ЖЭТФ, 2002, том 122, вып. 2 (8), стр. 419–428

К ТЕОРИИ ПРОВОДИМОСТИ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПЛЕНОК С ДВУХПОДРЕШЕТОЧНОЙ СТРУКТУРОЙ

*Б. Я. Балагуров**

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук 119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 марта 2002 г.

Предложен общий метод решения задач о проводимости и других эффективных характеристиках двумерных трехкомпонентных двухподрешеточных моделей с включениями произвольной формы. Комплексный потенциал вне включений выражен через дзета-функцию Вейерштрасса и ее производные. Электрическое поле, индуцируемое на отдельном включении, описывается с помощью матрицы мультипольных поляризуемостей, для которой установлено соотношение симметрии. Предложенный подход позволяет, в частности, находить точные вириальные разложения для основных электрофизических характеристик подобных систем.

PACS: 41.20.Cv, 73.50.-h

1. ВВЕДЕНИЕ

В изучении электрофизических свойств бинарных композитов достигнут определенный прогресс, особенно значительный для двумерных систем. Для них получен ряд аналитических результатов — проводимость [1], гальваномагнитные [2] и термоэлектрические [3] характеристики случайно-неоднородных моделей с критическим составом. Как показано в [4, 5], результаты работ [2, 3] могут быть распространены на случай произвольных концентраций, для чего достаточно знать безразмерную эффективную проводимость f. Однако для случайно-неоднородных систем функция f во всей области изменения аргументов известна только для неупорядоченных решеток как результат численного эксперимента.

В более выгодном положении находятся периодические модели, для проводимости которых получен ряд точных результатов [6, 7] в случае диэлектрических или идеально проводящих включений. Замкнутое решение задачи при конечной ненулевой проводимости обеих компонент дано для модели со структурой шахматной доски [6]. Проводимость и другие эффективные характеристики более реалистической модели Рэлея [8] достаточно полно рассмотрены в [9]. Наконец, в работе [10] предложен общий метод вычисления различных электрофизических характеристик двумерных двухкомпонентных периодических систем с включениями произвольной формы.

Теория гораздо более разнообразных по своим свойствам трехкомпонентных систем разработана значительно хуже. Здесь можно отметить работы [11, 12], где рассмотрена двумерная двухподрешеточная система, являющаяся обобщением модели Рэлея — изотропная матрица с расположенными в шахматном порядке круговыми включениями двух типов, имеющими разные радиусы и различные проводимости. В [11] предложен приближенный метод вычисления проводимости этой системы. Решение задачи о проводимости и других эффективных характеристиках двухподрешеточной модели, справедливое при произвольных концентрациях, дано в [12]. Отметим, что методы работ [11, 12] применимы только к системам с круговыми включениями.

В настоящей работе рассмотрены основные электрофизические характеристики двумерной трехкомпонентной двухподрешеточной модели с включениями произвольной (однако достаточно симметричной — см. разд. 2) формы. Обобщение метода ра-

*E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru

боты [10] позволило дать решение задач о проводимости, термоэдс, коэффициенте Холла и парциальных моментах напряженности электрического поля второго порядка. Комплексный потенциал вне включений выражен через дзета-функцию Вейерштрасса [13] и ее производные. Свойства включений входят в виде мультипольных поляризуемостей — соответствующих коэффициентов в «откликах» этих включений на различные внешние поля. Для матрицы мультипольных поляризуемостей установлено соотношение симметрии.

2. МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ

Пусть в среде проводимости σ_1 имеется включение (тело), проводимость которого равна σ_2. Если приложено однородное поле с напряженностью $\mathbf{E}_0$, то на больших от тела расстояниях r электрический потенциал φ в дипольном приближении имеет вид (двумерный случай)

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r} + 2\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^2} + \ldots, \quad r\to\infty. \tag{1}$$

Здесь

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda}\mathbf{E}_0 \tag{2}$$

— дипольный момент включения, $\hat{\Lambda}$ — тензор дипольной поляризуемости. Если поле $\mathbf{E}_0$ направлено вдоль одной из главных осей тензора $\hat{\Lambda}$, которую выберем в качестве координатной оси x, то

$$\varphi^{(x)}(r) = -E_0\left\{x - 2\frac{x\Lambda^{(x)}}{r^2} + \ldots\right\}, \quad r\to\infty, \tag{3}$$

где $\Lambda^{(x)}$ — соответствующее главное значение тензора $\hat{\Lambda}$. Для упрощения довольно громоздких задач, рассмотренных в разд. 3–7, ограничимся (как и в [10]) случаем достаточно симметричных включений с симметрией не ниже, чем у эллипса.

В дальнейшем будет удобно пользоваться комплексным потенциалом

$$\Phi(z) = \varphi - iA, \quad z = x+iy. \tag{4}$$

Здесь φ — электрический потенциал, A — z-составляющая векторного потенциала, определенного согласно

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \{0,0,A\}, \tag{5}$$

так что

$$E_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \tag{6}$$

где E_x и E_y — составляющие напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ вне включения. Производная от комплексного потенциала связана с E_x и E_y следующим образом:

$$\Phi'(z) = -E_x + iE_y. \tag{7}$$

Комплексный потенциал, отвечающий выражению (3), имеет вид

$$\Phi^{(x)}(z) = -E_0\left\{z - \frac{2\Lambda^{(x)}}{z} + \ldots\right\}, \quad |z|\to\infty, \tag{8}$$

с вещественной константой $\Lambda^{(x)}$.

При учете высших (мультипольных) моментов выражение для $\Phi(z)$ при больших $|z|$ принимает вид

$$\Phi^{(x)}(z) = z + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{(x)}_{1,2m+1}}{z^{2m+1}}. \tag{9}$$

В формуле (9) опущен общий множитель; величины $\Lambda^{(x)}_{1,2m+1}$ вещественны. Сравнение уравнения (9) с (8) показывает, что $\Lambda^{(x)}_{11} = -2\Lambda^{(x)}$.

Ниже понадобится также и отклик включения на неоднородное внешнее поле вида

$$\operatorname{Re} z^{2n+1} = r^{2n+1}\cos(2n+1)\vartheta,$$

где ϑ — полярный угол. В этом случае аналогично (9) получаем

$$\Phi^{(x)}(z) = z^{2n+1} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{(x)}_{2n+1,2m+1}}{z^{2m+1}} \tag{10}$$

с вещественными константами $\Lambda^{(x)}_{2n+1,2m+1}$, которые будем называть мультипольными поляризуемостями. Аналогичным образом для внешнего поля вида

$$\operatorname{Im} z^{2n+1} = r^{2n+1}\sin(2n+1)\vartheta$$

имеем

$$\Phi^{(y)}(z) = -i\left\{z^{2n+1} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Lambda^{(y)}_{2n+1,2m+1}}{z^{2m+1}}\right\}. \tag{11}$$

Константы $\Lambda^{(y)}_{2n+1,2m+1}$ также считаем вещественными.

Преобразование Дыхне [1] позволяет связать комплексные потенциалы исходной и так называемой взаимной (отличающейся от исходной заменами $\sigma_1\to\sigma_2$, $\sigma_2\to\sigma_1$) систем (ср. с [10]):

$$\Phi^{(x)}(z) = i\tilde{\Phi}^{(y)}(z). \tag{12}$$

Значком «тильда» здесь и ниже отмечаются величины, относящиеся к взаимной системе. Подстановка (10) и (11) в (12) дает соотношение [10]

$$\tilde{\Lambda}^{(y)}_{2n+1,2m+1} = -\Lambda^{(x)}_{2n+1,2m+1}. \tag{13}$$

Для мультипольных поляризуемостей $\Lambda^{(v)}_{2n+1,2m+1}$ справедливо следующее соотношение симметрии (см. Приложение А):

$$(2m+1)\Lambda^{(v)}_{2n+1,2m+1} = (2n+1)\Lambda^{(v)}_{2m+1,2n+1}, \quad v = x, y. \tag{14}$$

Из (10) и (11) по соображениям размерности следует, что

$$\Lambda^{(v)}_{nm} = R^{n+m}\alpha^{(v)}_{nm}, \tag{15}$$

где R — характерный размер (в плоскости xy) включения, $\alpha^{(v)}_{nm}$ — безразмерные величины, зависящие от формы включения и аргумента $h = \sigma_2/\sigma_1$.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ВНЕ ВКЛЮЧЕНИЙ

Исследуемая модель представляет собой двумерную изотропную матрицу проводимости σ_1 с включениями двух типов, расположенных в шахматном порядке. Включения первого типа (одинаковые и одинаково ориентированные) имеют проводимость σ_2 и образуют квадратную решетку с периодом $2a$. Включения второго типа (также одинаковые и одинаково ориентированные) имеют проводимость σ_3 и образуют такую же решетку, сдвинутую на половину периода по осям x и y. Будем считать, что главные оси тензоров поляризуемости включений обоих типов совпадают с осями решетки и с осями координат x и y. Тогда, если средняя напряженность электрического поля $\langle \mathbf{E} \rangle$ направлена вдоль оси x или оси y, то все величины в (10) и (11) вещественны. Задачу о нахождении потенциала вне включений решаем с помощью разложения по формально малому параметру R/a, где в данном случае R — максимальный «радиус» включений.

В нулевом приближении комплексный потенциал, отвечающий однородному внешнему полю, приложенному вдоль оси x, имеет вид

$$\Phi^{(0)}(z) = \beta z \tag{16}$$

с вещественной постоянной β. Отклик включения первого типа, расположенного в начале координат, на поле (16) дается согласно (9) выражением

$$\Phi^{(1)}_{\mathrm{I}}(z) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_{1,2n+1}}{z^{2n+1}} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_{1,2n+1}}{(2n)!} \left(\frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \frac{1}{z} \right). \tag{17}$$

Здесь и ниже индекс «x» у $\Phi^{(x)}(z)$ и $\Lambda^{(x)}_{nm}$ опускаем. Аналогичным образом, для отклика включения второго типа с центром в точке $z = z_0$ на поле (16) имеем

$$\Phi^{(1)}_{\mathrm{II}}(z) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{1,2n+1}}{(z-z_0)^{2n+1}} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{1,2n+1}}{(2n)!} \left(\frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \frac{1}{z-z_0} \right), \tag{18}$$

где $z_0 = (1+i)a$. Здесь также опущен индекс x и через λ_{nm} обозначена матрица мультипольных поляризуемостей включений второго типа.

Суммируя отклики типа (17) и (18) от всех включений, для поправки первого приближения к (16) получим следующее выражение:

$$\Phi^{(1)}(z) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B^{(1)}_n \zeta^{(2n)}(z) + D^{(1)}_n \zeta^{(2n)}(z-z_0) \right\}, \tag{19}$$

$$B^{(1)}_n = \frac{1}{(2n)!}\Lambda_{1,2n+1}, \quad D^{(1)}_n = \frac{1}{(2n)!}\lambda_{1,2n+1}. \tag{20}$$

В (19) $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса [13], $\zeta^{(2n)}(z)$ — производная порядка $2n$ от $\zeta(z)$. Функции $\zeta(z)$ и $\zeta(z-z_0)$ (слагаемые с $n=0$ в (19)) возникают в результате суммирования потенциалов диполей, наведенных внешним полем. При этом, как и в [9, 10], проведена регуляризация соответствующих сумм, что обеспечивает их сходимость. Слагаемые с $n \geq 1$ в (19) отвечают высшим мультиполям.

В следующем приближении в качестве внешнего по отношению к выделенному включению первого типа потенциала выступает $\Phi^{(1)}(z)$ из (19) за вычетом собственного поля $\Phi^{(1)}_{\mathrm{I}}(z)$, т. е. величина $\Phi^{(1)}(z) - \Phi^{(1)}_{\mathrm{I}}(z)$. При отыскании отклика на это поле используются следующие разложения в окрестности точки $z = 0$ [12]:

$$\zeta^{(2n)}(z) = \frac{(2n)!}{z^{2n+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n+2k)!}{(2k+1)!} c_{n+k+1} z^{2k+1}, \tag{21}$$

$$\zeta^{(2n)}(z-z_0) = -\zeta(z_0)\delta_{n0} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n+2k)!}{(2k+1)!} d_{n+k+1} z^{2k+1}, \tag{22}$$

где $\zeta(z_0) = \pi(1-i)/4a$, δ_{nm} — символ Кронекера. Коэффициенты c_{2n} имеют следующие значения [13]:

$$\begin{gathered} c_2 = \frac{g_2}{20}, \quad g_2 = \frac{1}{a^4}\left[K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^4, \\ c_4 = \frac{1}{3}c_2^2, \quad c_6 = \frac{2}{3\cdot 13}c_2^3, \\ c_8 = \frac{5}{3\cdot 13\cdot 17}c_2^4, \ \ldots \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь $K(1/\sqrt{2}) = 1.85407\ldots$ — полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ с модулем $k = 1/\sqrt{2}$. Величины d_{2n} могут быть выражены через c_{2n} [12]:

$$d_{2n} = [(-4)^n - 1]\, c_{2n}. \tag{24}$$

Коэффициенты c_n и d_n с нечетными индексами в рассматриваемом случае квадратной решетки равны нулю [13].

Соответственно для включения второго типа (с центром в точке $z = z_0$) в качестве внешнего потенциала выступает величина $\Phi^{(1)}(z) - \Phi^{(1)}_{\mathrm{II}}(z)$. Здесь при отыскании отклика используются следующие разложения в окрестности точки $z = z_0$ [12]:

$$\zeta^{(2n)}(z) = \zeta(z_0)\delta_{n0} - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n+2k)!}{(2k+1)!} d_{n+k+1} (z - z_0)^{2k+1}, \tag{25}$$

$$\zeta^{(2n)}(z - z_0) = \frac{(2n)!}{(z - z_0)^{2n+1}} - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n+2k)!}{(2k+1)!} c_{n+k+1} (z - z_0)^{2k+1} \tag{26}$$

с теми же коэффициентами c_n и d_n.

Находя поправки второго и последующих порядков (ср. с [10]), приходим к выводу, что полный потенциал вне включений имеет точно такой же вид, как и в случае включений круговой формы [12]:

$$\Phi(z) = \\ = \beta \left\{ z + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^{(2n)}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \zeta^{(2n)}(z - z_0) \right\}. \tag{27}$$

Коэффициенты B_n и D_n удовлетворяют системе уравнений

$$B_n + \sum_{m=0}^{\infty} (F_{nm} B_m + H_{nm} D_m) = \frac{1}{(2n)!} \Lambda_{1,2n+1}, \tag{28}$$

$$D_n + \sum_{m=0}^{\infty} (K_{nm} B_m + L_{nm} D_m) = \frac{1}{(2n)!} \lambda_{1,2n+1}. \tag{29}$$

Здесь

$$F_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2m)!}{(2k+1)!} c_{k+m+1} \frac{\Lambda_{2k+1,2n+1}}{(2n)!}, \tag{30}$$

$$H_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2m)!}{(2k+1)!} d_{k+m+1} \frac{\Lambda_{2k+1,2n+1}}{(2n)!}, \tag{31}$$

$$K_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2m)!}{(2k+1)!} d_{k+m+1} \frac{\lambda_{2k+1,2n+1}}{(2n)!}, \tag{32}$$

$$L_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2m)!}{(2k+1)!} c_{k+m+1} \frac{\lambda_{2k+1,2n+1}}{(2n)!}. \tag{33}$$

Если поле $\langle \mathbf{E} \rangle$ направлено вдоль оси y, то комплексный потенциал вне включений имеет вид (величины, относящиеся к этому случаю, отмечаем черточкой сверху)

$$\overline{\Phi}(z) = -i\beta \times \\ \times \left\{ z - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{B}_n \zeta^{(2n)}(z) - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{D}_n \zeta^{(2n)}(z - z_0) \right\}. \tag{34}$$

Коэффициенты $\overline{B}_n$ и $\overline{D}_n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\overline{B}_n - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\overline{F}_{nm} \overline{B}_m + \overline{H}_{nm} \overline{D}_m \right) = \frac{1}{(2n)!} \overline{\Lambda}_{1,2n+1}, \tag{35}$$

$$\overline{D}_n - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\overline{K}_{nm} \overline{B}_m + \overline{L}_{nm} \overline{D}_m \right) = \frac{1}{(2n)!} \overline{\lambda}_{1,2n+1}. \tag{36}$$

Выражения для матриц $\overline{F}_{nm}$, $\overline{H}_{nm}$, $\overline{K}_{nm}$ и $\overline{L}_{nm}$ следуют из (30)–(33) при заменах $\Lambda_{nm} \to \overline{\Lambda}_{nm} \equiv \Lambda^{(y)}_{nm}$, $\lambda_{nm} \to \overline{\lambda}_{nm} \equiv \lambda^{(y)}_{nm}$. Формулы (27)–(36) дают решение поставленной задачи.

4. НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Введем «переменные» x_k и y_k следующим образом:

$$B_n = \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_{2k+1,2n+1} x_k, \\ D_n = \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{2k+1,2n+1} y_k. \tag{37}$$

Для x_k и y_k получаем следующую систему уравнений:

$$x_k + \sum_{l=0}^{\infty} (M_{kl} x_l + P_{kl} y_l) = \delta_{k0}, \tag{38}$$

$$y_k + \sum_{l=0}^{\infty} (Q_{kl} x_l + N_{kl} y_l) = \delta_{k0}, \tag{39}$$

где δ_{k0} — символ Кронекера. Матрицы M_{kl}, P_{kl}, Q_{kl} и N_{kl} удовлетворяют уравнениям

$$M_{kl} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k+2m)!}{(2k+1)!} c_{k+m+1} \frac{\Lambda_{2l+1,2m+1}}{(2m)!}, \tag{40}$$

$$P_{kl} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k+2m)!}{(2k+1)!} d_{k+m+1} \frac{\lambda_{2l+1,2m+1}}{(2m)!}, \tag{41}$$

$$Q_{kl} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k+2m)!}{(2k+1)!} d_{k+m+1} \frac{\Lambda_{2l+1,2m+1}}{(2m)!}, \tag{42}$$

$$N_{kl} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k+2m)!}{(2k+1)!} c_{k+m+1} \frac{\lambda_{2l+1,2m+1}}{(2m)!}. \tag{43}$$

Нетрудно убедиться с учетом определений (37), что из уравнений (38)–(43) следует система уравнений (28)–(33).

Аналогичным образом, полагая

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\Lambda}_{2k+1,2n+1} \overline{x}_k, \\ \overline{D}_n &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\lambda}_{2k+1,2n+1} \overline{y}_k, \end{aligned} \tag{44}$$

из (35), (36) получим систему уравнений

$$\overline{x}_k - \sum_{l=0}^{\infty} \left(\overline{M}_{kl} \overline{x}_l + \overline{P}_{kl} \overline{y}_l \right) = \delta_{k0}, \tag{45}$$

$$\overline{y}_k - \sum_{l=0}^{\infty} \left(\overline{Q}_{kl} \overline{x}_l + \overline{N}_{kl} \overline{y}_l \right) = \delta_{k0}. \tag{46}$$

Выражения для матриц $\overline{M}_{kl}$, $\overline{P}_{kl}$, $\overline{Q}_{kl}$ и $\overline{N}_{kl}$ следуют из уравнений (40)–(43) при заменах $\Lambda_{nm} \to \overline{\Lambda}_{nm}$, $\lambda_{nm} \to \overline{\lambda}_{nm}$.

Введение величин x_k и y_k позволяет установить ряд полезных соотношений (тождеств). Рассмотрим систему той же структуры, что и исходная, но с другими проводимостями κ_1, κ_2 и κ_3 (в качестве κ_i может выступать, например, теплопроводность, см. ниже). Величины, относящиеся к этой системе, будем отмечать двойной чертой. Уравнение, аналогичное уравнению (38), в этом случае будет иметь вид

$$\overline{\overline{x}}_k + \sum_{l=0}^{\infty} \left(\overline{\overline{M}}_{kl} \overline{\overline{x}}_l + \overline{\overline{P}}_{kl} \overline{\overline{y}}_l \right) = \delta_{k0}. \tag{47}$$

Умножим (38) на $(2k+1)!\,\overline{\overline{B}}_k$, (47) — на $(2k+1)!\,B_k$, вычтем друг из друга и просуммируем по всем k. В результате с учетом определения (37) и соотношения симметрии (14) получим

$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_l (2k+1) \left[\overline{\overline{\Lambda}}_{2l+1,2k+1} - \Lambda_{2l+1,2k+1} \right] x_k \overline{\overline{x}}_l + \\ &+ \sum_k \sum_l (2k+2l)! \left[\overline{\overline{B}}_k D_l - B_k \overline{\overline{D}}_l \right] d_{k+l+1} = \\ &= \overline{\overline{B}}_0 - B_0. \end{aligned} \tag{48}$$

Аналогичным образом находим еще одно соотношение:

$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_l (2k+1) \left[\overline{\overline{\lambda}}_{2l+1,2k+1} - \lambda_{2l+1,2k+1} \right] y_k \overline{\overline{y}}_l - \\ &- \sum_k \sum_l (2k+2l)! \left[\overline{\overline{B}}_k D_l - B_k \overline{\overline{D}}_l \right] d_{k+l+1} = \\ &= \overline{\overline{D}}_0 - D_0. \end{aligned} \tag{49}$$

Из уравнений (48) и (49) следует тождество

$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_l (2k+1) \left[\overline{\overline{\Lambda}}_{2l+1,2k+1} - \Lambda_{2l+1,2k+1} \right] x_k \overline{\overline{x}}_l + \\ &+ \sum_k \sum_l (2k+1) \left[\overline{\overline{\lambda}}_{2l+1,2k+1} - \lambda_{2l+1,2k+1} \right] y_k \overline{\overline{y}}_l = \\ &= \overline{\overline{B}}_0 - B_0 + \overline{\overline{D}}_0 - D_0. \end{aligned} \tag{50}$$

Суммирование по k и l в уравнениях (48)–(50) проводится от 0 до ∞.

Умножим теперь (38) на $(2k+1)!\,\overline{B}_k$, (45) — на $(2k+1)!\,B_k$, сложим и затем просуммируем по всем k. В результате получим

$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_l (2k+1) \left[\Lambda_{2l+1,2k+1} + \overline{\Lambda}_{2l+1,2k+1} \right] x_k \overline{x}_l + \\ &+ \sum_k \sum_l (2k+2l)! \left[\overline{B}_k D_l - B_k \overline{D}_l \right] d_{k+l+1} = \\ &= B_0 + \overline{B}_0. \end{aligned} \tag{51}$$

Аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_l (2k+1) \left[\lambda_{2l+1,2k+1} + \overline{\lambda}_{2l+1,2k+1} \right] y_k \overline{y}_l - \\ &- \sum_k \sum_l (2k+2l)! \left[\overline{B}_k D_l - B_k \overline{D}_l \right] d_{k+l+1} = \\ &= D_0 + \overline{D}_0. \end{aligned} \tag{52}$$

Из уравнений (51) и (52) следует тождество

$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_l (2k+1) \left[\Lambda_{2l+1,2k+1} + \overline{\Lambda}_{2l+1,2k+1} \right] x_k \overline{x}_l + \\ &+ \sum_k \sum_l (2k+1) \left[\lambda_{2l+1,2k+1} + \overline{\lambda}_{2l+1,2k+1} \right] y_k \overline{y}_l = \\ &= B_0 + \overline{B}_0 + D_0 + \overline{D}_0. \end{aligned} \tag{53}$$

В уравнениях (51)–(53) суммирование по k и l также проводится от 0 до ∞.

5. ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Вычисляя с помощью комплексного потенциала $\Phi(z)$ из (27) падение напряжения U_x на элементарной ячейке и полный ток I_x через нее в направлении оси x, аналогично [12] получим

$$U_x = -2a\beta \left[1 + (B_0 + D_0)\frac{\pi}{4a^2}\right], \tag{54}$$

$$I_x = -2\sigma_1 a\beta \left[1 - (B_0 + D_0)\frac{\pi}{4a^2}\right]. \tag{55}$$

Для эффективной проводимости $\sigma_{xe} = I_x/U_x$ в направлении оси x (т. е. для соответствующего главного значения σ_{xe} эффективного тензора проводимости $\hat{\sigma}_e$) находим

$$\sigma_{xe} = \sigma_1 f_x, \quad f_x = \frac{1 - (B_0 + D_0)\dfrac{\pi}{4a^2}}{1 + (B_0 + D_0)\dfrac{\pi}{4a^2}}. \tag{56}$$

В случае, когда поле $\langle \mathbf{E} \rangle$ направлено вдоль оси y, для эффективной проводимости σ_{ye} аналогично (56) получим

$$\sigma_{ye} = \sigma_1 f_y, \quad f_y = \frac{1 - \left(\overline{B}_0 + \overline{D}_0\right)\dfrac{\pi}{4a^2}}{1 + \left(\overline{B}_0 + \overline{D}_0\right)\dfrac{\pi}{4a^2}} \tag{57}$$

с коэффициентами $\overline{B}_0$ и $\overline{D}_0$ из (34).

Рассматриваемая система является, вообще говоря, структурно анизотропной. Для таких систем соотношение взаимности имеет вид

$$\tilde{f}_x f_y = 1, \tag{58}$$

где значком «тильда» отмечена взаимная система, отличающаяся от исходной заменами $\sigma_i/\sigma_1 \to \sigma_1/\sigma_i$; $i = 2, 3$. Подстановка равенств (27) и (34) в соотношение (12), записанное в виде $\tilde{\Phi}(z) = i\overline{\Phi}(z)$, дает

$$\tilde{B}_n = -\overline{B}_n, \quad \tilde{D}_n = -\overline{D}_n. \tag{59}$$

Из равенств (56) и (57) с учетом равенств (59) следует, что соотношение взаимности (58) выполняется.

При малых концентрациях включений из уравнений (28), (29) аналогично [10] может быть найдено вириальное разложение для коэффициентов B_0, D_0 и тем самым для эффективной проводимости σ_{xe}.

Прежде чем перейти к вычислению других электрофизических характеристик рассматриваемой модели, найдем выражения для комплексных потенциалов в окрестности включений первого ($z = 0$) и второго ($z = z_0$) типов. В окрестности точки $z = 0$ подставляем в (27) разложения (21) и (22):

$$\Phi(z) = \beta \left\{ z + \sum_n B_n \frac{(2n)!}{z^{2n+1}} - \right.$$
$$- \sum_n \left[\sum_m \frac{(2n+2m)!}{(2n+1)!} (B_m c_{n+m+1} + D_m d_{n+m+1}) \right] \times$$
$$\left. \times\, z^{2n+1} - D_0 \zeta(z_0) \right\}. \tag{60}$$

Здесь в двойной сумме проведена замена $n \leftrightarrow m$. В сумму по m из (60) подставляем выражения для B_m и D_m, записанные через x_l и y_l (см. (37)). В результате

$$\Phi(z) = \beta \left\{ z + \sum_n B_n \frac{(2n)!}{z^{2n+1}} - \right.$$
$$\left. - \sum_n \left[\sum_l (M_{nl} x_l + P_{nl} y_l) \right] z^{2n+1} - D_0 \zeta(z_0) \right\}. \tag{61}$$

Исключая сумму по l с помощью (38), получим окончательно

$$\Phi(z) =$$
$$= \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_n \frac{(2n)!}{z^{2n+1}} + x_n z^{2n+1} \right\} - \beta D_0 \zeta(z_0). \tag{62}$$

Аналогичным образом из (34) после подстановки (21), (22) находим

$$\overline{\Phi}(z) =$$
$$= i\beta \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \overline{B}_n \frac{(2n)!}{z^{2n+1}} - \overline{x}_n z^{2n+1} \right\} - i\beta \overline{D}_0 \zeta(z_0). \tag{63}$$

В окрестности точки $z = z_0$, используя разложения (25) и (26), получаем соответственно

$$\Phi(z) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ D_n \frac{(2n)!}{(z-z_0)^{2n+1}} + y_n (z-z_0)^{2n+1} \right\} +$$
$$+ \beta \left[z_0 + B_0 \zeta(z_0) \right], \tag{64}$$

$$\overline{\Phi}(z) = i\beta \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \overline{D}_n \frac{(2n)!}{(z-z_0)^{2n+1}} - \bar{y}_n (z-z_0)^{2n+1} \right\} -$$
$$- i\beta \left[z_0 - \overline{B}_0 \zeta(z_0) \right]. \tag{65}$$

6. ТЕРМОЭДС

Для структурно анизотропной системы эффективный коэффициент термоэдс задается тензором

$\hat{\alpha}_e$. В случае слабой термоэлектрической связи главные значения тензора $\hat{\alpha}_e$ даются выражениями [14]

$$\alpha_{ve} = \frac{1}{\sigma_{ve}} \frac{\langle \alpha\sigma \mathbf{E}^{(v)}\mathbf{G}^{(v)}\rangle}{\langle \mathbf{E}^{(v)}\rangle\langle \mathbf{G}^{(v)}\rangle}, \quad v = x, y. \tag{66}$$

Здесь $\langle \ldots \rangle$ — среднее по всему объему (площади в двумерном случае) образца, $\mathbf{G} = -\nabla T$ — «напряженность» температурного поля, T — температура; индекс «v» у $\mathbf{E}^{(v)}$ и $\mathbf{G}^{(v)}$ означает, что $\langle \mathbf{E}^{(v)}\rangle$ и $\langle \mathbf{G}^{(v)}\rangle$ направлены вдоль оси v.

Для N-компонентной системы из уравнения (66) следует, что

$$\alpha_{ve} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Psi_i^{(v)}, \quad v = x, y, \tag{67}$$

где

$$\Psi_i^{(v)} = \frac{\sigma_i}{\sigma_{ve}} \frac{\langle \mathbf{E}^{(v)}\mathbf{G}^{(v)}\rangle^{(i)}}{\langle \mathbf{E}^{(v)}\rangle\langle \mathbf{G}^{(v)}\rangle}. \tag{68}$$

Здесь $\langle \ldots \rangle^{(i)}$ — интеграл по объему (площади в двумерном случае) i-й компоненты, деленный на объем (площадь) образца.

Для функций $\Psi_i^{(v)}$ справедливы «правила сумм», аналогичные изотропному случаю [12]:

$$\sum_{i=1}^{N} \Psi_i^{(v)} = 1, \tag{69}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\kappa_i}{\sigma_i} \Psi_i^{(v)} = \frac{\kappa_{ve}}{\sigma_{ve}}; \quad v = x, y. \tag{70}$$

Здесь κ_i — теплопроводность i-й компоненты, κ_{ve} — главные значения эффективного тензора теплопроводности $\hat{\kappa}_e$.

Для трехкомпонентных систем из (67) после исключения $\Psi_1^{(v)}$ с помощью уравнения (69) находим

$$\alpha_{ve} = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\Psi_2^{(v)} + (\alpha_3 - \alpha_1)\Psi_3^{(v)}. \tag{71}$$

Из уравнения (70) после такой же процедуры получаем соотношение

$$\left(\frac{\kappa_1}{\sigma_1} - \frac{\kappa_2}{\sigma_2}\right)\Psi_2^{(v)} + \left(\frac{\kappa_1}{\sigma_1} - \frac{\kappa_3}{\sigma_3}\right)\Psi_3^{(v)} = \frac{\kappa_1}{\sigma_1} - \frac{\kappa_{ve}}{\sigma_{ve}}, \tag{72}$$

которое позволяет исключить из уравнения (71) $\Psi_3^{(v)}$ или $\Psi_2^{(v)}$.

Задачи о теплопроводности и электропроводности в отсутствие термоэлектрических эффектов переходят друг в друга при перестановке $\kappa \leftrightarrow \sigma$. Поэтому результаты разд. 2–5 переносятся на задачу о теплопроводности с помощью замен $\sigma_i \to \kappa_i$, $\sigma_{ve} \to \kappa_{ve}$; величины, относящиеся к этому случаю, будем отмечать двойной чертой.

Для вычисления билинейных характеристик $\langle \mathbf{E}^{(v)}\mathbf{G}^{(v)}\rangle^{(i)}$ (при $i = 2, 3$) воспользуемся формулой, аналогичной выведенной в [10] (см. выражение (A.5) из [10]):

$$\int\limits_{S_i} \left(\mathbf{E}^{(v)}\mathbf{G}^{(v)}\right) d\mathbf{r} = \frac{1}{\dfrac{\kappa_i}{\kappa_1} - \dfrac{\sigma_i}{\sigma_1}} \times \\ \times \int\limits_0^{2\pi} \left(\varphi^{(v)}\frac{\partial T^{(v)}}{\partial r} - T^{(v)}\frac{\partial \varphi^{(v)}}{\partial r}\right)\bigg|_{r=\rho} \rho\, d\vartheta. \tag{73}$$

Здесь слева стоит интеграл по площади включения первого ($i = 2$) или второго ($i = 3$) типа. Справа — интеграл по окружности, радиус ρ которой превышает максимальный «радиус» каждого из включений.

Вычисляя интегралы в правой части (73) с использованием потенциалов (62), (64) и соответствующих «температурных потенциалов», найдем

$$\langle \mathbf{E}^{(x)}\mathbf{G}^{(x)}\rangle^{(2)} = \frac{\pi}{2a^2} \frac{\beta\overline{\overline{\beta}}}{\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1} - \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(2n+1)\left[\Lambda_{2m+1,2n+1} - \overline{\overline{\Lambda}}_{2m+1,2n+1}\right] \times \\ \times x_n \overline{\overline{x}}_m, \tag{74}$$

$$\langle \mathbf{E}^{(x)}\mathbf{G}^{(x)}\rangle^{(3)} = \frac{\pi}{2a^2} \frac{\beta\overline{\overline{\beta}}}{\dfrac{\kappa_3}{\kappa_1} - \dfrac{\sigma_3}{\sigma_1}} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(2n+1) \times \\ \times \left[\lambda_{2m+1,2n+1} - \overline{\overline{\lambda}}_{2m+1,2n+1}\right] y_n \overline{\overline{y}}_m. \tag{75}$$

Подстановка в (68) формул (74), (75), $\langle E_x^{(x)}\rangle = U_x/2a$ с U_x из (54) и аналогичной (с заменами B_0, D_0 на $\overline{\overline{B}}_0$, $\overline{\overline{D}}_0$ и β на $\overline{\overline{\beta}}$) формулы для $\langle G_x^{(x)}\rangle$ дает искомые выражения для функций $\Psi_2^{(x)}$ и $\Psi_3^{(x)}$. Эти выражения, как нетрудно видеть, удовлетворяют соотношению (72) в силу тождества (50). Аналогичным образом находятся и функции $\Psi_2^{(y)}$, $\Psi_3^{(y)}$.

С тензором эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ непосредственно связаны парциальные квадратичные характеристики напряженности электрического поля (см., например, [10]):

$$\psi_i^{(\alpha)} \equiv \langle (\mathbf{e}^{(\alpha)})^2 \rangle^{(i)} = \frac{\partial \sigma_{\alpha e}}{\partial \sigma_i}, \quad \mathbf{e}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}^{(\alpha)}(\mathbf{r})}{|\langle \mathbf{E}^{(\alpha)} \rangle|}, \tag{76}$$

где $\langle \ldots \rangle^{(i)}$ — то же, что и в (68).

Для вычисления функции $\psi_2^{(x)}$ воспользуемся формулой (74). Положив в (74) $\kappa_1 = \sigma_1$, $\kappa_3 = \sigma_3$, $\overline{\overline{\beta}} = \beta$ и проведя затем предельный переход $\kappa_2 \to \sigma_2$, найдем величину $\langle \mathbf{E}^2 \rangle^{(2)}$. В результате с учетом равенства $\langle E_x^{(x)} \rangle = U_x/2a$ с U_x из (54) получим

$$\psi_2^{(x)} = -\sigma_1 \frac{\pi}{2a^2} \frac{1}{\Delta^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2n+1) \frac{\partial \Lambda_{2m+1,2n+1}}{\partial \sigma_2} x_n x_m, \tag{77}$$

$$\Delta = 1 + (B_0 + D_0) \frac{\pi}{4a^2}. \tag{78}$$

Из тождества (50) таким же предельным переходом (с учетом того, что $\partial \lambda_{nm}/\partial \sigma_2 \equiv 0$) находим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2n+1) \frac{\partial \Lambda_{2m+1,2n+1}}{\partial \sigma_2} x_n x_m = \frac{\partial}{\partial \sigma_2} (B_0 + D_0), \tag{79}$$

так что

$$\psi_2^{(x)} = -\sigma_1 \frac{\pi}{2a^2} \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial \sigma_2} (B_0 + D_0). \tag{80}$$

Нетрудно видеть, что правая часть равенства (80) является производной от σ_{xe} из (56):

$$\psi_2^{(x)} = \frac{\partial \sigma_{xe}}{\partial \sigma_2}. \tag{81}$$

Аналогичным образом находятся функции $\psi_3^{(x)}$, а также $\psi_2^{(y)}$ и $\psi_3^{(y)}$.

7. КОЭФФИЦИЕНТ ХОЛЛА

Эффективный коэффициент Холла R_e в слабом магнитном поле H выражается через холловскую составляющую σ_{ae} эффективного тензора проводимости следующим образом:

$$R_e = \frac{1}{H} \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{xe} \sigma_{ye}}. \tag{82}$$

Для N-компонентной системы в линейном по H приближении имеем [12]

$$\sigma_{ae} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ai} \varphi_{ai}, \tag{83}$$

$$\varphi_{ai} = \frac{\langle E_x^{(x)} E_y^{(y)} - E_y^{(x)} E_x^{(y)} \rangle^{(i)}}{\langle E_x^{(x)} \rangle \langle E_y^{(y)} \rangle}, \tag{84}$$

где $\langle \ldots \rangle^{(i)}$ — то же, что и в (68), (76).

Для функций φ_{ai} имеет место «правило сумм» [12]

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_{ai} = 1, \tag{85}$$

справедливое как для двумерных, так и для трехмерных сред. В двумерном случае имеется еще одно соотношение [12]:

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 \varphi_{ai} = \sigma_{xe} \sigma_{ye}, \tag{86}$$

связывающее величины φ_{ai} с составляющими эффективного тензора проводимости (при $H = 0$).

Для трехкомпонентной системы, исключая φ_{a1} с помощью (85), из (83) находим

$$\sigma_{ae} = \sigma_{a1} + (\sigma_{a2} - \sigma_{a1}) \varphi_{a2} + (\sigma_{a3} - \sigma_{a1}) \varphi_{a3}. \tag{87}$$

Из (86) после аналогичной процедуры получим соотношение

$$(1 - h_2^2) \varphi_{a2} + (1 - h_3^2) \varphi_{a3} = 1 - f_x f_y, \tag{88}$$

где $h_i = \sigma_i/\sigma_1$ Равенство (88) позволяет в двумерном случае ограничиться вычислением только одной из функций φ_{ai}, например, φ_{a2}. С другой стороны, соотношение (88), как и (72), может быть использовано для проверки правильности вычислений соответствующих эффективных величин.

Для вычисления входящих в определение функций φ_{ai} интегралов воспользуемся формулой, выведенной в [10] (см. выражение (Б.12) из [10]):

$$\int\limits_{S_i} \left[\mathbf{E}^{(x)} \times \mathbf{E}^{(y)} \right]_z d\mathbf{r} = \frac{1}{1 - h_i^2} \times \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \varphi^{(x)} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(y)}}{\partial \vartheta} + A^{(x)} \frac{\partial \varphi^{(y)}}{\partial r} \right\} \Bigg|_{r=\rho} \rho \, d\vartheta. \tag{89}$$

Здесь слева стоит интеграл по площади включения первого ($i = 2$) или второго ($i = 3$) типа; $[\ldots]_z$ — z-составляющая векторного произведения. Справа в

(89) — интеграл по окружности радиуса ρ, внутри которой находится включение.

Подставим в (89) $\varphi^{(x)} = \mathrm{Re}\,\Phi(z)$, $A^{(x)} = -\mathrm{Im}\,\Phi(z)$, $\varphi^{(y)} = \mathrm{Re}\,\overline{\Phi}(z)$ с $\Phi(z)$, $\overline{\Phi}(z)$ соответственно из (62), (63) и (64), (65). Вычисляя интегралы, для функций φ_{a2} и φ_{a3} получим следующие выражения:

$$\varphi_{a2} = \frac{\pi}{2a^2}\frac{1}{\Delta\overline{\Delta}}\frac{1}{1-h_2^2}\times \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(2n+1)\left[\Lambda_{2m+1,2n+1}+\overline{\Lambda}_{2m+1,2n+1}\right]\times x_n\overline{x}_m, \quad (90)$$

$$\varphi_{a3} = \frac{\pi}{2a^2}\frac{1}{\Delta\overline{\Delta}}\frac{1}{1-h_3^2}\times \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(2n+1)\left[\lambda_{2m+1,2n+1}+\overline{\lambda}_{2m+1,2n+1}\right]\times y_n\overline{y}_m \quad (91)$$

с Δ из (78) и

$$\overline{\Delta} = 1 + \left(\overline{B}_0+\overline{D}_0\right)\frac{\pi}{4a^2}\,. \quad (92)$$

Выражения (90), (91) удовлетворяют соотношению (88) в силу тождества (53).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что для включений круговой формы матрицы мультипольных поляризуемостей диагональны:

$$\Lambda_{nm} = R^{2n}\frac{1-h_2}{1+h_2}\delta_{nm}, \quad \lambda_{nm} = \rho^{2n}\frac{1-h_3}{1+h_3}\delta_{nm}, \quad (93)$$

где R и ρ — радиусы включений. Введем новые «переменные» ξ_n и η_n следующим образом:

$$\xi_n = \sqrt{2n+1}\,R^{2n}x_n, \quad \eta_n = \sqrt{2n+1}\,\rho^{2n}y_n. \quad (94)$$

Нетрудно убедиться, что при подстановке (93) и (94) в полученные в настоящей работе соотношения и формулы они переходят в соответствующие выражения из [12].

Отметим также, что при $\lambda_{nm}^{(v)} = 0$ (при этом $D_n = 0$, $y_n = 0$) исследованная трехкомпонентная двухподрешеточная модель превращается в двухкомпонентную, рассмотренную в [10]. При этом ряд формул настоящей работы переходит в полученные в [10]. Результаты же, связанные с «переменными» x_n, представляют собой дальнейшее развитие метода, использованного в [10].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{r\le\rho}(\mathbf{E}_n\sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_m)\,d\mathbf{r}, \quad (\mathrm{A}.1)$$

взятый по площади круга радиуса ρ, внутри которого находится некоторое включение. Здесь $\mathbf{E}_n = -\nabla\varphi_n$ и $\mathbf{E}_m = -\nabla\varphi_m$, где $\varphi_n(\mathbf{r}) = \mathrm{Re}\,\Phi_n(z)$ и $\varphi_m(\mathbf{r}) = \mathrm{Re}\,\Phi_m(z)$. Комплексные потенциалы $\Phi_n(z)$ и $\Phi_m(z)$ имеют следующие асимптотики:

$$\Phi_n(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda_{nk}}{z^k}, \quad n\ge 1, \quad (\mathrm{A}.2)$$

$$\Phi_m(z) = z^m + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Lambda_{ml}}{z^l}, \quad m\ge 1. \quad (\mathrm{A}.3)$$

С одной стороны, интеграл (А.1) можно записать в виде

$$I = \int\limits_{r\le\rho}(\mathbf{j}_n\cdot\mathbf{E}_m)\,dr, \quad (\mathrm{A}.4)$$

где

$$\mathbf{j}_n = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_n \quad (\mathrm{A}.5)$$

— плотность тока. В силу уравнения $\mathrm{div}\,\mathbf{j}_n = 0$ интеграл (А.4) может быть преобразован следующим образом:

$$I = -\int\limits_{r\le\rho}(\mathbf{j}_n\nabla\varphi_m)\,d\mathbf{r} = -\int\limits_{r\le\rho}\nabla(\mathbf{j}_n\varphi_m)\,d\mathbf{r} = -\sigma_1\int\limits_0^{2\pi}\left[\varphi_m\frac{\partial\varphi_n}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=\rho}\rho\,d\vartheta. \quad (\mathrm{A}.6)$$

С другой стороны,

$$I = \int\limits_{r\le\rho}(\mathbf{E}_n\cdot\mathbf{j}_m)\,d\mathbf{r} = \ldots = -\sigma_1\int\limits_0^{2\pi}\left[\varphi_n\frac{\partial\varphi_m}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=\rho}\rho\,d\vartheta. \quad (\mathrm{A}.7)$$

Вычтем (А.7) из (А.6) и получим

$$\int\limits_0^{2\pi}\left[\varphi_n\frac{\partial\varphi_m}{\partial r}-\varphi_m\frac{\partial\varphi_n}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=\rho}\rho\,d\vartheta = 0. \quad (\mathrm{A}.8)$$

Тождество (А.8) справедливо при произвольных ρ ($\rho > R$, где R — максимальный «радиус» включения), в том числе и при $\rho\to\infty$. Используя асимптотические выражения (А.2) и (А.3), из (А.8) получаем

$$m\Lambda_{nm} = n\Lambda_{mn}. \quad (\mathrm{A}.9)$$

Нетрудно убедиться, что матрица мультипольных поляризуемостей для включения эллиптической формы (см. [10]) удовлетворяет соотношению (А.9).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_S (\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{G}_m)\, dr, \qquad (Б.1)$$

взятый по площади включения S. Здесь $\mathbf{E}_n$ — то же, что и в (А.1), $\mathbf{G}_m = -\nabla T_m$, где $T_m(\mathbf{r}) = \mathrm{Re}\,\overline{\overline{\Phi}}_m(z)$ и $\overline{\overline{\Phi}}_m(z)$ имеет асимптотику, аналогичную (А.3) (с заменой Λ_{ml} на $\overline{\overline{\Lambda}}_{ml}$). Вычисляя интеграл (Б.1) с помощью формулы (73), получим

$$\int_S (\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{G}_m)\, d\mathbf{r} = 2\pi \frac{m\left(\Lambda_{nm} - \overline{\overline{\Lambda}}_{nm}\right)}{\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1} - \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}}. \qquad (Б.2)$$

При выводе формулы (Б.2) использовано соотношение симметрии (А.9). Переходя в (Б.2) к пределу $\kappa_2/\kappa_1 \to \sigma_2/\sigma_1$, найдем

$$\int_S (\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_m)\, d\mathbf{r} = -2\pi m \frac{\partial \Lambda_{nm}}{\partial h}, \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \qquad (Б.3)$$

При определении мультипольных поляризуемостей Λ_{nm} численными методами соотношение (Б.3) позволяет находить производные $\partial\Lambda_{nm}/\partial h$ без затруднительного численного дифференцирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 641 (1970).
3. Б. Я. Балагуров, ФТП **16**, 259 (1982).
4. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **82**, 1333 (1982).
5. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **85**, 568 (1983).
6. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*, Наукова думка, Киев (1986).
7. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **79**, 1561 (1980).
8. Lord Rayleigh, Phil. Mag. **34**, 481 (1892).
9. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **117**, 978 (2000).
10. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **120**, 668 (2001).
11. Ю. П. Емец, ЖЭТФ **114**, 1121 (1998).
12. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **119**, 142 (2001).
13. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, Наука, Москва (1979).
14. Б. Я. Балагуров, ФТП **21**, 1978 (1987).