $K \sim 1$ это время сокращается до $t_c \sim 1$, а при $K \gg 1$ корреляции между соседними толчками становятся вообще пренебрежимо малыми. В последнем случае скорость диффузии определяется среднеквадратичным возмущением:

$$D_{K \rightarrow \infty} = K^2 \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{K^2}{3} \quad (3.10)$$

и для всего семейства отображений (2.1), (2.2) не зависит от параметра перекоса d .

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ДЛЯ МОДЕЛИ БЕЗ ИНВАРИАНТНЫХ КРИВЫХ

Рассмотрим вначале простейший пример гладкого $2D$ -отображения, который соответствует в семействе (2.2) параметру $d = 0$. В [15] показано, что в этом предельном случае инвариантные кривые полностью отсутствуют и глобальная диффузия происходит при любом положительном $K > 0$. Диффузия в такой модели была подробно исследована численно и аналитически в довольно старой работе [17]. Заметим, что нормировки как скорости диффузии, так и параметра возмущения K в этой работе и у нас различаются, поэтому ниже приводятся данные из работы [17], пересчитанные к нашей модели.

Подставляя в формулу (3.6) $\beta = 1$ и $f_0 = 2/\pi$ (см. (2.5)), имеем $D_{\beta=1}(K) = 0.84K^{2.5}$. При этом зна-

чение, полученное в [17] численным методом, равно (после пересчета)

$$D_1(K) = A_1 K^{B_1} = C_D D_{\beta=1}(K),$$

$$A_1 = 0.5680 \pm 0.0034, \quad (4.1)$$

$$B_1 = 2.4940 \pm 0.0008,$$

где поправочный коэффициент к скорости диффузии $C_D = 0.68$. В дальнейшем мы принимаем $B_1 = 2.5$, как это сделали авторы [17] при сравнении со своей теорией.

Поправка C_D к нашей теоретической оценке невелика, однако она очень сильно зависит от показателя гладкости β . Покажем это на примере $\beta = 2$. Из (3.6) имеем $D_{\beta=2}(K) = 1199K^5$, а численно рассчитанное значение (см. (5.1) и рис. 2 ниже) $D_2(K) \approx 0.8K^5$. Сравнение этих чисел дает поправочный коэффициент $C_D = 6.7 \cdot 10^{-4}$ (!). Такое значение лишает его разумного физического смысла.

Это связано с тем, что главное приближение при построении оценок связано не непосредственно со скоростью диффузии D , а с промежуточным результатом при формулировке условия перекрытия резонансов (3.1), (3.2). В таком виде это условие всегда переоценивает эффект перекрытия, поскольку в него входят максимальные ширины сепаратрис резонансов, тогда как на деле сепаратрисы могут иметь взаимные сдвиги по фазе. Для учета этого важного обстоятельства следует вместо C_D ввести другую поправку C_s в виде

$$P = C_s > 1. \quad (4.2)$$

Существенное отличие от поправки C_D в (4.1) состоит в том, что новая поправка C_s возводится в некоторую степень, которая зависит от β и может быть весьма большой:

$$D_{\beta < 3}(K) \approx \frac{4\sqrt{2}\pi}{\pi^2} \left(\frac{32}{\pi(3-\beta)^2 C_s^2} \right)^{(3\beta+1)/2(3-\beta)} \times (Kf_0)^{5/(3-\beta)}. \quad (4.3)$$

Для того чтобы получить $C_D \approx 1$ для обсуждаемого случая $\beta = 2$, достаточно взять $C_s \approx 2.84$ (см. (5.1)). Это показывает высокую эффективность такого способа введения эмпирической поправки в оценки по порядку величины.

Для значения $\beta = 1$ соответствующая поправка значительно меньше: $C_s \approx 1.2$. Причина этого заключается в данном случае в том, что при $\beta = 1$ спектр возмущения содержит все гармоники, тогда как при $\beta = 2$ остаются только нечетные гармоники. В результате, сумма (3.2) уменьшается в два раза.

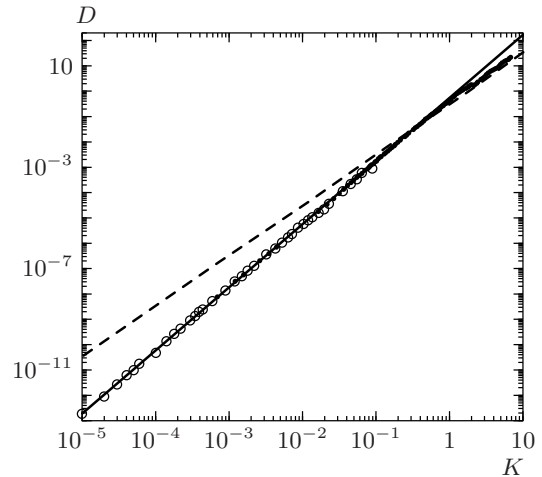


Рис. 1. Скорость диффузии $D(K)$ в модели (2.2) с параметром $d = 0$ (без инвариантных кривых): точки — данные [17]; кружки — наши данные, среднее по 250 траекториям со случайными начальными условиями по $t_0 = 4 \cdot 10^7$ итераций каждая. Сплошная прямая — степенная зависимость (4.1), штриховая — предельный режим (3.10)

Этот дополнительный эффект легко учесть в (4.3) заменой $C_s \rightarrow 2C_s$. Необходимая величина поправки для $\beta = 2$ снижается при этом с 2.84 до 1.42. Это значение близко к указанному выше значению $C_s \approx 1.2$ для $\beta = 1$.

На рис. 1 представлены основные результаты исследования простейшей модели с $d = 0$, а также найденная в [17] подгоночная прямая (4.1), которая также неплохо описывается нашей простой теорией (4.3) с поправкой $C_s = 1.2$. Оба выражения хорошо согласуются с эмпирическими данными вплоть до значения $K \sim 1$, при котором происходит переход к режиму (3.10).

В [17] численные данные сравнивались с весьма сложной теорией авторов, которая также основана на концепции перекрытия резонансов (точнее, их разрушенных сепаратрис). В этой теории нет никаких подгоночных параметров, однако фактически достигнутая с ее помощью точность невелика (примерно 10%, см. рис. 2 в [17]). Эта теория на самом деле относится к качественно другой модели с аналитическим гамильтонианом, поскольку в его фурье-разложении всегда сохраняется лишь конечное число гармоник n . Такое «обрезание» спектра сопровождается появлением характерного для аналитических систем порога возникновения глобальной диффузии, что ограничивает применение этой теории в наиболее интересной области малых значений пара-

метра $K \lesssim K_c(n)$. В примере, приведенном в [17] (см. там рис. 2), $n_c = 21$ и $K_c \sim 0.02$ (в нашей нормировке). По механизму это похоже на ограничение критической гармоникой (3.5) в нашей теории, однако у нас это ограничение оказывается значительно мягче. Так, при $n_c = 21$ и $C_s = 1.2$ минимальное значение

$$K \approx K_c(n_c) \approx \left(\frac{\pi C_s}{4n_c}\right)^2 \approx 0.002, \quad (4.4)$$

т. е. на порядок меньше, чем в [17].

Перейдем теперь к наиболее интересной части наших исследований, когда параметр перекося модели (2.2) $d \neq 0$. В работе [9] доказано, что существует критическое значение параметра возмущения K_B , такое что при $K > K_B$ (глобальных) инвариантных кривых в системе нет. Точное выражение для K_B в нашей нормировке принимает вид

$$K_B(d) = \frac{2d^2}{1+d}, \quad 0 < d < 1. \quad (4.5)$$

Согласно [9–15], имеется, вообще говоря, счетное множество специальных значений $K \leq K_B$, при которых в системе в условиях сильного локального хаоса образуются инвариантные кривые.

Больше всего нас интересует вопрос: как сильно наличие этих инвариантных кривых будет подавлять глобальную диффузию при произвольных значениях K , несмотря на то что мера множества специальных значений этого параметра, как и вероятность случайного попадания в него, равны нулю?

5. ПОДАВЛЕНИЕ ДИФФУЗИИ «ВИРТУАЛЬНЫМИ» ИНВАРИАНТНЫМИ КРИВЫМИ

Рассмотрим прежде всего наиболее исследованный пример семейства (2.2) с параметром перекося $d = 1/2$, для которого результаты наших численных экспериментов приведены на рис. 2, 3.

При проведении вычислений весь интервал счета по времени разбивался на четыре равных части и величина скорости диффузии выдавалась в конце каждой из них. По этой причине на рис. 2–5 каждому значению K соответствуют в общем случае четыре точки. Их расположение по вертикали позволяет отличить диффузионный случай от недиффузионного. Для последнего характерно убывание скорости диффузии по времени, что приводит к взаимному «разбеганию» этих точек. В диффузионном случае разброс точек характеризует точность численных значений скорости диффузии. В области без

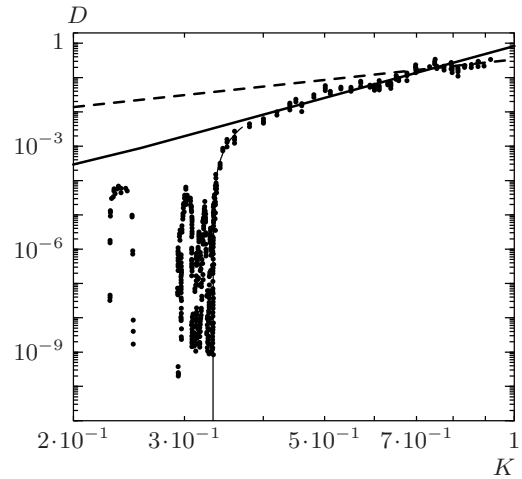


Рис. 2. Пример диффузии в гладком отображении с инвариантными кривыми нулевой меры: модель (2.2) с параметром $d = 1/2$, 50 траекторий, время счета $t_0 = 2.5 \cdot 10^6$. Сплошная прямая $D_2 = 0.8K^5$ по (5.1), штриховая прямая — предельный режим (3.10)

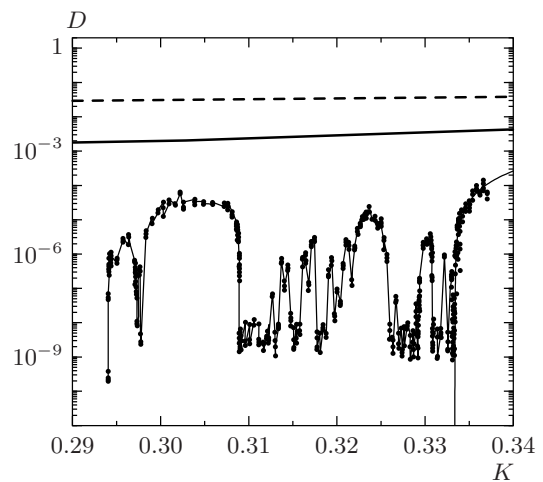


Рис. 3. Растянутое по K изображение части области фрактальной диффузии с инвариантными кривыми на рис. 2. Параметры счета те же, кроме времени счета $t_0 = 4 \cdot 10^7$ для большинства точек. Для некоторых из них, включая крайнюю левую с $K = 0.294$, время счета $t_0 = 10^9$. Гладкая кривая в правой части рисунка, построенная по (5.5), аппроксимирует границу основной диффузионной области

инвариантных кривых эта точность вполне удовлетворительна (приблизительно 10%) как и для $d = 0$. Однако в области с (виртуальными) инвариантными кривыми и вблизи нее (при $K \sim K_B$) ошибка увеличи-

чивается и достигает иногда значения, равного 2. Такой же порядок имеет и систематическое уменьшение средней скорости диффузии за счет неэргодичности движения в этой области. Последнее приводит к образованию устойчивой компоненты движения очень сложной структуры (так называемая критическая структура, см. например, [5]). Пока что нам не удалось существенно увеличить точность определения скорости диффузии, однако нам кажется, что для выводов данной работы используемой точности достаточно.

Значение $d = 1/2$ — единственное (кроме предельного $d = 0$), когда возможно упрощение $|f_n| = \text{const}$ в (3.2), которое существенно облегчает теоретический анализ численных данных. Поэтому соотношение (4.3) применимо с $|f_n| = 8/\pi^2$ для нечетных гармоник и $f_n = 0$ для четных при $\beta = 2$ и с поправкой $C_s = 2.84$ (см. (2.4) и предыдущий раздел), но только в области без инвариантных кривых, и справедливо в весьма ограниченном интервале параметра возмущения (см. рис. 2):

$$D_2(K) = 0.8K^5, \quad 0.4 \lesssim K \lesssim 0.8. \quad (5.1)$$

Верхняя граница определяется здесь хорошо известным переходом к предельному режиму диффузии без корреляций (3.10). Существенно новым элементом диффузионной картины является нижняя граница, связанная, очевидно, с появлением инвариантных кривых, которые подавляют диффузию. Согласно (4.5), при $d = 1/2$ инвариантные кривые полностью отсутствуют при

$$K > K_B \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}. \quad (5.2)$$

Однако сильное подавление диффузии (как это хорошо видно на рис. 2, 3) начинается значительно раньше, т. е. в области (по K), где инвариантных кривых фактически нет! Отсюда наш новый термин «виртуальная инвариантная кривая». Иными словами, каждая реальная инвариантная кривая, которая образуется при некотором точно определенном специальном значении $K = K_0$, на самом деле существенно искажает структуру фазовой плоскости системы в некоторой конечной окрестности K_0 .

Впервые для системы (2.2) с $d = 1/2$ диффузия в окрестности единственной инвариантной кривой — неразрушенной сепаратрисы целого резонанса, образующейся при $K = K_0 = 1/8$, — исследовалась в работе [13]. Первое, что было обнаружено — резкая несимметрия при $K > K_0$ и при $K < K_0$.

При $K > K_0$ сепаратриса начинает пропускать другие траектории, но среднее время (число итера-

ций) $\langle T_c \rangle$ прохождения резонанса зависит от величины расстройки $K - K_0 > 0$. Для выяснения этой зависимости в интервале $1.25 \cdot 10^{-7} \leq K - K_0 \leq 1.25 \cdot 10^{-5}$, где нет других инвариантных кривых, были выполнены следующие измерения. В области между двумя соседними целыми резонансами (см. рис. 4 в [13]) запускалось 100 случайных хаотических траекторий и фиксировалось время T_c первого появления каждой из них в областях либо ниже нижнего, либо выше верхнего резонансов. Для облегчения сравнения этих данных с результатами настоящей работы приведем ниже выражение для скорости диффузии:

$$D_c(K) \approx \frac{1}{\langle T_c \rangle} = 0.089(K - K_0)^{1.193}, \quad (5.3)$$

$$K > K_0 = \frac{1}{8}.$$

Отношение $F_{ex} = D_2(K)/D_c(K)$, где $D_2(K)$, согласно (5.1), определяет скорость диффузии в предположении полного отсутствия в системе инвариантных кривых, является количественной мерой подавления диффузии. Например, во всем исследованном диапазоне $K - K_0$ этот коэффициент изменяется в пределах от 40000 до 200, что свидетельствует о значительном подавлении диффузии (см. также рис. 2, 3).

Забегая вперед, отметим определенное сходство формулы (5.3) с формулой (5.5) для границы основной диффузионной области, которое мы обсудим ниже.

При $K < K_0$ и в области, сколь угодно близкой к сепаратрисе, обнаружилось много густо расположенных инвариантных кривых, наличие которых сделало практически невыполнимыми измерения времени прохождения резонанса. Вопрос о диффузии в этой области остался без ответа.

Все эти довольно простые наблюдения представляются нам и наиболее значительными, поскольку указывают на то, что нулевая мера множества инвариантных кривых и даже их конечная плотность не препятствуют сильному подавлению диффузии в рассматриваемой модели.

Следующим важным вопросом является количественная оценка подавления диффузии. Полное подавление возможно, по-видимому, лишь при специальных значениях K_0 , т. е. только для реальных инвариантных кривых. В общем случае все зависит от их структуры в пространстве параметров системы (K, d) . Структура эта представляется очень сложной и является, по-видимому, фрактальной. В частности, она включает в себя и целые области конечной ширины без инвариантных кривых. Одна из таких областей $0.2295 < K < 0.2500$ была предсказана

в [9] и хорошо видна слева на рис. 2. На границах этой области скорость диффузии резко убывает, так же как и на основной границе $K = 1/3$ (5.2), и это приводит к подавлению диффузии даже в максимуме. Ширина области $\Delta K \approx 0.02$, фактор подавления диффузии

$$F_{ex} = \frac{D_2(K_{max})}{D_{max}} \approx 14. \quad (5.4)$$

Здесь $D_{max} \approx 4.6 \cdot 10^{-5}$ — максимальная измеренная скорость диффузии вблизи центра области $K_{max} \approx 0.24$, а $D_2(K_{max}) \approx 6.4 \cdot 10^{-4}$ — ожидаемая там же, согласно (5.1), скорость в предположении полного отсутствия в системе инвариантных кривых.

Грубую оценку F_{ex} можно получить из сравнения границы этой области с основной границей $D_B(K)$, которая по данным рис. 2 удовлетворительно аппроксимируется выражением вида (слева от стрелки)

$$D_B(K) \approx \frac{1}{2} \left(K - \frac{1}{3} \right)^{3/2} \rightarrow D_b(K) \approx \frac{1}{2} (K - K_b)^{3/2}. \quad (5.5)$$

Этот частный случай подтверждает естественное предположение о том, что критическое число K_B из (4.5), являющееся пограничным для основной области без инвариантных кривых, совпадает с точкой K_D (или близко к ней) на границе $D_B(K_D) = 0$ основной диффузионной области.

Помимо этого мы делаем предположение (которое также предстоит проверить), что границы всех диффузионных областей ведут себя подобным образом и потому выражение в (5.5) справа от стрелки применимо к любой области без инвариантных кривых с левой границей K_b .

Из (5.5) находим

$$F_{th} \approx \frac{2D_2(1/3)}{D_b(K_{max})} \approx 13. \quad (5.6)$$

Здесь множитель 2 характеризует интерференцию двух границ области, которая усиливает подавление диффузии, $K_b \approx 0.23$ и $K_{max} \approx 0.24$ — левая граница и центр исследуемой области, $D_b(K_{max}) \approx 5 \cdot 10^{-4}$ — скорость диффузии в центре области, полученная из уравнения границы (5.5). Наконец, $D_2(1/3) \approx 3.28 \cdot 10^{-3}$ — вычисленная по (5.1) скорость диффузии на границе основной области в предположении отсутствия инвариантных кривых (мы пренебрегли малой поправкой $K_{max} - K_b$ и взяли $K = 1/3$).

В рассматриваемом случае совпадение измеренной (5.4) и теоретической (5.6) величин очень хорошее, что подтверждает сделанное выше предположение о подобии границ диффузионных областей. Если по аналогии с (4.1) ввести поправочный эмпирический фактор $C_F = F_{ex}/F_{th} \approx 1.1$, то он оказывается близким к единице. Отметим, что аппроксимация (5.5) годится только для $d = 1/2$ (см. ниже), а ее приложение к узким диффузионным областям справедливо, по-видимому, лишь вблизи основной границы.

Вновь подчеркнем уже отмечавшееся выше сходство зависимостей (5.3) для скорости диффузии $D_c(K)$ вблизи одной инвариантной кривой и (5.5) для границы $D_B(K)$ основной области: обе не только степенные, но и показатели их степеней различаются не сильно. Это различие, возможно, связано с тем, что (5.3) вычислялась при $K = 1/8$, а (5.5) — при $K = 1/3$.

На рис. 2 видны также и несколько других более узких диффузионных областей. В увеличенном виде они показаны на рис. 3, причем эмпирические точки соединены ломаной линией, которая помогает различить близкие узкие области. В центрах этих областей без инвариантных кривых диффузия также подавлена тем сильнее, чем уже область. Для 17 областей, которые удалось различить, были проведены вычисления по формулам (5.4)–(5.6) аналогично тому, как это было сделано выше. Сводные данные приведены в таблице, в нее включены также измеренные поправочные множители $C_F = F_{ex}/F_{th}$. В последней колонке таблицы помещены ширины областей, вычисленные по (5.5) при дополнительном требовании обеспечить равенство $C_F \equiv 1$. Согласие с эмпирической оценкой здесь значительно хуже, что объясняется, по-видимому, трудностью определения ширины узкой области ΔK при ограниченном числе просчитанных значений параметра возмущения K (см. ниже).

Подавление диффузии при нескольких значениях параметра перекоса d представлено на рис. 4. Бросается в глаза подобие зависимости $D(K)$ при разных d , что порождает надежду на возможность построить единое описание диффузии в некоторых безразмерных переменных.

В предположении $K_D \approx K_B$ (см. выше) для безразмерной величины параметра возмущения K^* естественно принять

$$K^* = \frac{K}{K_B} = \frac{1+d}{2d^2} K. \quad (5.7)$$

Нахождение второй безразмерной переменной D^* связано с большими трудностями, из-за того что

Параметры диффузионных областей на рис. 3

K_{max}	D_{max}	F_{ex}	C_F	$\Delta K \cdot 100$	$\delta K \cdot 100$
0.3322	$9.9 \cdot 10^{-7}$	$3.26 \cdot 10^3$	$1.99 \cdot 10^0$	0.080	0.051
0.3309	$4.0 \cdot 10^{-6}$	$7.93 \cdot 10^2$	$1.30 \cdot 10^0$	0.155	0.130
0.3282	$1.0 \cdot 10^{-8}$	$3.05 \cdot 10^5$	$1.20 \cdot 10^2$	0.060	0.003
0.3270	$5.0 \cdot 10^{-8}$	$5.98 \cdot 10^4$	$1.85 \cdot 10^1$	0.051	0.007
0.3240	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$2.60 \cdot 10^2$	$1.65 \cdot 10^0$	0.382	0.274
0.3216	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$1.38 \cdot 10^3$	$1.15 \cdot 10^0$	0.099	0.090
0.3204	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$2.70 \cdot 10^4$	$5.58 \cdot 10^0$	0.039	0.012
0.3196	$8.0 \cdot 10^{-7}$	$3.34 \cdot 10^3$	$1.73 \cdot 10^0$	0.072	0.050
0.3178	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$1.30 \cdot 10^3$	$4.01 \cdot 10^{-1}$	0.051	0.094
0.3163	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$2.53 \cdot 10^3$	$1.84 \cdot 10^0$	0.090	0.060
0.3146	$4.0 \cdot 10^{-7}$	$6.16 \cdot 10^3$	$1.58 \cdot 10^0$	0.045	0.033
0.3139	$8.0 \cdot 10^{-7}$	$3.05 \cdot 10^3$	$7.81 \cdot 10^{-1}$	0.045	0.053
0.3130	$5.0 \cdot 10^{-8}$	$4.81 \cdot 10^4$	$2.04 \cdot 10^1$	0.063	0.008
0.3043	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$5.22 \cdot 10^1$	$1.59 \cdot 10^0$	1.090	0.798
0.2978	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$6.25 \cdot 10^3$	$4.05 \cdot 10^{-1}$	0.018	0.033
0.2960	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$7.27 \cdot 10^2$	$3.22 \cdot 10^0$	0.301	0.138
0.2941	$4.3 \cdot 10^{-7}$	$4.06 \cdot 10^3$	$2.00 \cdot 10^{-1}$	0.0150	0.044

Примечание. K_{max} , D_{max} — параметр возмущения и скорость диффузии в центре области; F_{ex} — измеренный фактор подавления диффузии там же; $C_F = F_{ex}/F_{th}$ — измеренное значение, где F_{th} вычислялся по формуле (5.6); ΔK — измеренная ширина области; δK — ширина, пересчитанная по (5.5) при дополнительном требовании обеспечить равенство $C_F \equiv 1$.

явное выражение для функции $D(K)$ получить не удастся, поскольку в общем случае $|f_n| \neq \text{const}$ (см. разд. 3). Однако это возможно приближенно при условии, что аргумент синуса в (2.4) мал. Тогда $\sin(\pi nd) \approx \pi nd$ и (см. (2.3))

$$|f_n| \approx n f_0, \quad f_0 \approx \frac{2}{\pi}, \quad \beta = 1. \quad (5.8)$$

Видно, что зависимость $D(K)$ при $d \ll 1$ получается такая же, как в пределе $d = 0$.

Это приближение (а значит, и асимптотика (4.1)) справедливо при (см. (3.5) с $\beta = 1$)

$$K \gtrsim K_1 = \frac{\pi^4 d^2}{16} \approx \frac{\pi^4}{32} K_B \approx 3K_B. \quad (5.9)$$

С другой стороны, при обратном неравенстве ($\pi n_c d \gtrsim 1$, $d \ll 1$, $\beta = 2$) можно усреднить $\sin(\pi nd)$ в (2.4) по n . Так как сумма (3.2) пропорциональна

$$\sqrt{f_n} \propto \sqrt{|\sin(\pi nd)|},$$

введем новый параметр

$$S_0 = \langle \sqrt{|\sin(\pi nd)|} \rangle \approx 0.76 \quad (5.10)$$

и положим ($d \ll 1$)

$$f_0 \approx \frac{2}{\pi^2} \frac{S_0^2}{d}, \quad \beta = 2. \quad (5.11)$$

Условие усреднения можно записать также в виде

$$K \lesssim K_2 \approx \left(\frac{\pi^2 d}{8S_0} \right)^2 \approx 2.6d^2 \approx 1.3K_B < K_1. \quad (5.12)$$

При этом

$$D(K) \approx A_2 K^5, \quad A_2 \approx \frac{A_1}{K_{cr}^{2.5}}, \quad (5.13)$$

где значение A_1 берется из (4.1), а K_{cr} — точка пересечения двух асимптотик: (5.13) и (4.1). Положение этой точки неизвестно, и неясно, как его определять, поскольку при $d \ll 1$ (в отличие от случая $d = 1/2$ на рис. 2) область диффузии с $\beta = 2$ отсутствует. Вместе с тем, обе границы K_1 и K_2 достаточно близки к K_B и по этой причине для абсциссы точки пересечения асимптотик мы приближенно принимаем

$$K_{cr} \approx K_B. \quad (5.14)$$

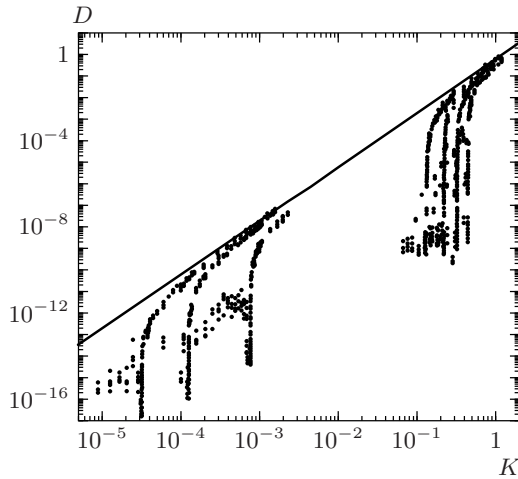


Рис. 4. Общая картина диффузии в модели (2.2) при семи значениях параметра перекоса $d = 0.004, 0.008, 0.02, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ (слева направо). Число траекторий от 50 до 250, время счета $t_0 = 2.5 \cdot 10^6$ итераций. Прямая — верхняя граница скорости диффузии (4.1), см. также рис. 5 и текст

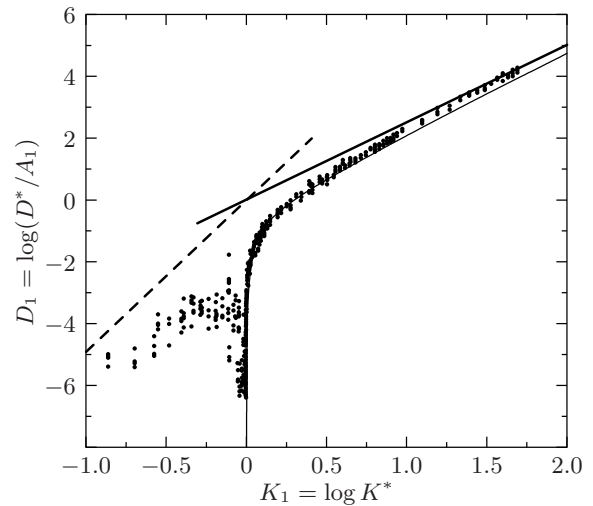


Рис. 5. То же, что на рис. 4 для трех наименьших значений параметра $d = 0.004, 0.008, 0.02$ в безразмерных переменных (5.7) и (5.15). Кривая — эмпирическая аппроксимация основной границы диффузии (5.16). Прямые показывают асимптотики диффузии без инвариантных кривых: сплошная — (4.1) с $\beta = 1$, штриховая — (5.13) с $\beta = 2$ в приближении (5.14)

В таком приближении вторую безразмерную переменную с учетом (5.7) и (5.13) можно выбрать в виде

$$D^* = \left(\frac{1+d}{2d^2} \right)^{5/2} D. \quad (5.15)$$

Строго говоря, переменные (5.7) и (5.15) подходят только для случая $d \ll 1$, когда можно пользоваться простыми асимптотиками (4.1) и (5.13). Однако общая картина подобия сохраняется и до $d \sim 1$, но не для $d \rightarrow 1$.

Для трех значений $d \ll 1$ данные наших численных экспериментов в безразмерных переменных показаны на рис. 5 вместе с двумя асимптотиками (4.1) и (5.13). Гладкая кривая, которую с трудом можно проследить в плотной системе точек, представляет собой найденную нами чисто эмпирическую универсальную границу основной диффузионной области

$$D_l = \frac{5}{2} K_l - \frac{0.4}{\sqrt{K_l}}, \quad (5.16)$$

$$D_l = \log \left(\frac{D^*}{A_1} \right), \quad K_l = \log K^*,$$

записанную в десятичных логарифмах безразмерных переменных.

В этом соотношении использованы безразмерные переменные (4.5) и (5.15), которые уже содержат в себе предположение о равенстве критического числа K_B и границы K_D основной диффузионной области. Предварительные эксперименты (см. рис. 3–5)

показывают, что это предположение действительно выполняется с хорошей точностью:

$$\frac{K_D - K_B}{K_B} \lesssim 10^{-3}.$$

Однако интересный вопрос о точном равенстве этих параметров остается открытым.

В [9] была явно найдена лишь одна область без инвариантных кривых (см. выше) и высказано предположение, что таких областей бесконечно много при $K \rightarrow 0$. Наши результаты (рис. 3) показывают, что множество таких областей имеется и непосредственно вблизи основной границы диффузии. Важным вопросом является статистика таких областей, связанная с распределением скорости диффузии по параметру возмущения K и, соответственно, с ее подавлением виртуальными инвариантными кривыми.

Мы провели статистическую обработку экспериментальных величин коэффициента подавления диффузии F_{ex} для $N = 134$ значений параметра K в интервале $0.293 < K < 0.333$ шириной всего $\Delta \approx 0.04$ (см. рис. 3). Для получения статистически значимого распределения $P(F_{ex})$ при столь бедной статистике весьма эффективным оказывается специальный метод построения интегрального распределения с «плавающей» шириной ячейки (см. [18] и ссылки там). Такой метод называ-

ется также «упорядоченная статистика редких событий» (rank-ordering statistics of extreme events). Этот эффективный метод был впервые предложен в 1949 г. и использовался в исследованиях по математической лингвистике [19]. Оказывается, что достаточно просто расположить все значения $F_{ex}(n), n = 1, 2, \dots, N$ в порядке убывания: $F_{ex}(n+1) < F_{ex}(n)$, и тогда искомое распределение приближенно равно

$$P(F_{ex}) \approx \frac{n}{N}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (5.17)$$

Полученное таким простым способом распределение изображено на рис. 6. Наиболее интересной его особенностью является чрезвычайно медленное убывание вероятности сильного подавления диффузии:

$$P(F_{ex}) \approx \frac{2}{F_{ex}^{0.15}}, \quad (5.18)$$

$$100 < F_{ex} < 3 \cdot 10^5 = F_{max}(t_0).$$

Здесь левая граница связана с очень малым исследованным интервалом K шириной $\Delta \approx 0.04$. Быстрое падение вероятности $P(F_{ex})$ при $F_{ex} > 3 \cdot 10^5$ объясняется ограниченным временем счета ($t_0 = 4 \cdot 10^7$). Действительно, поскольку регулярные осцилляции $\Delta p \sim K \approx 0.3$, минимальная наблюдаемая скорость диффузии оказывается равной

$$D_{min} \sim \frac{(\Delta p)^2}{t_0} \sim 10^{-9}, \quad (5.19)$$

что хорошо совпадает с экспериментальными данными, представленными на рис. 3. При меньших K этот минимум убывает вплоть до $D \approx 10^{-17}$ при $K \approx 3 \cdot 10^{-5}$, $t_0 = 4 \cdot 10^8$ (см. рис. 4). Интересно отметить, что при таком медленном убывании вероятности (5.18) как среднее значение F_{ex} , так и его дисперсия определяются значением F_{max} и расходятся примерно пропорционально $t_0 \rightarrow \infty$ (см. (5.19)).

Небольшие отклонения эмпирического распределения на рис. 6 от закона (5.18) связаны, по-видимому, с неоднородностями распределения использованных значений K_n . Это может быть легко исправлено, однако потребует значительного времени счета или существенного сокращения статистики.

Эмпирический закон (5.18) можно использовать, в частности, для анализа непонятого «застревания» траектории, обнаруженного в старой работе [7] и до сих пор не получившего объяснения. Этот случай также относится к отображению (2.2) с $d = 1/2$, но в несколько иной нормировке (как в [9]). В используемых нами обозначениях он соответствует

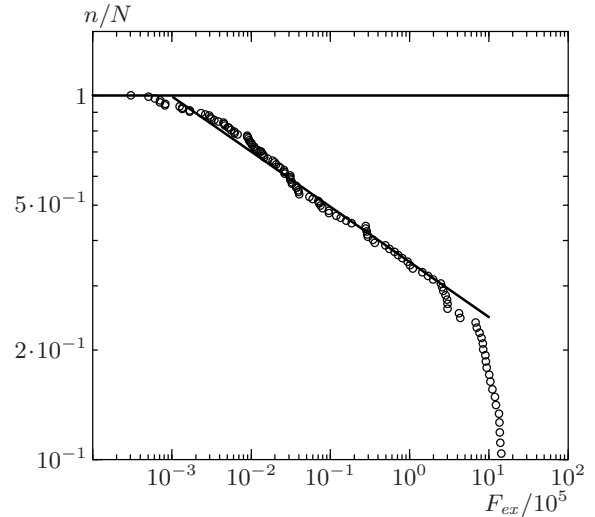


Рис. 6. Первые эмпирические результаты по статистике коэффициента подавления диффузии F_{ex} (5.4) виртуальными инвариантными кривыми по данным наших численных экспериментов, представленных на рис. 3 ($d = 1/2$). Наклонная прямая — интегральное степенное распределение (5.18). Полное число точек (значений F_{ex}) равно 134, из которых 100 лежат в основном интервале $F_{ex} < 3 \cdot 10^5$ (см. текст)

$K = 0.29 < 1/3$ и, следовательно, случайно попал в область с виртуальными инвариантными кривыми. При времени счета $t_0 = 3 \cdot 10^6$ минимальный коэффициент диффузии $D_{min} \sim 3 \cdot 10^{-8}$, что соответствует минимальному фактору подавления диффузии $F_{min} \sim 10^5$ с разумной вероятностью $P \approx 36\%$.

Вместо отдельных значений $F_{ex}(n)$ можно взять значения F_m (мы упростили обозначение $F_{ex}(m) \rightarrow F_m$) для центров всех $m = 1, 2, \dots, M$ ($M = 17$), различных в выделенном интервале $K = 0.293-0.333$ областей диффузии (см. таблицу). Тогда вероятность будет пропорциональна нормированной сумме ширин этих областей dK_m , которые определяются либо эмпирически по рис. 3 (ΔK в таблице), либо пересчетом по формуле (5.5) из эмпирического значения фактора подавления F_m (δK в таблице). Нормировка проводится по полной ширине исследованного интервала K путем замены $dK_m \rightarrow dK_m/\Delta$, где $\Delta = 0.04$. Кроме того, необходимо учесть, что нормированная сумма ширин всех $M = 17$ диффузионных областей равна $S \approx 0.664$ для ΔK и $S \approx 0.468$ для δK . В обоих случаях происходит существенная потеря узких областей с большим $F \gtrsim 10^4$ (см. рис. 7). Окончательно

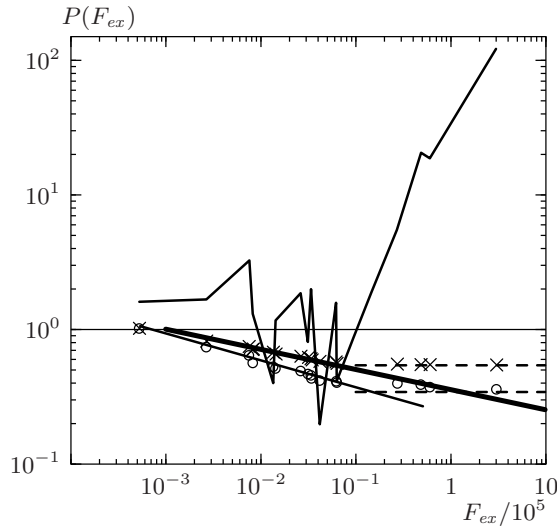


Рис. 7. То же, что на рис. 6, но по ширине 17 различных диффузионных областей (см. таблицу и текст): жирная прямая — данные рис. 6 (5.18), кружки — интегральная вероятность (5.21) по измеренной ширине ΔK диффузионных областей, кресты — то же для ширины δK , пересчитанной по (5.5), ломаная линия — измеренная поправка C_F к (5.6); штриховые горизонтальные линии показывают долю «потерянных» (неразличимых) областей при больших $F \gtrsim 10^4$

получаем

$$P(F_m) \approx 1 - S + \sum_{i=m}^M dK_i. \quad (5.20)$$

Результат такой обработки эмпирических данных таблицы показан на рис. 7 вместе с данными рис. 6, которые представлены жирной прямой (5.18). При столь малой статистике согласие обоих методов можно считать удовлетворительным. Особенно это касается данных для δK (в пределах упомянутого выше ограничения $F \lesssim 10^4$). Отметим, что вне этой области, т. е. при $F \gtrsim 10^4$, где вероятность $P(F) \approx \text{const}$ остается почти постоянной, одновременно резко возрастает эмпирическая поправка C_F (см. рис. 7).

Для ΔK согласие хуже, причем наблюдается не просто разброс точек, а систематическое, хотя и небольшое, отклонение. Эмпирическое распределение остается по-прежнему степенным (см. нижнюю наклонную прямую на рис. 7), но с несколько иным показателем:

$$P(F) \approx \frac{2.3}{F^{0.20}}, \quad 64 < F \lesssim 10^4, \quad (5.21)$$

где левая граница определяется минимальным значением F в исследованном интервале K . Причина

такого расхождения неизвестна и требует дальнейших исследований. Мы предполагаем, что наблюдаемые расхождения связаны, в основном, с недооценкой эмпирической ширины области ΔK , возрастающей вместе с F . Скорее всего, это происходит при перекрытии соседних областей, которое также возрастает с ростом F . При этом разница между эмпирическими соотношениями (5.18) и (5.21) составляет около 30 % по показателю и 20 % по вероятности (в пределах применимости (5.21)), что неплохо для предварительных результатов.

Отметим, что упомянутые выше флуктуации скорости диффузии (в худшем случае в два раза) приводят к изменению вероятности (5.18) в $2^{0.15} \approx 1.11$ раз, т. е. всего на 11 %.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование семейства кусочно-линейных отображений типа (2.1), (2.2) имеет давнюю историю (см., например, [7, 9, 11–15, 17] и ссылки там). В настоящей работе мы используем простейшие модели для исследования относительно нового и мало известного, но очень сложного явления фрактальной диффузии под действием виртуальных глобальных инвариантных кривых в условиях сильного локального хаоса.

Вначале, однако, полезно понять, почему изучение столь упрощенных конструкций, как кусочно-линейные отображения, заслуживает внимания. Обратимся вновь к работе [17], где для выяснения свойств такого отображения рассматривалась сложная (с 21 фурье-гармоникой) аналитическая функция и в их динамическом поведении было установлено определенное сходство. Значит, можно поступать и наоборот — в случае сложной (например, с крутыми изгибами) непрерывной аналитической функции подыскивать близкую к ней кусочно-линейную функцию и исследовать соответствующее отображение, что оказывается намного проще. Это направление представляется нам достаточно перспективным, но требующим специального рассмотрения.

Наши исследования показали, что в рассматриваемом семействе моделей (2.1), (2.2) всегда существует относительно широкая (основная) область «нормальной» диффузии, как и в других гладких системах без инвариантных кривых. В этой области нам удалось получить весьма простые и довольно точные оценки скорости диффузии (разд. 3, 4), которые существенно помогли при анализе основного в настоящей работе эмпирического материала по фрак-

тальной диффузии в области с виртуальными инвариантными кривыми (разд. 5).

Исследования проведены в интервале параметра перекоса $0 < d < 0.6$ (с инвариантными кривыми при $K < K_B$, см. (4.5)). Установлено, что наличие множества инвариантных кривых (несмотря на то, что его мера равна нулю) вызывает сильное подавление диффузии при $K < K_B$, что и побудило нас предложить новый термин «виртуальная инвариантная кривая».

Наиболее подробно изучен случай $d = 1/2$, для которого удалось получить количественные оценки подавления диффузии. Предварительная обработка эмпирических данных позволила построить интегральное распределение (5.18) вероятности коэффициента подавления диффузии F_{ex} . Наиболее интересной особенностью этого распределения является чрезвычайно медленное убывание вероятности F_{ex} , настолько медленное, что среднее значение F_{ex} расходится с увеличением времени счета (см. разд. 5). Проведено также подробное исследование серии узких диффузионных областей слева от основной границы (см. таблицу). Это позволило подтвердить важный результат (5.18) также и другим методом (см. (5.21)). Причина столь необычной статистики F_{ex} (а, следовательно, и скорости фрактальной диффузии D_{max} в (5.4)) неизвестна и требует дальнейшего исследования.

Изучение зависимостей $D(K)$ при различных значениях d обнаружило явное подобие в их поведении, что указывало на возможность универсального описания. Нам удалось сделать это при дополнительном предположении $d \ll 1$ и построить в безразмерных переменных эмпирическую зависимость (5.16) для границы основной диффузионной области. Это простое соотношение неплохо описывает характерный резкий переход из хаотической области без инвариантных кривых с хорошо известной регулярной диффузией в также хаотическую область, но с плотной системой инвариантных кривых нового вида и с совершенно неизвестной очень нерегулярной (фрактальной) диффузией.

В целом, это новое явление представляется нам достаточно интересным и важным и, по нашему мнению, безусловно заслуживает дальнейшего исследования.

Работа частично поддержана РФФИ (проект 01-02-16836) и комплексной научной программой РАН «Нелинейная динамика и солитоны».

ЛИТЕРАТУРА

1. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
2. A. Lichtenberg and M. Leiberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer (1992).
3. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
4. J. Green, J. Math. Phys. **20**, 1183 (1979).
5. B. V. Chirikov, Chaos, Solitons and Fractals **1**, 79 (1991).
6. J. Moser, *Stable and Random Motion in Dynamical Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton (1973).
7. B. V. Chirikov, E. Keil, and A. Sessler, J. Stat. Phys. **3**, 307 (1971).
8. M. Hénon and J. Wisdom, Physica D **8**, 157 (1983).
9. S. Bullett, Comm. Math. Phys. **107**, 241 (1986).
10. M. Wojtkowski, Comm. Math. Phys. **80**, 453 (1981); Ergodic Theory Dyn. Syst. **2**, 525 (1982).
11. Л. В. Овсянников, Частное сообщение, май 1999.
12. В. В. Вечеславов, Препринт ИЯФ 99-69, Новосибирск (1999).
13. В. В. Вечеславов, Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск (2000); E-print archives, nlin.CD/0005048.
14. В. В. Вечеславов, ЖЭТФ **119**, 853 (2001).
15. В. В. Вечеславов, Б. В. Чириков, Препринт ИЯФ 2000-68, Новосибирск (2000); ЖЭТФ **120**, 740 (2001).
16. Л. В. Овсянников, ДАН **369**, 743 (1999).
17. I. Dana, N. W. Murray, and I. C. Percival, Phys. Rev. Lett. **62**, 233 (1989).
18. D. Sornette, L. Knopoff, Y. Kagan, and C. Vanneste, J. Geophys. Res. **101**, 13883 (1996).
19. G. Zipf, *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1949).