

НАРУШЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОЙ СИММЕТРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ПРИ БЫСТРОМ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ ЗОНУ ХАОСА В ОКНО ПРОЗРАЧНОСТИ

С. Г. Бильчинская^a, О. Я. Бутковский^{b*}, Ю. А. Кравцов^{c**},

И. А. Рычка^a, Е. Д. Суровяткина^{a***}

^a Камчатский государственный технический университет
683003, Петропавловск-Камчатский, Россия

^b Владимирский государственный университет
600029, Владимир, Россия

^c Институт космических исследований Российской академии наук
117810, Москва, Россия

Institute of Physics, Maritime University, Szczecin, 70500, Poland

Поступила в редакцию 29 декабря 2001 г.

Рассмотрена задача о переходе зашумленной динамической системы через зону хаоса в режим периодических колебаний. На примере зашумленного логистического отображения найдены области притяжения энергетически равноправных режимов периода три при различных скоростях перехода и различных уровнях шума. Выявлена тонкая структура областей притяжения при быстрых переходах. Обнаружено, что время установления устойчивого цикла периода три существенно зависит от начальных условий, т. е. от структуры областей притяжения. Оценена критическая скорость перехода, отделяющая область вероятностной симметрии конечных состояний от области динамического поведения траекторий.

PACS: 05.40.-a, 05.45.Gg, 05.45.Pq

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамические системы, которые могут находиться в одном из нескольких энергетически равноправных устойчивых состояний или режимов, занимают выделенное место среди всего многообразия нелинейных систем. К этому классу принадлежат системы, испытывающие бифуркации спонтанного нарушения симметрии [1], системы, допускающие бифуркации удвоения периода [2], а также вырожденные параметрические системы [3]. Устойчивые колебания в таких системах различаются фазовым сдвигом $\Delta\varphi = 2\pi/M$, где M — кратность выро-

ждения. Сходными свойствами обладают поляризационно-вырожденные лазерные системы [4]. Аналогами систем с несколькими энергетически равноправными состояниями в химии являются молекулы-изомеры [5, 6].

Особенностью бифуркационных переходов в перечисленных выше системах является вероятностная симметрия конечных состояний. Такая равновесность непосредственно связана с воздействием шумов на систему в момент бифуркационного перехода. При наличии M равноправных режимов вероятность возникновения любого из них составляет $1/M$. При $M = 2$ каждое из двух устойчивых состояний реализуется с вероятностью $1/2$.

Экспериментально наблюдаемой равновесности энергетически равноправных режимов противо-

*E-mail: olegb@vpti.vladimir.ru

**E-mail: kravtsov@asp.iki.rssi.ru

***E-mail: selena@iki.rssi.ru

стоит известное свойство из теории динамических систем: в согласии с теоремой Коши траектория системы однозначно определяется начальными условиями [7, 8]. Противоречие между равновероятностью конечных состояний в зашумленных бифуркационных системах и их неравноправностью в отсутствие шумов получило название бифуркационного парадокса [9]. Разрешение бифуркационного парадокса для частного случая бифуркации удвоения периода в одномерном отображении было дано в работах [10, 11], в которых было показано, что, меняя соотношение между уровнем шумов σ_η^2 в системе и скоростью $s = dr/dt$ изменения бифуркационного параметра r , можно проследить непрерывный переход от случая вероятностной симметрии, характерной для медленных переходов в зашумленных системах, к случаю сильно нарушенной вероятностной симметрии, наблюдаемой при быстрых переходах или при слабой зашумленности.

В работах [10, 11] было показано, что критический уровень шума $(\sigma_\eta^2)_c$, разделяющий плоскость «уровень шума σ_η^2 — скорость перехода s » на области вероятностной симметрии и вероятностной асимметрии динамически предсказуемых конечных состояний, подчиняется степенному закону:

$$(\sigma_\eta^2)_c \propto s^\alpha, \quad (1)$$

где α принимает значения от единицы до пяти в зависимости от начальных условий. Результаты, полученные в [10, 11] для умеренных значений σ_η^2 и s , впоследствии были расширены в работе [12] на случай произвольных значений этих величин. Явление нарушения вероятностной симметрии позднее было исследовано экспериментально на примере конкретной радиофизической системы [13].

Для иных физических систем, в частности для химических реакций, приводящих к появлению правых и левых изомеров, бифуркационный парадокс пока еще не получил сколько-нибудь удовлетворительного объяснения [5, 6].

В данной работе мы рассмотрим условия нарушения вероятностной симметрии в динамической системе, которая проходит через зону хаоса и попадает в режим периодических колебаний. В качестве объекта исследования мы возьмем логистическое отображение, допускающее переход через хаос в колебательный режим периода три. Постановка задачи о прохождении траектории через зону хаоса изложена в разд. 2. Бассейны притяжения конечных периодических состояний в отсутствие шумов найдены в разд. 3, а при наличии шумов — в разд. 4. Интерпретация результатов на основе линейной теории возму-

щений дана в разд. 5, где построена приближенная граница, разделяющая области нарушенной и ненарушенной вероятностной симметрии. В силу экспоненциального роста флуктуаций в хаотическом режиме эта граница оказывается смещенной в сторону меньших уровней шума σ_η^2 по сравнению со степенной зависимостью (1).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве простейшей модели динамической системы, допускающей переход через хаос к замкнутым периодическим траекториям, рассмотрим логистическое отображение

$$x_{n+1} = F(x_n) + \eta_n = r_n x_n (1 - x_n) + \eta_n, \quad (2)$$

где η_n — флуктуационное воздействие, а r_n — управляющий параметр, зависящий от дискретного времени n . В отличие от работ [9–13], где анализу подвергались процессы только в окрестности первой бифуркации удвоения периода ($r \approx r_{c1} = 3$), здесь мы существенно расширим диапазон допустимых изменений параметра r , а именно, примем, что r линейно изменяется от начального значения $r_0 = 2.84$ ($r_0 < r_{c1}$) до конечного значения r_f , попадающего в зону $\rho_1 = 3.829 < r_f < \rho_2 = 3.845$ периодических колебаний («окно прозрачности») периода три (рис. 1). Стартуя от значения r_0 , система проходит сначала через каскад бифуркаций удвоения периода r_{c1}, r_{c2}, \dots , который простирается до критического значения $r_\infty = 3.659$, затем пересекает зону хаоса и, наконец, попадает в окно периодичности (ρ_1, ρ_2). При численном моделировании возьмем значения $r_0 = 2.84$ и $r_f = 3.84$. После достижения управляющим параметром конечного значения $r = r_f$ за N шагов система совершает еще достаточное количество дополнительных шагов, для того чтобы завершился переходный процесс вхождения в один из трех возможных устойчивых режимов колебаний периода три.

Скорость перехода из начального состояния $r = r_0$ в конечное состояние $r = r_f$ можно характеризовать как производной

$$s = \frac{dr}{dn} \approx \frac{\Delta r}{\Delta n} = \frac{r_f - r_0}{N}, \quad (3)$$

так и непосредственно числом шагов $\Delta n = N$, необходимых для преодоления интервала $\Delta r = r_f - r_0$. Согласно (3), число шагов N связано с s соотношением $N = (r_f - r_0)/s$.

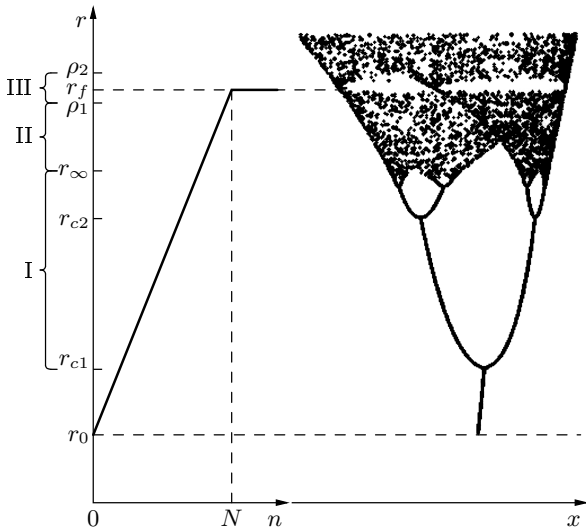


Рис. 1. Принятая при расчетах линейная модель увеличения управляющего параметра r_n от начального значения r_0 до конечного значения r_f за N итераций. Справа показана бифуркационная диаграмма, на которой видно окно прозрачности в окрестности r_f (I — каскад бифуркаций удвоения периода, II — зона хаоса, III — зона устойчивых колебаний периода)

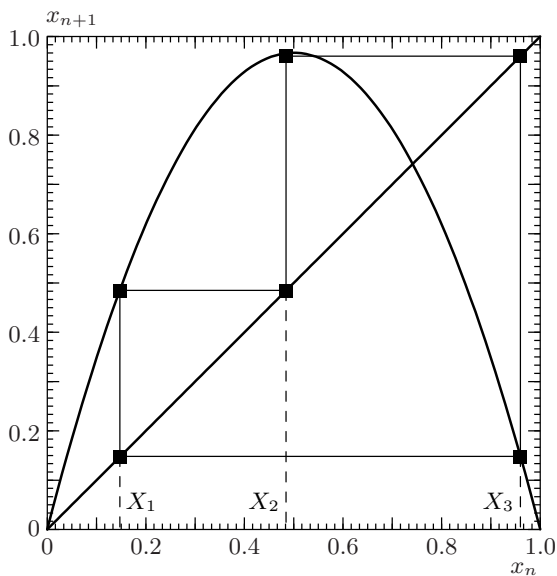


Рис. 2. Замкнутая траектория периода 3 при значении управляющего параметра $r_f = 3.84$, лежащего в интервале от $r = 3.829$ до $r = 3.845$. Замкнутой траектории отвечают три периодических решения, различающиеся начальными значениями X_1 , X_2 или X_3

Таким образом, мы принимаем, что система начинает движение с начального значения x_0 , лежащего в интервале $(0,1)$, и после прохождения через каскад бифуркаций удвоения периода и через зону хаоса оказывается в зоне притяжения одного из трех периодических режимов периода три, которые отвечают замкнутой траектории, показанной на рис. 2.

Условимся режимами (состояниями) 1, 2, 3 называть соответственно последовательности

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} &= \{X_1 X_2 X_3 X_1 X_2 X_3 \dots\}, \\ x_n^{(2)} &= \{X_2 X_3 X_1 X_2 X_3 X_1 \dots\}, \\ x_n^{(3)} &= \{X_3 X_1 X_2 X_3 X_1 X_2 \dots\}, \end{aligned} \quad (4)$$

которые отличаются друг от друга начальной «фазой», т. е. начальным значением (X_1 , X_2 или X_3) на замкнутой траектории.

3. БАССЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ОТСУТСТВИЕ ШУМОВ

Определение бассейнов притяжения конечных режимов $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$, $x_n^{(3)}$ сводится к нахождению множества начальных значений $x_0^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, приводящих в конечном счете к режимам 1, 2 и 3. Задача определения множеств $x_0^{(i)}$ не имеет аналитического решения, и поэтому мы вынуждены были прибегнуть к численному моделированию, результаты которого в отсутствие шумов представлены на рис. 3, где показана вероятность попадания в каждый из трех режимов в зависимости от начальных условий. Переход от r_0 до r_f осуществлялся за 20 шагов, после чего системе предоставлялась возможность завершить переходный процесс, который занимал еще до 1000 дополнительных итераций. Вычисления проводились с сеткой $\Delta x_0 = 10^{-6}$.

Вероятности попадания в режимы 1, 2, 3 представлены на рис. 3. Как показали вычисления, на оси начальных значений существуют протяженные устойчивые области, покидая которые система со 100-процентной вероятностью попадает в один из режимов 1, 2 или 3. Протяженные устойчивые области притяжения перемежаются рядом коротких интервалов начальных значений длиной 10^{-6} и менее, в которых весьма малые перемещения по оси x_0 приводят к изменению конечного состояния. Такие ряды коротких интервалов будем называть зонами в виде решетки (riddle basins). Столь высокая чувствительность к начальным условиям в пределах этих зон в известной нам литературе по динамическим бифуркациям ранее не отмечалась. С увеличением

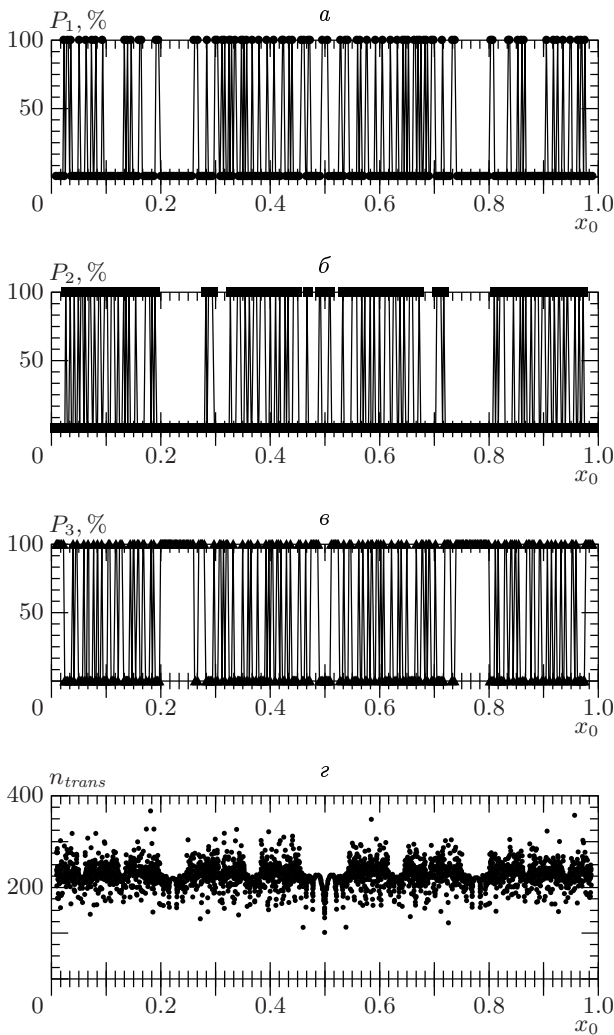


Рис. 3. Зависимости вероятности попадания в режимы 1, 2 и 3 (соответственно *a*, *b* и *c*) при $N = 20$ и числа шагов n_{trans} , необходимых для установления периодических режимов (*d*), от начальных значений x_0

количества шагов N , т. е. с уменьшением скорости s изменения параметра r структура бассейнов притяжения становится все более тонкой.

В итоге бассейны притяжения приобретают значительно более тонкую структуру, чем в случае бифуркации удвоения периода [10, 11].

В ходе численного эксперимента было обнаружено, что время переходного процесса, т. е. время установления устойчивого цикла периода три, существенно зависит от начальных значений. На рис. 3*d* представлена зависимость количества итераций n_{trans} , необходимых для завершения переходного процесса, от начальных значений. Внутри устой-

чивых протяженных зон притяжения для установления достаточно 75–125 итераций, при этом чем шире зона, тем меньше время установления n_{trans} . На границах бассейнов n_{trans} возрастает до 225, а в зонах в виде решетки n_{trans} достигает 325.

4. БАСЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМА

Учтем теперь воздействие флуктуаций η_n , относительно которых примем простейшие допущения: среднее значение η_n равно нулю, $\langle \eta_n \rangle = 0$, а флуктуации η_m и η_n в соседние моменты времени независимы: $\langle \eta_n \eta_m \rangle = \sigma_\eta^2 \delta_{mn}$, где δ_{mn} — символ Кронекера. Кроме того, будем считать, что значения η равномерно распределены в интервале $(-\gamma, +\gamma)$:

$$w(\eta_n) = \begin{cases} 0, & |\eta_n| > \gamma, \\ 1/2\gamma, & |\eta_n| \leq \gamma. \end{cases}$$

Величины σ_η^2 и γ связаны в данном случае соотношением $\sigma_\eta^2 = \gamma^2/3$.

Добавление шума приводит к двум основным эффектам. Во-первых, к размыванию границ областей притяжения, во-вторых, к выравниванию вероятностей достижения конечных режимов, начиная с некоторого критического значения N_c . Оба этих явления наблюдались и при бифуркации удвоения периода [9–11], но в данном случае процесс выравнивания вероятностей идет гораздо быстрее в силу экспоненциального роста флуктуаций в зоне развитого хаоса.

Интенсивность шумового воздействия, необходимая для выравнивания вероятностей, существенно зависит от начальных значений. Внутри бассейнов притяжения требуется более сильное шумовое воздействие для выравнивания вероятностей, чем на границах бассейнов, а также в зонах в виде решетки.

Указанные тенденции отчетливо видны на рис. 4, где показаны зависимости вероятности попадания в режимы 1, 2, 3 от начальных условий при наличии шумов: при $\sigma_\eta = 7.0 \cdot 10^{-4}$ — рис. 4*a*, при $\sigma_\eta = 2.0 \cdot 10^{-3}$ — рис. 4*b*, при шуме $\sigma_\eta = 1.1 \cdot 10^{-2}$ — рис. 4*в*. В последнем случае происходит эффективное выравнивание вероятностей $P_1 = P_2 = P_3$ по всему интервалу начальных значений, так что значение $\sigma_\eta = 1.1 \cdot 10^{-2}$ является критическим для выбранного числа шагов $N = 20$.

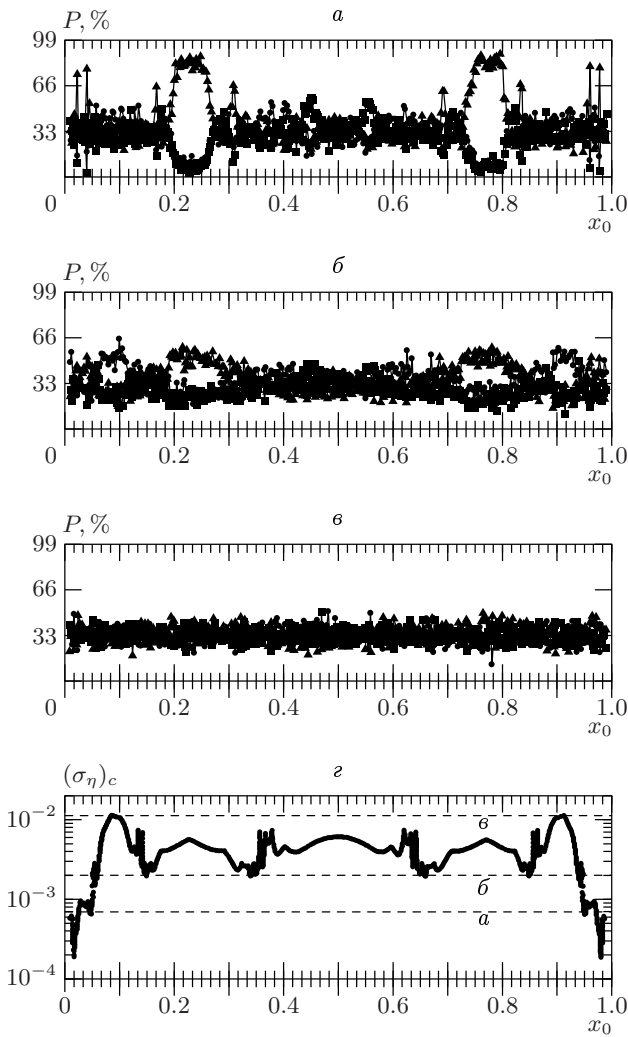


Рис. 4. Постепенное выравнивание вероятностей попадания в состояния $x_n^{(1)}$ (■), $x_n^{(2)}$ (▲) и $x_n^{(3)}$ (●) с ростом шума со среднеквадратичным значением: $a - \sigma_\eta = 7.0 \cdot 10^{-4}$; $b - \sigma_\eta = 2.0 \cdot 10^{-3}$; $c - (\sigma_\eta)_c = 1.1 \cdot 10^{-2}$ ($N = 20$). На рис. d) показана зависимость критического значения шума $(\sigma_\eta)_c$, рассчитанная по формуле (12), от начальных значений x_0 . Горизонтальные штриховые линии на этом графике соответствуют значениям шума на графиках a , b и c

5. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Особенности зон притяжения, представленных на рис. 4, можно проиллюстрировать простым расчетом, основанным на теории возмущений. Пусть в отсутствие шумов система описывается невозмущен-

ным отображением

$$x_{n+1}^{(0)} = F(x_n^{(0)}) \tag{5}$$

В рамках линейной теории возмущений малое отклонение x_n от невозмущенного значения $x_n^{(0)}$, т. е. величина $\xi_n = x_n - x_n^{(0)}$, будет подчиняться уравнению

$$\xi_{n+1} = \varphi_n \xi_n + \eta_n, \quad \xi_0 = 0, \tag{6}$$

где

$$\varphi_n = \left. \frac{\partial F(x_n)}{\partial x_n} \right|_{x_n = x_n^{(0)}}$$

— показатель растяжения в точке $x_n^{(0)}$. Уравнение (6), примененное N раз, дает

$$\begin{aligned} \xi_{N+1} = & \varphi_N \varphi_{N-1} \dots \varphi_1 \eta_0 + \\ & + \varphi_N \varphi_{N-1} \dots \varphi_2 \eta_1 + \dots + \varphi_N \eta_{N-1} + \eta_N. \end{aligned} \tag{7}$$

На этапе прохождения каскада бифуркаций удвоения периода все факторы φ_k по модулю не превышают единицу, при этом и среднее значение $\langle |\varphi_k| \rangle$, которое мы обозначим через ν , тоже меньше единицы:

$$\nu \equiv \langle |\varphi_k| \rangle \leq 1. \tag{8}$$

В зоне хаоса (т. е. в зоне, где $r > r_\infty = 3.659\dots$) среднее значение фактора растяжения $\mu \equiv \langle |\varphi_k| \rangle$, связанного с ляпуновским показателем λ экспоненциальной зависимостью, $\mu \equiv \langle |\varphi_k| \rangle \sim e^\lambda$, превышает единицу. Если сохранить в (7) только доминирующее первое слагаемое, то для среднего квадрата возмущения $\sigma_{N+1}^2 \equiv \langle \xi_{N+1}^2 \rangle$ получим оценку

$$\sigma_{N+1}^2 \approx \mu^{2N_e} \nu^{2(N-N_e)} \sigma_\eta^2. \tag{9}$$

Здесь N — общее число шагов, N_e — эффективное число шагов в зоне хаоса и $N - N_e$ — эффективное число шагов в пределах каскада бифуркаций удвоения периода. Множитель $\nu^{2(N-N_e)}$ в (8) описывает уменьшение флуктуаций внутри каскада удвоений периода, тогда как множитель μ^{2N_e} ответствен за рост флуктуаций в зоне хаоса.

Эффективный процесс выравнивания вероятностей режимов 1, 2 и 3 начинается в условиях, когда среднеквадратичное отклонение σ_{N+1} сравнивается с характерным интервалом $\Delta X \approx |X_i - X_j|$ между последовательными значениями x на замкнутой траектории периода три:

$$\sigma_{N+1}^2 \sim \mu^{2N_e} \nu^{2(N-N_e)} \sigma_\eta^2 \sim |\Delta X|^2. \tag{10}$$

Эта грубая оценка вполне удовлетворительно описывает критическое число шагов N_c , приводящих к выравниванию вероятностей конечных состояний при

заданном уровне шума или же, наоборот, критическое значение уровня шума $(\sigma_\eta^2)_c$ при заданном N .

Величину N_e можно оценить как долю общего числа шагов N в зоне хаотического режима:

$$N_e = N\chi, \quad \chi = \frac{r_f - r_\infty}{r_f - r_0}.$$

Тогда из (10) следует, что при фиксированном уровне шума σ_η

$$N_c \sim \frac{\ln(|\Delta X|/\sigma_\eta)}{\chi \ln \mu + (1 - \chi) \ln \nu}, \quad (11)$$

тогда как при фиксированном N

$$(\sigma_\eta)_c \sim \frac{\Delta X}{[\mu\chi\nu^{(1-\chi)}]^N}. \quad (12)$$

В частном случае $\chi = 1/2$ (система находится в состоянии хаоса примерно половину времени) эти формулы принимают вид

$$N_c = \frac{2 \ln(|\Delta X|/\sigma_\eta)}{\ln(\mu\nu)}, \quad (13)$$

$$(\sigma_\eta)_c = \frac{\Delta X}{(\mu\nu)^{N/2}}. \quad (14)$$

Эта оценка носит преимущественно качественный характер и, как показали численные расчеты, удовлетворительно согласуется с количественными результатами для $N \in [20, 30]$.

На рис. 4г представлен график зависимости $(\sigma_\eta)_c$ от x_0 для $N = 20$ (см. (12)). Значения ν были рассчитаны по формуле (8) для всех начальных значений x_0 и для r от $r_0 = 2.84$ до $r_\infty < 3.659$, а μ — аналогично для $r_\infty \geq 3.659$, учитывая, что $\max \Delta X = X_3 - X_1 = 0.81$. Как видно из графика, критические значения шума существенно зависят от структуры областей притяжения. Горизонтальными штриховыми линиями на рис. 4г указаны уровни шума, влияние которого продемонстрировано на рис. 4а, б, в. Уровень шума $\sigma_\eta = 7.0 \cdot 10^{-4}$ (случай а) достаточен для выравнивания вероятностей в смешанных областях. Уровень шума $\sigma_\eta = 2.0 \cdot 10^{-3}$ (случай б) понижает вероятность внутри областей притяжения до 50 %, тогда как уровень шума $(\sigma_\eta)_c = 1.1 \cdot 10^{-2}$ (случай в) выравнивает вероятности P_1, P_2 и P_3 до значений, отличающихся от 33 % не более чем на 5 %.

График зависимости $N_c(\sigma_\eta)$ представлен на рис. 5. Каждая точка на графике соответствует максимальному значению шума $(\sigma_\eta)_c$ для каждого N на всей оси начальных значений, на рис. 4г этому

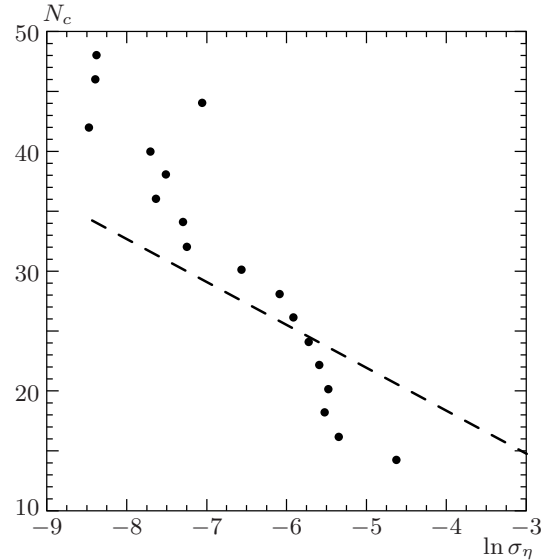


Рис. 5. Результаты численных расчетов (точки) границы $N_c(\sigma_\eta)$, разделяющей плоскость (N, σ_η) на области, отвечающие режиму вероятностной симметрии ($N > N_c$) и режиму нарушенной вероятностной симметрии ($N < N_c$) периодических колебаний. Штрихами обозначены значения N_c , полученные по формуле (13)

соответствует штриховая линия в. В целом рис. 5 отвечает меньшим значениям N , чем степенные зависимости вида (1). Эта особенность является следствием прохождения через хаос. Оценки показывают, что формулы (11), (12) достаточно хорошо согласуются с результатами численных расчетов при количестве шагов $N \in [20, 30]$; при $N < 20$ расчетный критический шум превышает реально необходимый для выравнивания вероятностей уровень шума, а для $N > 30$ расчетный уровень шума ниже полученного экспериментально.

6. ШУМОЗАВИСИМЫЙ ГИСТЕРЕЗИС

Как показано в работах [14, 15], динамические бифуркации сопровождаются явлением гистерезиса, которое заключается в том, что при бифуркационных переходах с изменяющимися параметрами система задерживается в неустойчивом состоянии и лишь спустя некоторое время переходит в одно из возможных устойчивых состояний. Описанное явление наблюдалось и в исследуемой системе, проявлялось в задержке каждой бифуркации удвоения периода и в итоге приводило к задержке наступления хаоса в системе. Чем выше скорость бифуркационно-

го перехода, тем больше время задержки у каждого критического значения. Вследствие этого сдвигаются и окна прозрачности в сторону больших значений управляющего параметра r , если скорость перехода s положительная, и, наоборот, в сторону меньших значений r , если скорость перехода s отрицательная. Наличие шума в системе приводит к разрушению гистерезиса. Критический уровень шума (рис. 5) почти полностью разрушает гистерезис и выравнивает вероятности попадания системы в одно из трех возможных состояний.

По сдвигу окна прозрачности можно судить о скорости бифуркационного перехода, а по ширине окна можно судить об уровне шума в системе. Это явление может быть использовано для измерения шума в хаотических системах с переменными параметрами.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе на примере логистического отображения исследованы переходы зашумленной динамической системы через зону хаоса в режим колебаний периода три.

Показано, что при определенных соотношениях между внешним шумом и скоростью изменения управляющего параметра динамический переход сквозь область хаоса может быть предсказуемым. Установлено существование областей притяжения конечных состояний, которые определяются начальными условиями и скоростью перехода. Выявлено, что протяженные устойчивые области притяжения перемежаются рядом коротких интервалов начальных значений длиной 10^{-6} и менее, в которых весьма малые перемещения по оси x_0 приводят к изменению конечного состояния.

Под воздействием шума или при малых скоростях зоны притяжения размываются, что приводит к выравниванию вероятности по оси начальных условий.

На плоскости «критическое значение шума–скорость перехода» определена граница между динамическим и стохастическим сценариями бифуркационного перехода. Показано, что эта граница смещена в сторону больших шумов, чем в случае бифуркации удвоения периода.

Получены аналитические оценки критического значения уровня шума $(\sigma_n^2)_c$, при котором вероятности попадания в каждое состояние выравниваются для заданного числа шагов N , или, что то же самое, для скорости изменения управляющего параметра.

Аналитические оценки удовлетворительно согласуются с результатами численного моделирования.

На основе явления гистерезиса окон прозрачности предложена возможность измерения шумов в нелинейных системах.

Авторы выражают благодарность РФФИ за поддержку этой работы (проект 02-02-17418) и Институту физики комплексных систем им. Макса Планка (Дрезден, Германия).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Физическая энциклопедия*, т. 4, Изд-во Большая Российская энциклопедия, Москва (1994), с. 652.
2. Г. Шустер, *Детерминированный хаос*, Мир, Москва (1988).
3. А. Е. Каплан, Ю. А. Кравцов, В. А. Рытов, *Параметрические генераторы и делители частоты*, Советское радио, Москва (1966).
4. И. Н. Желудев, *УФН* **157**, 683 (1989).
5. В. И. Гольданский, В. В. Кузьмин, *УФН* **157**, 3 (1989).
6. Л. Л. Морозов, В. И. Гольданский, *Вестн. АН СССР* вып. 6, 54 (1984).
7. М. А. Шишкова, *ДАН СССР* **209**, 576 (1973).
8. А. И. Нейштадт, *УМН* **40**, 300 (1985).
9. О. Я. Бутковский, J. S. Brush, and Yu. A. Kravtsov, in *Predictability of Complex Dynamical System*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (1995).
10. О. Я. Бутковский, Дж. С. Браш, Ю. А. Кравцов, Е. Д. Суровяткина, *ЖЭТФ* **109**, 6 (1996).
11. О. Я. Бутковский, Ю. А. Кравцов, Е. Д. Суровяткина, *ЖЭТФ* **113**, 369 (1998).
12. С. А. Астахов, Б. П. Безручко, Е. П. Селезнев, Д. А. Смирнов, *Изв. вузов, Прикл. нелиней. динамика* **5**(2, 3), 87 (1997).
13. В. Р. Bezruchko, R. N. Ivanov, V. I. Ponomarenko, and Ye. P. Seleznev, in *Proceedings of the 8th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems* (NDES 2001), Delft, Netherlands, June 21–23 2001, p. 231.
14. С. Baesens, *Physica D* **53**, 319 (1991).
15. О. Я. Бутковский, Ю. А. Кравцов, Е. Д. Суровяткина, *ЖТФ* вып. 9, 128 (1997).