

ДВИЖЕНИЕ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ ВО ФЛУКТУИРУЮЩЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

С. А. Гуз*

*Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 23 ноября 2001 г.

Рассматривается классическая броуновская частица в периодическом потенциальном поле с быстро флуктуирующей фазой. Определено понятие эффективного потенциала для описания медленного усредненного движения частицы и показано, что существует некоторая зона, внутри которой частица совершает стационарное случайное движение без заметного дрейфа. По аналогии с идеальным случаем эту зону можно назвать зоной эффективного захвата или синхронизации. Описанная ситуация справедлива для стационарных флуктуаций фазы потенциальной функции, если они имеют достаточно малое, но конечное время корреляции. Исследование проблемы сведено к изучению стохастической системы с внешним шумом, спектральная плотность которого равна нулю на нулевой частоте («зеленый» шум [1]). Анализ уравнений первого и второго приближений метода усреднения показывает высокую стабильность эффекта захвата. Данный результат подтвержден численным решением соответствующих стохастических уравнений. При этом использовался предиктор-корректорный алгоритм, который дал возможность провести численное моделирование с достаточно высокой степенью точности. Результат моделирования показал хорошее соответствие теоретическим результатам. Значение ширины эффективной зоны захвата, которое было рассчитано аналитически на основе метода усреднения, фактически совпало со значением, полученным в процессе моделирования.

PACS: 05.40.Jc

1. ВВЕДЕНИЕ

Для исследования многих нелинейных систем, которые можно описать обыкновенными стохастическими дифференциальными уравнениями, обычно используется марковское приближение. Если внешние шумы являются гауссовскими белыми шумами, то задача сводится к решению диффузионного уравнения Фоккера–Планка (см., например, [2–6]). С точки зрения статистической физики это вполне понятный подход, поскольку коэффициенты диффузии могут быть найдены из известной флуктуационно-диссипационной теоремы [7]. Например, если мы рассматриваем броуновскую частицу, эта теорема дает нам связь между коэффициентом диффузии и коэффициентом вязкого трения, поскольку диффузия и вязкость вызваны одним и тем же эффектом: столкновением броуновской частицы с большим числом частиц окружающей среды — статистическим

ансамблем. Поскольку число таких частиц велико, а время между столкновениями мало, шум, который действует на броуновскую частицу, можно рассматривать как гауссовский белый шум с нулевым временем корреляции. Явления, которые происходят на физически малых, но конечных временах, исследуются в основном для установления интенсивности белого шума. При таком подходе траектория частицы описывается винеровским процессом [2, 3, 8, 9], представление о котором лежит в основе стохастического исчисления [10–12].

Однако предположим, что помимо слабого белого шума, вызванного взаимодействием частицы со статистическим резервуаром, на нее дополнительно действует внешний шум, не содержащий в своем спектре постоянной составляющей. Например, это может быть шумовое акустическое или электромагнитное излучение, прошедшее через конечную апертуру антенны или линзы. Излучение с длиной волны, превышающей размер апертуры, будет выреза-

*E-mail: guz@lit.ru

но из спектра внешнего шума, и, соответственно, реально действующий на частицу шум $\zeta(t)$ будет иметь спектральную плотность $S(\omega)$, которая равна нулю на нулевой частоте, т. е. $S(0) = 0$. С другой стороны, коэффициент диффузии D уравнения Фоккера–Планка определяется как отношение дисперсии приращения шума на некотором достаточно малом интервале времени к длительности этого интервала. Однако для использования диффузионного приближения этот интервал должен превышать время корреляции шума, поскольку иначе нельзя пользоваться моделью белого шума. В этом случае коэффициент диффузии определяется через функцию корреляции шума $\psi(t_1 - t_2) = \langle \zeta(t_1)\zeta(t_2) \rangle$ (далее везде предполагается, что $\langle \zeta \rangle = 0$) посредством соотношения [2, 3]

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) d\tau = 2\pi S(0). \quad (1)$$

Здесь учтено, что в силу теоремы Винера–Хинчина функции $\psi(\tau)$ и $S(\omega)$ связаны между собой преобразованием Фурье [3, 5]. Из выражения (1) следует, что $D = 0$, если $S(0) = 0$. Хорошим примером шума с нулевым коэффициентом диффузии является излучение черного тела. Вид корреляционной функции для этого случая приведен в [5]. Условие $D = 0$ означает, что при воздействии внешнего шума с такой спектральной плотностью движение свободной, т. е. без учета потенциальных сил, броуновской частицы является стационарным процессом, а не процессом с некоррелированными приращениями, дисперсия которого растет по диффузионному закону [5]. Это обстоятельство служит достаточным основанием, чтобы случайные стационарные процессы, для которых $S(0) = 0$, выделить в отдельный класс. По аналогии с оптикой шум часто характеризуют его «цветом». Классическим примером является белый шум, когда $S(\omega) = \text{const}$. Если $S(\omega) \neq \text{const}$, то в последнее время широко используется термин «окрашенный шум» [13–15]. Простым и популярным примером окрашенного шума является процесс Орнштейна–Уленбека [12, 13, 15]. Часто рассматриваются гармонический (или квазимонохроматический) шум и широкополосный окрашенный шум (см., например, [16, 17]). Стационарный шум с $S(0) = 0$ также следует считать окрашенным. Однако теперь его спектральная плотность уменьшается в области низких частот, т. е. в области красного цвета. Поэтому шум такого рода мы условно назвали зеленым. В ряде наших работ [1, 18–23], а также работах [17, 24] показано, что действие зеле-

ного шума качественно меняет динамику стохастической системы. Основным содержанием настоящего исследования является изучение захвата броуновской частицы в периодическом потенциале с флуктуирующей фазой. Как будет видно в дальнейшем, эта задача приводит нас к зеленому шуму.

Главным свойством зеленого шума является существование значительной отрицательной автокорреляции. Лишь в этом случае интеграл от корреляционной функции шума может быть равен нулю. Следует ожидать, что такое последствие приведет к заметной стабилизации стохастической системы. Система фактически становится квазистационарной, и слабый диффузионный процесс возможен исключительно за счет нелинейности системы, когда нулевая гармоника шума детектируется в процессе нелинейных преобразований внешнего зеленого шума в самой системе. В соответствии с этим в работах [1, 19, 20] это явление названо нелинейной диффузией.

Из того факта, что коэффициент диффузии (1) равен нулю, нельзя делать общий вывод, что марковское приближение неприменимо. В ряде случаев мы можем использовать многомерное нестационарное уравнение Фоккера–Планка, но при этом число переменных возрастает и его решение превращается в довольно серьезную отдельную проблему [4]. В перечисленных выше работах [1, 18–23] показано, что роль зеленого шума значительно проще исследовать, если использовать метод усреднения Крылова–Боголюбова [25]. Важно, что этот метод позволяет рассматривать роль негауссовских внешних шумов практически без изменения схемы вычислений, что трудно сделать посредством обобщения уравнения Фоккера–Планка.

Заметим, что метод усреднения широко используется в теории нелинейных колебаний. Если говорить о стохастических колебательных системах, то этот метод часто применяется для исследования высокочастотных автоколебательных устройств. В этом случае узкополосный фильтр (колебательный контур, резонатор) фактически осуществляет физическую реализацию усреднения по времени внешнего широкополосного шума. По-видимому, впервые это сделано в монографии [26], где метод усреднения использован для изучения флуктуаций лампового генератора. Малость времени корреляции внешнего шума и периода колебаний по сравнению с постоянной времени фильтра позволяет провести усреднение основных уравнений за этот период и получить уравнения для медленно меняющихся амплитуды и фазы. В этих уравнениях источники флуктуа-

ций представляются белыми шумами со спектральной плотностью, которую внешний шум имеет на частоте колебаний генератора (см. также [2, 3]). Тем не менее важно отметить, что даже в этом случае нелинейность и внешний шум предполагались малыми (порядка малого параметра), чтобы тривиальное (нулевое) приближение имело вид простого гармонического колебания. Такой подход соответствует теории Боголюбова–Крылова. В связи с этим заметим еще, что в [27] доказана фундаментальная теорема о нормальных отклонениях от усредненной системы, которая по существу является математическим обоснованием изложенной далее процедуры аналитических вычислений. Единственное отличие от схемы, данной в [27], заключается в том, что в качестве нулевого приближения мы используем решение уравнения движения свободной частицы под действием аддитивного внешнего шума. В этом случае нет необходимости считать шум малым. Однако если этот шум белый, как это наиболее часто предполагается, то нулевое приближение, полученное при нулевом значении малого параметра, будет иметь вид диффузионного процесса, т.е. содержать в себе изначально некоторое «медленное» движение. В то же время, как уже отмечалось, в теории колебаний этим приближением, описывающим «быстрое» движение, обычно является простое гармоническое колебание, которое в некотором смысле можно рассматривать как стационарную функцию. При этом характерным временем быстрого движения является период этого колебания. Это противоречие снимается, если рассматривать действие не белого, а зеленого внешнего шума на свободную систему. Тогда существуют достаточные условия, при которых движение свободной частицы является стационарным процессом [1, 23], и этот процесс вполне может быть использован в качестве нулевого приближения. Очевидно, что в этом случае усреднение следует проводить за интервалы времени, превышающие время корреляции полученного таким образом нулевого приближения.

Заметим также, что линеаризация потенциального поля в какой-либо точке является удобным и часто применяемым методом, чтобы прийти к стационарному диффузионному приближению. Однако такой подход исключает возможность описания свободного движения системы. Примером может служить обычный параболический потенциал, когда частица фактически не может покинуть некоторую замкнутую область, если не ввести понятия о поглощающих границах, что всегда выглядит несколько искусственно. С другой стороны, если ограничиться

первым приближением метода усреднения, в котором уже учитываются потенциальные силы, то для решения задачи достаточно знать всего лишь одномерную и двумерную плотности функций распределения вероятности для нулевого приближения, чтобы получить информацию о нестационарном движении системы. Изучение каждого последующего приближения требует расчета всех предыдущих приближений, но, как правило, при должном выборе параметра разложения асимптотические ряды метода усреднения хорошо сходятся и обычно бывает достаточно первого приближения. Тем не менее следует указать и на главный недостаток метода усреднения — он не дает функций распределения переменных системы, а только их моменты. Впрочем, для многих приложений это не играет существенной роли.

2. МОДЕЛЬ

Далее рассматривается одномерное движение броуновской частицы в некотором периодическом потенциале $V(y)$ (рис. 1), фаза которого возмущается случайным стационарным полем $\xi(t, y)$ с нулевым средним $\langle \xi \rangle = 0$, дисперсией σ^2 и характерной длиной волны, заметно превышающей пространственный период l невозмущенного потенциала. Примером может служить влияние акустического поля на периодическую структуру кристалла или полупроводника достаточно малых размеров. Выберем величину l в качестве масштаба длины и будем считать координату y безразмерной величиной. Запишем также потенциальную функцию в виде $V(y) = aU(y)$, где $U(y)$ — безразмерная функция,

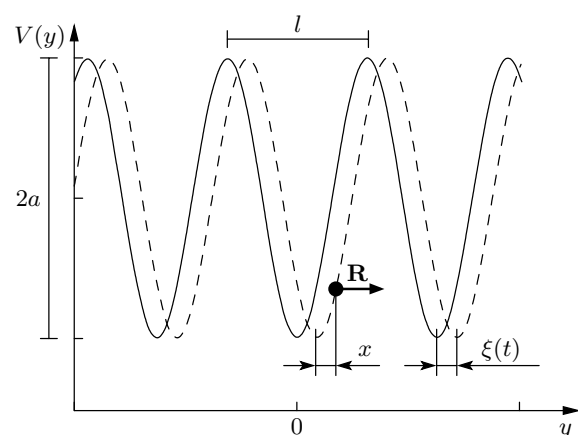


Рис. 1. Броуновская частица в периодическом потенциале с флуктуирующей фазой

определяющая ее форму, а a — некоторая амплитуда. Тогда уравнение движения частицы в лабораторной системе координат можно записать в виде

$$m\ddot{y} + k\dot{y} = \frac{a}{l}F + \frac{a}{l}f(y + \xi), \quad (2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени, m — масса частицы, k — коэффициент вязкого трения, $R = aF/l$ — некоторая постоянная внешняя сила, действующая на частицу (рис. 1). Как уже отмечено выше, слабым белым шумом мы пренебрегаем и используем длинноволновое приближение:

$$\begin{aligned} f(y + \xi) &= -\frac{\partial U(y + \xi)}{\partial y} = \\ &= -\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \left[\frac{\partial U(s)}{\partial s}\right]_{s=y+\xi} \approx -\left[\frac{\partial U(s)}{\partial s}\right]_{s=y+\xi}. \end{aligned}$$

Функцию $f(y)$ будем считать ограниченной и периодической с нулевой постоянной составляющей. Для исследования движения частицы относительно неподвижного потенциала перейдем в систему координат, связанную с ним посредством замены переменных

$$x = y + \xi. \quad (3)$$

Тогда уравнение (2) сводится к уравнению движения, которое использовалось нами в работах [1, 20, 22]:

$$\vartheta\ddot{x} + \dot{x} = \varepsilon [F + f(x)] + \zeta(t), \quad (4)$$

где $\vartheta = m/k$, $\varepsilon = a/lk$ и

$$\zeta = \vartheta\ddot{\xi} + \dot{\xi} \quad (5)$$

— внешнее возмущение. Введение параметра ϑ представляется удобным, поскольку случай, когда $\vartheta = 0$, соответствует более простой и широко распространенной модели передемфированной частицы. Заметим, что шум (5) имеет вид, аналогичный шуму при описании системы фазовой синхронизации второго рода, когда существует случайная стационарная модуляция фазы внешнего сигнала [2, 20].

При $\varepsilon = 0$ уравнение (4) имеет частное решение, которое совпадает с $\xi(t)$ и, соответственно, как мы уже отмечали, является стационарным процессом, а не процессом с некоррелированными приращениями, как это было бы, если бы внешний шум $\zeta(t)$ был белым. Согласно соотношению (5), спектральная плотность $S(\omega)$ случайной силы $\zeta(t)$ в уравнении (4) имеет вид

$$S(\omega) = \omega^2 [(\vartheta\omega)^2 + 1] G(\omega) \quad (6)$$

и обращается в нуль на нулевой частоте, если спектральная плотность $G(\omega)$ процесса $\xi(t)$ растет не быстрее, чем ω^2 при $\omega \rightarrow 0$. Иначе говоря, в этом случае внешний шум $\zeta(t)$ является зеленым шумом. Следует отметить, что мы не рассматриваем влияния движения броуновской частицы на саму фазовую модуляцию периодического потенциала. Поэтому зеленый шум (5) является внешним воздействием, заданным *a priori* и никак не зависящим от состояния броуновской частицы. Если, например, говорить о кристаллической решетке в твердых телах, то это означает, что мы пренебрегаем рассеянием броуновской частицы на фононах. Эта ситуация вполне аналогична той, которая имеет место в эффекте Мессбауэра. В механике мы можем рассмотреть пример движения частицы на случайно вибрирующем профильном основании. В этом случае мы должны предположить, что масса основания значительно превышает массу частицы, и силой реакции, действующей на это основание со стороны частицы, можно пренебречь.

В дальнейшем параметр ε используется как параметр асимптотических разложений. Поэтому, как отмечалось во Введении, стационарный процесс $\xi(t)$ является нулевым приближением данной теории. Отметим, что при $\vartheta \neq 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ спектральная плотность (6) расходится, что связано с неинерциальностью системы отсчета, в которой записано уравнение (4) [22].

В настоящей статье конкретные аналитические расчеты проведены для случая, когда процесс $\xi(t)$ является процессом Орнштейна–Уленбека. Его спектральную плотность G и корреляционную функцию Ψ запишем в виде

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{D}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}, \\ \Psi(\tau) &= \frac{D}{2\gamma} \exp(-\gamma|\tau|). \end{aligned} \quad (7)$$

В этом случае полную систему исходных уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vartheta\ddot{x} + \dot{x} &= \varepsilon [F + f(x)] + \vartheta\ddot{\xi} + \dot{\xi}, \\ \dot{\xi} &= -\gamma\xi + N(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где $N(t)$ — белый гауссовский шум, имеющий корреляционную функцию $\langle N(t)N(t + \tau) \rangle = D\delta(\tau)$. При $\vartheta \neq 0$ наличие второй производной от внешнего шума в правой части первого уравнения системы (8) значительно усложняет использование уравнения Фоккера–Планка (см. [6]). Однако метод усреднения позволяет исследовать эту проблему достаточно простыми средствами.

3. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

Вернемся к уравнению (2), записав его в виде

$$\hat{L}y = \left(\vartheta \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} \right) y(t) = \varepsilon [F + f(y + \xi)]. \quad (9)$$

Основной идеей метода усреднения является усреднение правой части этого уравнения по времени, для того чтобы выделить «медленное» движение. В зависимости от вида решаемой задачи существует целый ряд алгоритмов метода усреднения (см., например, [25–30]). В наших работах [1, 18–23] мы основывались главным образом на алгоритмах, изложенных в [27, 28], в которых характерное время усреднения в пределе неограниченно возрастает. Впрочем, содержание метода не претерпевает кардинальных изменений, если фиксировать T , но уменьшать время корреляции внешнего шума. В обоих случаях существенным является использование эргодичности [3, 5, 27] случайной функции $f(y + \xi)$ при фиксированном $y = c = \text{const}$, $|c| < \infty$. Это свойство является главным приближением данной теории, хотя в работе [27] показано, что, вообще говоря, достаточно, чтобы функция $f(c + \xi)$ удовлетворяла условию сильного перемешивания.

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\hat{L}\bar{y} = \varepsilon [F + q(\bar{y})], \quad (10)$$

которое, так же как и в [30], будем называть уравнением сравнения. Здесь $\bar{y}(t)$ — детерминистическая (не случайная) функция и $\varepsilon q(\bar{y}) = \varepsilon \langle f(\bar{y} + \xi) \rangle$ — некоторая детерминистическая сила, которая в дальнейшем предполагается гладкой функцией. Тогда эту силу удобно определить с помощью эффективного, или стохастического, потенциала

$$U_{eff}(\bar{y}) = \langle U(\bar{y} + \xi) \rangle \quad (11)$$

по обычному правилу

$$q(\bar{y}) = - \frac{\partial U_{eff}(\bar{y})}{\partial \bar{y}}.$$

Возможность введения эффективного потенциала является существенным фактором для данной теории.

Функцию $\bar{y}(t)$ будем называть усредненным движением системы. Важно, что для ее нахождения использовано статистическое усреднение правой части уравнения (9) вместо усреднения по времени. Точность такой замены зависит от реального конечного интервала времени усреднения. Этот интервал,

вообще говоря, не может быть больше, чем минимальное, отличное от нуля, время T_{min} из всех характерных времен переходных процессов, определяемых общим решением уравнения (10). Поскольку случайный процесс $f(c + \xi)$ является эргодическим процессом, при $\tau_0 \ll T_{min}$, где τ_0 — время корреляции процесса $\xi(t)$, замена усреднения по времени на усреднение по ансамблю имеет точность порядка τ_0/T_{min} . Следовательно, это отношение как раз и служит мерой реального безразмерного малого параметра $\mu \sim \tau_0/T_{min}$ настоящей теории. Частото это условие обозначают тем, что вводят «медленное» время $t' = \mu t$, и тогда параметр μ становится параметром асимптотических разложений [5, 25]. Однако с целью более ясной физической интерпретации результатов мы не будем вводить двух времен — «быстрого» и «медленного» [29]. В рассматриваемой здесь задаче из линеаризованного уравнения (4) вблизи устойчивых точек при $\zeta = 0$ и $F = 0$ следует характеристическое уравнение вида $\vartheta \lambda^2 + \lambda \approx -\varepsilon$, откуда находим, что в качестве T_{min} необходимо брать меньшее из двух времен:

$$T_{1,2} \propto 2\vartheta / \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon\vartheta} \right). \quad (12)$$

При этом, чтобы избежать сложного вопроса о времени усреднения в случае колебательной релаксации системы, ниже предполагается выполненным неравенство $4\varepsilon\vartheta \lesssim 1$ (случай аperiодической релаксации).

Рассмотрим разность $v(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ между точным решением уравнения (9) и усредненным решением $\bar{y}(t)$ уравнения (10). Она удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}v = \varepsilon [f(\bar{y} + v + \xi) - \langle f(\bar{y} + \xi) \rangle]. \quad (13)$$

Правую часть этого уравнения можно представить в виде тейлоровского ряда по степеням v , получив тем самым уравнения для последовательных приближений. В связи с этим удобно задать начальное условие для $v(t)$ в виде $v(t_0) = 0$. Тогда следует, что $x(t_0) = x_0 + \xi(t_0)$, где x_0 — некоторая заданная неслучайная величина. Кроме того, если положить $\bar{y}(t_0) = x_0$, то совокупность таких начальных условий фактически означает, что при $t < t_0$ потенциальное поле как бы выключено и движение свободной броуновской частицы в системе отсчета, связанной с потенциалом, описывается случайным процессом $x(t) = x_0 + \xi(t)$.

Учитывая (3), запишем искомую функцию $x(t)$ в

виде

$$\begin{aligned} x(t) &= y + \xi = \bar{y} + v - \langle v \rangle + \langle v \rangle + \xi = \\ &= \bar{x}(t, \bar{y}(t)) + \xi(t) + u(t, \bar{y}(t)), \end{aligned}$$

где $\bar{x} = \bar{y} + \langle v \rangle$ описывает медленную компоненту движения, а $u = v - \langle v \rangle$ совместно с ξ — быструю. При $t \geq t_0$ представим функцию $v(t)$ в виде степенного ряда:

$$v(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m v_m(t). \quad (14)$$

Тогда с учетом тейлоровского разложения уравнение (13) приобретает вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{m-1} \hat{L}v_m(t) &= f(\bar{y} + \xi) - \langle f(\bar{y} + \xi) \rangle + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m f(\bar{y} + \xi)}{d\bar{y}^m} v^m. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (14) и собирая слагаемые одного порядка по ε , можно найти уравнения последующих приближений.

В частности, в первом приближении ($m = 1$) имеем

$$\hat{L}v_1(t) = f(\bar{y} + \xi) - \langle f(\bar{y} + \xi) \rangle. \quad (15)$$

Мы видим, что $\langle v_1 \rangle = 0$. Соответственно, $v_1 \equiv u_1$, и поправка к усредненному движению равна нулю. Быстрое движение $u_1(t)$ описывается уравнением

$$\hat{L}u_1(t, \bar{y}(t)) = f(\bar{y}(t) + \xi(t)) - \langle f(\bar{y}(t) + \xi(t)) \rangle. \quad (16)$$

В важном случае, когда $y_0 = x_0 = \text{const}$ является устойчивой точкой уравнения (10), можно не рассматривать переходные процессы, задаваемые этим уравнением, и процесс $f(y_0 + \xi)$ будет стационарным. В этом случае уравнение (16) описывает упомянутую выше нелинейную диффузию, если $t - t_0 \gg \tau_0$ и спектральная плотность $S_1(\omega)$ процесса в правой части удовлетворяет условию $S_1(0) \neq 0$. По аналогии с соотношением (1) коэффициент этой диффузии можно записать в виде

$$\Lambda = \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(\tau) d\tau, \quad (17)$$

где $\Psi_1(\tau)$ — корреляционная функция случайного процесса $f(y_0 + \xi)$. Важно, что диффузионное время $1/\Lambda$ фактически определяет интервал времени, внутри которого использование первого приближения является наиболее эффективным. Если время

$t - t_0$ превышает $1/\Lambda$, то поправка за счет нелинейной диффузии становится порядка единицы, и тогда необходимо исследование последующих приближений.

Уравнения второго и третьего приближений ($m = 2, 3$) имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{L}v_2 &= f'(\bar{y} + \xi)v_1, \\ \hat{L}v_3 &= f'(\bar{y} + \xi)v_2 + \frac{1}{2} f''(\bar{y} + \xi)v_1^2, \end{aligned} \quad (18)$$

где штрихом обозначена частная производная по \bar{y} . Отсюда следует, что поправки $\langle v_2 \rangle$ и $\langle v_3 \rangle$ к медленному движению, вообще говоря, уже не равны нулю. Однако конкретный расчет этих и более высокого порядка поправок зависит от вида нелинейной функции $f(y)$ и обычно уже достаточно сложен (см. ниже).

4. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

В качестве примера применения изложенной теории далее рассматривается гармонический потенциал $U(x) = -\cos x$. В этом случае уравнение (4) приобретает вид

$$\vartheta \ddot{x} + \dot{x} = \varepsilon(F - \sin x) + \zeta(t).$$

Уравнения такого типа часто используются для описания систем синхронизации в теории колебаний [2], сверхпроводимости (эффект Джозефсона [31]) и т. д. Действительно, при $|F| \leq 1$ и в отсутствие шума ($\zeta = 0$) броуновская частица стремится зафиксироваться в одной из устойчивых точек $x_n = 2\pi n + \arcsin F$. Это явление называется захватом или синхронизацией (если говорить, например, о фазах сигнала и генератора в системах фазовой синхронизации или о фазах волновых функций куперовских пар по разные стороны контакта Джозефсона). Область $|F| \leq 1$ называется зоной захвата (или синхронизации). Если $\vartheta = 0$, нетрудно найти, что вне зоны захвата средняя по времени скорость частицы имеет вид $\langle \dot{x} \rangle = \varepsilon \sqrt{F^2 - 1}$ [2, 31].

Поскольку $\langle \xi \rangle = 0$, в первом приближении теории медленное движение $\bar{x}(t)$ частицы совпадает с усредненным движением $\bar{y} = \bar{x} + o(\varepsilon)$ в лабораторной системе отсчета и описывается уравнением сравнения (10):

$$\vartheta \ddot{\bar{x}} + \dot{\bar{x}} = \varepsilon \left[F - \frac{\partial U_{\text{eff}}(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \right]. \quad (19)$$

Далее предполагается, что шум $\xi(t)$ является процес-

сом Орнштейна–Уленбека. Поэтому эффективный потенциал (11) имеет вид [3]

$$U_{eff}(\bar{x}) = -\langle \cos(\bar{x} + \xi) \rangle = -\Omega_{eff} \cos \bar{x},$$

где, согласно выражению (7),

$$\Omega_{eff} = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{D}{4\gamma}\right). \quad (20)$$

Ранее [1] мы назвали эту величину эффективной полушириной зоны захвата усредненного движения броуновской частицы. Как подчеркивалось в работе [1], зависимость эффективной зоны захвата от дисперсии шума $\xi(t)$ определяется плотностью функции распределения вероятности для этого шума. В частности, в этой же работе исследовался случай равномерной плотности распределения.

Далее не рассматриваются свойства нелинейной диффузии, которые подробно изучены нами ранее [1, 20, 21, 23]. Отметим только существенный с точки зрения физической картины факт — независимо от интенсивности (дисперсии) шума $\xi(t)$ коэффициент нелинейной диффузии (17) ограничен и даже начинает уменьшаться с ее ростом. Это вызвано тем, что при увеличении интенсивности шума $\xi(t)$ влияние нелинейности системы начинает ослабевать, а движение броуновской частицы будет стремиться к стационарному процессу $\xi(t)$, поскольку в пределе должно получиться именно такое стационарное движение свободной частицы. Такое поведение коэффициента диффузии совершенно противоположно случаю белого шума, когда уменьшение роли нелинейности приводит к тому, что движение частицы стремится к нестационарному процессу с некоррелированными приращениями.

Остановимся на вопросе, какого порядка вклад в медленное движение дает второе приближение. Для упрощения расчетов возьмем случай передемфированной частицы ($\vartheta = 0$). Пусть $\bar{y} = y_0 = \text{const}$ является некоторой устойчивой точкой уравнения сравнения (10), в котором

$$q(y_0) = -\langle \sin(y_0 + \xi) \rangle = -\Omega_{eff} \sin y_0.$$

Тогда, согласно соотношениям (15) и (18), уравнения первого и второго приближений принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &= f(\bar{y} + \xi) - \langle f(\bar{y} + \xi) \rangle = \\ &= -\sin(y_0 + \xi) + \langle \sin(y_0 + \xi) \rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{df(\bar{y} + \xi)}{d\bar{y}} v_1 = -\cos(y_0 + \xi) v_1. \quad (22)$$

Используя формулу, аналогичную формуле (20), но для суммы или разности двух гауссовских величин $c_1 + \xi_1$ и $c_2 + \xi_2$, где c_1 и c_2 — произвольные числа, $\xi_1 = \xi(t)$ и $\xi_2 = \xi(t + \tau)$, можно получить следующее выражение [3]:

$$\begin{aligned} \langle \cos(c_1 \pm c_2 + \xi_1 \pm \xi_2) \rangle = \\ \text{Re} \left\{ \exp i(c_1 \pm c_2) \exp \left[-\frac{1}{2} \langle (\xi_1 \pm \xi_2)^2 \rangle \right] \right\} = \\ = \cos(c_1 \pm c_2) \exp \left[-(\sigma^2 \pm \langle \xi_1 \xi_2 \rangle) \right], \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \langle \sin[c_1 + \xi(t)] \sin[c_2 + \xi(t - \tau)] \rangle = \\ = \frac{1}{2} \cos(c_1 - c_2) \exp \left\{ -[\sigma^2 - \Psi(\tau)] \right\} - \\ - \frac{1}{2} \cos(c_1 + c_2) \exp \left\{ -[\sigma^2 + \Psi(\tau)] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\Psi(\tau) = \langle \xi_1 \xi_2 \rangle = \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle$ — корреляционная функция процесса $\xi(t)$. Проинтегрируем уравнение (21) от нуля до t и подставим полученный результат в уравнение (22). Проведя статистическое усреднение последнего, найдем с помощью формулы (23) следующее уравнение для поправки $\langle v_2 \rangle$ второго порядка к усредненному движению:

$$\begin{aligned} \langle \dot{v}_2 \rangle = -\frac{1}{2} \exp(-\sigma^2) \sin(2y_0) \times \\ \times \left\{ \int_0^t [1 - \exp(-\Psi(\tau))] d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Для случая процесса Орнштейна–Уленбека интеграл в правой части не превышает числа

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \{1 - \exp[-\sigma^2 \exp(-\gamma\tau)]\} d\tau = \\ = \frac{\gamma_0 + 2 \ln \sigma + E_1(\sigma^2)}{\gamma}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\gamma_0 \approx 0.577$ — постоянная Эйлера и $E_1(z)$ — интегральная показательная функция [32]. Анализ скорости роста поправки $\langle v_2 \rangle$ при $t \gg \tau_0$, где $\tau_0 = 1/\gamma$ — время корреляции процесса $\xi(t)$, показывает, что при малой дисперсии $\sigma^2 \ll 1$ эта скорость пропорциональна $\tau_0 \sigma^2$, а при большой ($\sigma^2 \gg 1$) она убывает по крайней мере как $\tau_0 \exp(-\sigma^2)$. Максимум этой скорости достигается при $\sigma^2 \approx 0.82$ и имеет абсолютное значение около $0.15 \tau_0 \sin(2y_0)$. Этот результат показывает, что при $\tau_0 \ll 1$ первое приближение теории достаточно точно описывает движение частицы. Данный факт подтверждается также численным экспериментом, к изложению которого мы переходим.

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

По-видимому, первое подтверждение результатов, полученных нами в [1], дано в [33], где проведен численный эксперимент на основе схемы Хьюна (Heun scheme). Позже в нашей работе [23] был изложен результат численного эксперимента на основе предикт-корректорного алгоритма [34], который фактически подтвердил существование эффективной зоны захвата частицы в периодическом потенциале с детерминированной фазой. В обоих случаях рассматривалось движение передемфированной броуновской частицы ($\vartheta = 0$) под действием внешнего зеленого шума, задаваемого в виде производной по времени от процесса Орнштейна–Уленбека.

Чтобы проверить изложенные выше теоретические результаты для случая периодического потенциала с флуктуирующей фазой, было осуществлено численное интегрирование стохастической системы уравнений (8). Как и в [23], использовался предиктор-корректорный алгоритм порядка $O(h^{3/2})$, где h — шаг интегрирования по времени [34]. Время t в расчетах измерялось в единицах $1/\varepsilon$. Расчетной величиной была зависимость средней по времени скорости частицы $\langle\langle \dot{x} \rangle\rangle = (x_N - x_1)/Nh$ от внешней силы F , где N — число шагов. В теории синхронизации эта функция описывает среднюю разность между частотами сигнала и собственного генератора системы фазовой автоподстройки при изменении их начальной расстройки [2], а в теории эффекта Джозефсона — усредненную вольт-амперную характеристику джозефсоновского контакта [31].

При $\vartheta = 0$ алгоритм имел вид

$$x_{i+1} = x_i + gY_i h^{1/2} + (F - \sin x_i - \gamma \xi_i)h - (\gamma + \cos x_i)gZ_i h^{3/2},$$

$$\xi_{i+1} = \xi_i + gY_i h^{1/2} - \gamma \xi_i h - \gamma gZ_i h^{3/2},$$

где Y_i и Z_i — два случайных нормальных независимых числа с единичной дисперсией и $g^2 = D$. Время корреляции шума было равным $\tau_0 = 1/\gamma = 0.1$, т. е. реальный малый параметр теории составлял $\mu \sim \varepsilon \tau_0 = 0.1$. Далее представлены результаты численных расчетов для $N = 2 \cdot 10^7$, $h = 0.0025$ и $D = 4$. На рис. 2 точки на кривой 1 представляют реализацию численного эксперимента для случая зеленого шума. Сама кривая 1 представляет теоретический результат, даваемый уравнением (19) с эффективной зоной захвата, определяемой соотношением (20), т. е. $\langle \dot{x} \rangle = 0$ при $|F| \leq \Omega_{eff}$ и $\langle \dot{x} \rangle = \sqrt{F^2 - \Omega_{eff}^2}$ при $|F| > \Omega_{eff}$. Мы видим, что этот теоретиче-

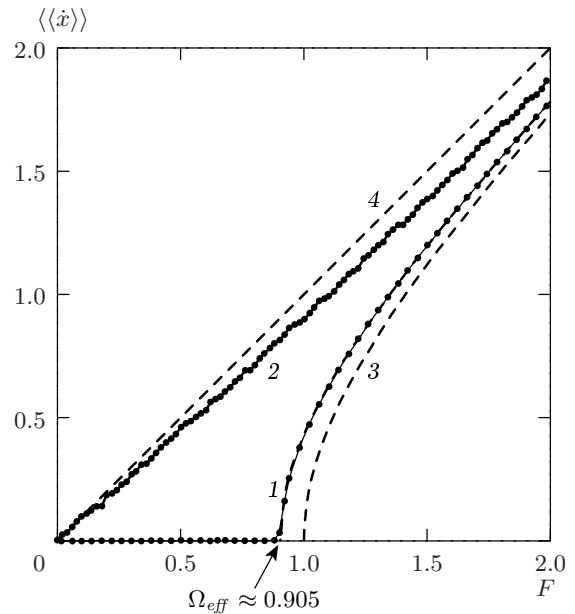


Рис. 2. Результат численного расчета зависимости средней по времени скорости передемфированной частицы в системе отсчета, связанной с потенциальной кривой, от величины внешней постоянной силы

ский результат хорошо совпадает с результатом, даваемым численным экспериментом. Кривая 2 дана для случая белого шума ($\gamma = 0$) и для той же самой последовательности чисел Y_i и Z_i . Штриховая кривая 3 представляет идеальный случай без шума ($\Omega_{eff} \equiv 1$). Наконец штриховая кривая 4 соответствует отсутствию нелинейности. Мы видим, что зеленый шум значительно стабилизирует систему в области $|F| \lesssim \Omega_{eff}$.

В случае $\vartheta \neq 0$ алгоритм несколько усложняется:

$$x_{i+1} = x_i + gY_i h^{1/2} + (y_i - \gamma \xi_i)h - \gamma gZ_i h^{3/2},$$

$$z_{i+1} = z_i + \Gamma(-z_i + F - \sin x_i)h - \Gamma gZ_i h^{3/2} \cos x_i,$$

$$\xi_{i+1} = \xi_i + gY_i h^{1/2} - \gamma \xi_i h - \gamma gZ_i h^{3/2},$$

где $z = \dot{x}$ и $\Gamma = 1/\vartheta$. На рис. 3 приведены результаты расчета по этому алгоритму. Кривые 1 и 2 практически слились, параметры для них выбирались таким образом, чтобы Ω_{eff} имела одно и то же значение, равное 0.875, а малый параметр, определяемый выражением (12), составлял $\mu \sim \tau_0/T_1 \approx 0.2$. Параметры численного эксперимента в случае кривой 3 ($\Omega_{eff} = 0.875$) выходят за рамки условия, при котором релаксация является аперiodической ($4\vartheta \lesssim 1$), и это сразу сказалось на поведении кривой — она пошла круче первых двух.

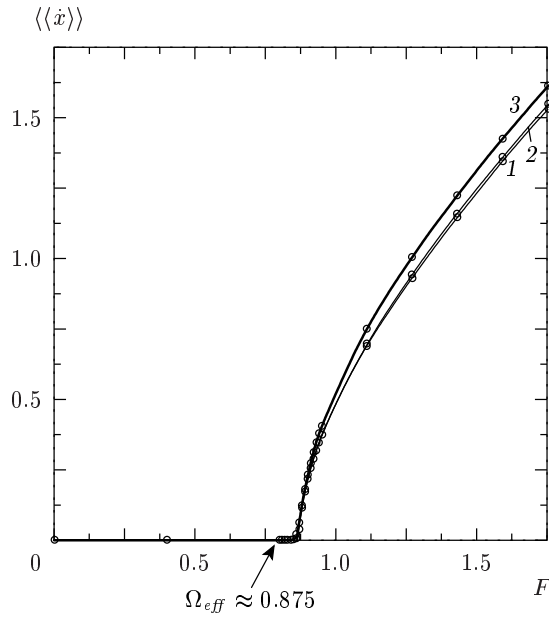


Рис. 3. Результат численного расчета средней по времени скорости частицы с учетом конечности ее массы при следующих значениях параметров: 1 — $\tau_0 = 0.05$, $\vartheta \approx 0.17$, $D \approx 10.7$; 2 — $\tau_0 = 0.1$, $\vartheta = 0.25$, $D \approx 5.34$; 3 — $\tau_0 = 0.1$, $\vartheta = 0.5$, $D \approx 5.34$

На всех кривых рис. 2 и 3 хорошо видна эффективная зона синхронизации, причем ее полуширина совпадает с полученной аналитически. Это позволяет сделать вывод о том, что численное моделирование движения частицы во флуктуирующем потенциале вполне подтверждает теорию, основанную на методе усреднения и понятии эффективного потенциала. Более того, можно утверждать, что в случае зеленого шума понятие зоны захвата или синхронизации в различных стохастических системах практически сохраняет свое классическое значение.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Физическую картину движения рассмотренной выше броуновской частицы можно пояснить следующим образом. Пусть в некоторый начальный момент t_0 частица находится в устойчивой точке x_0 периодического потенциала. Случайное стационарное смещение $\xi(t)$ этой потенциальной кривой относительно лабораторной системы координат приведет также к стационарному случайному движению $x(t) + \xi(t)$ частицы в системе отсчета потенциала. В силу слабости нелинейной диффузии такое движение частицы будет сохраняться длительное время. Однако если

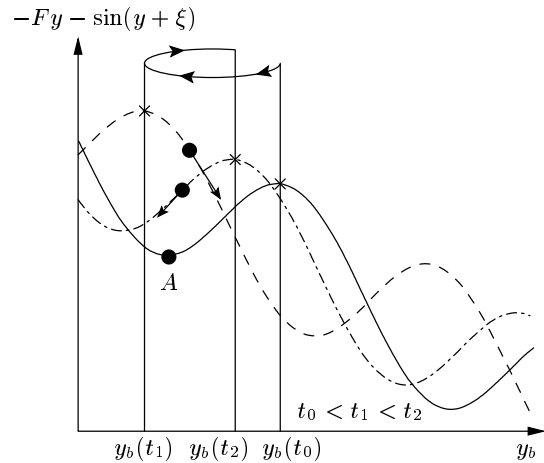


Рис. 4. Иллюстрация процесса захвата броуновской частицы в области устойчивой точки A при флуктуациях фазы потенциала. Крестиком обозначены положения потенциального барьера в разные моменты времени

точка x_0 близка к некоторому значению, при котором положение частицы ниже ближайшего максимума потенциала (барьера) на величину около Ω_{eff} , то вероятность преодолеть этот барьер за счет выбросов случайного стационарного движения частицы становится значительной. Тогда частица «перевалит» за максимум и, вообще говоря, может выйти из области захвата. Именно здесь важную роль играет свойство отрицательного последействия зеленого шума, поскольку оно может изменить сценарий и сыграть противоположную роль — заставить частицу вернуться в область захвата, даже если она на некоторое время переходит через барьер. В свете задачи, рассмотренной в данной статье, эта ситуация выглядит следующим образом. Пусть частица в некоторый момент $t_1 > t_0$ оказалась за барьером. Однако в силу инерции она может и не успеть выйти из области захвата, если флуктуация барьера быстро «вернула» ее назад в момент $t_2 > t_1$. Этот процесс иллюстрируется на рис. 4, где y_b — координата барьера в лабораторной системе отсчета. Если же предположить, что шум $\xi(t)$ является белым, то приращения координаты частицы относительно потенциальной кривой будут независимы, ее смещение накапливается по диффузионному закону и частица преодолевает барьер, выходя из зоны захвата практически сразу, как только ее координата достигает этого максимума.

В заключение отметим, что выше проведено исследование влияния зеленого шума на стохастиче-

ские системы на примере броуновской частицы в случайно возмущаемом потенциальном поле. Получено хорошее совпадение теории с численным экспериментом. Результаты, полученные здесь и в упомянутых выше наших работах, имеют достаточно общий характер и пригодны для расчета многих систем локации, синхронизации, лазерной физики, физики твердого тела и в других областях науки и техники, где существенную роль играют случайные процессы типа зеленых шумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Guz and M. V. Sviridov, Phys. Lett. A **240**, 43 (1998).
2. В. И. Тихонов, М. А. Миронов, *Марковские процессы*, Сов. радио, Москва (1977).
3. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, Наука, Москва (1981).
4. H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
5. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику*, т. 1, Наука, Москва (1976).
6. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику*, т. 2, Наука, Москва (1978).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1964).
8. Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятности*, Физматгиз, Москва (1961).
9. В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Наука, Москва (1997).
10. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, Наука, Москва (1965).
11. Р. Эллиотт, *Стохастический анализ и его приложения*, Мир, Москва (1986).
12. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению*, Изд-во Лань, Санкт-Петербург (2000).
13. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы*, Мир, Москва (1987).
14. *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*, ed. by F. Moss and P. V. E. McClintock, Vol. 1-3, Cambridge University Press (1989).
15. Дж. Кайзер, *Статистическая термодинамика неравновесных процессов*, Мир, Москва (1990).
16. L. Schimansky-Geier and Ch. Zulicke, Z. Phys. B **79**, 451 (1990).
17. J. D. Bao and S. J. Liu, Phys. Rev. E **60**, 7572 (1999).
18. А. Р. Арсеньев, С. А. Гуз, М. В. Свиридов, *Радиотехника и электроника* **43**, 415 (1998).
19. С. А. Гуз, Ю. Г. Красников, М. В. Свиридов, ДАН **365**, 34 (1999).
20. С. А. Гуз, *Радиотехн. и электрон.* **45**, 444 (2000).
21. S. A. Guz, I. G. Ruzavin, and M. V. Sviridov, Int. J. Infrared and Millimeter Waves **21**, 285 (2000).
22. S. A. Guz, I. G. Ruzavin, and M. V. Sviridov, Phys. Lett. A **274**, 104 (2000).
23. S. A. Guz and M. V. Sviridov, Chaos **11**, 605 (2001).
24. J. D. Bao, Phys. Lett. A **256**, 356 (1999).
25. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1974).
26. Р. Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике*, Сов. радио, Москва (1961).
27. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, Наука, Москва (1979).
28. Н. Н. Моисеев, *Асимптотические методы нелинейной механики*, Наука, Москва (1981).
29. А. Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах*, Наука, Москва (1968).
30. Е. А. Гребенников, *Метод усреднения в прикладных задачах*, Наука, Москва (1986).
31. М. Букингем, *Шумы в электронных приборах и системах*, Мир, Москва (1986).
32. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979).
33. R. Mannella, Fluctuation and Noise Letters **1**(2), L45 (2001).
34. R. Mannella, in *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*, ed. by F. Moss and P. V. E. McClintock, Vol. 3, Cambridge University Press (1989), p. 189.